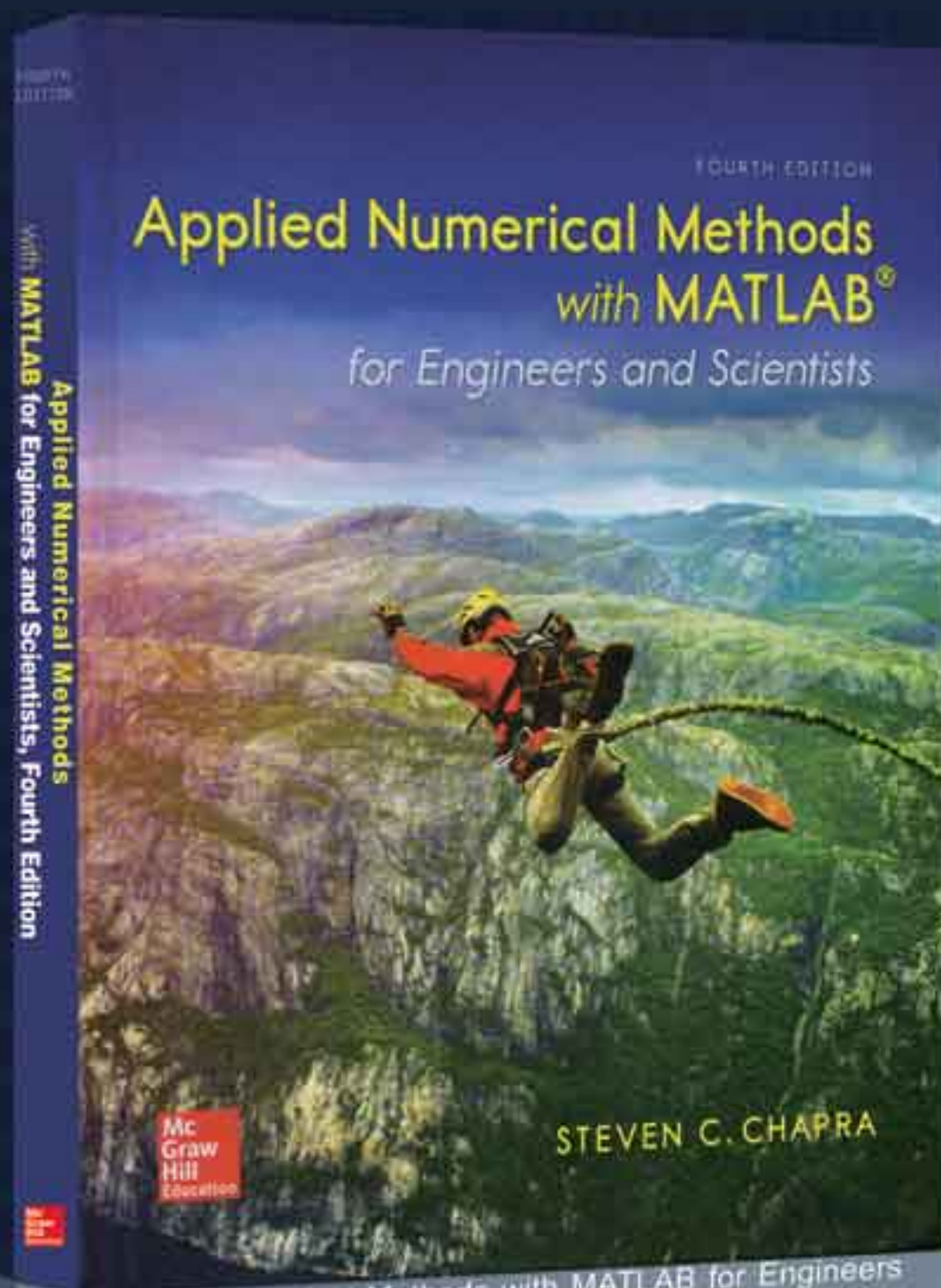


国外计算机科学经典教材

工程与科学数值方法的 MATLAB实现 (第4版)

[美] Steven C. Chapra 著
林 赐 译



Mc
Graw
Hill
Education

Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers
and Scientists, Fourth Edition

清华大学出版社

国外计算机科学经典教材

工程与科学数值方法 的 MATLAB 实现

(第 4 版)

[美] Steven C. Chapra 著
林 赐 译

清华大学出版社

北 京

Steven C. Chapra

Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists, Fourth Edition

EISBN: 978-0-07-339796-2

Copyright © 2017 by McGraw-Hill Education.

All Rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including without limitation photocopying, recording, taping, or any database, information or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

This authorized Chinese translation edition is jointly published by McGraw-Hill Education and Tsinghua University Press Limited. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only, excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan.

Translation Copyright © 2018 by McGraw-Hill Education and Tsinghua University Press Limited.

版权所有。未经出版人事先书面许可，对本出版物的任何部分不得以任何方式或途径复制或传播，包括但不限于复印、录制、录音，或通过任何数据库、信息或可检索的系统。

本授权中文简体字翻译版由麦格劳-希尔(亚洲)教育出版公司和清华大学出版社有限公司合作出版。此版本经授权仅限在中国大陆区域销售，不能销往中国香港、澳门特别行政区和中国台湾地区。

版权©2018 由麦格劳-希尔(亚洲)教育出版公司与清华大学出版社有限公司所有。

北京市版权局著作权合同登记号 图字：01-2017-4214

本书封面贴有 McGraw-Hill Education 公司防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

工程与科学数值方法的MATLAB实现：第4版 / (美)史蒂文·C.恰布拉(Steven C. Chapra) 著；林赐 译。
—北京：清华大学出版社，2018

(国外计算机科学经典教材)

书名原文：Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists, Fourth Edition

ISBN 978-7-302-48692-3

I. ①工… II. ①史… ②林… III. ①Matlab 软件—应用—工程技术—数值方法—教材 IV. ①TB115.1T
②N32

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 270948 号

责任编辑：王 军 李维杰

装帧设计：孔祥峰

责任校对：曹 阳

责任印制：

出版发行：清华大学出版社

网 址：<http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084

社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者：北京富博印刷有限公司

装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂

经 销：全国新华书店

开 本：185mm×260mm 印 张：46 字 数：1063 千字

版 次：2018 年 1 月第 1 版 印 次：2018 年 1 月第 1 次印刷

印 数：1~3000

定 价：128.00 元

产品编号：

译者序

在翻译此书的时候，我经常想起第一次接触数值分析时的情景。数值分析相对于传统的解析方法而言，一般是在无法使用传统的解析方法得到解析解的情况下，才是我们用来求解问题的方法。从这个方面来看，数值分析是一个备选项，是解析方法的备胎。因此，数值分析可能不受很多读者重视。但是，随着计算机技术和计算数学的发展，科学计算已经成为与理论分析、科学实验并列的第三种科学研究手段。如果说解析方法是童话世界，那么数值方法就是现实世界。童话世界固然美好，但也只是空中楼阁，可望而不可即。相反，现实世界是一幅波澜壮阔的画卷，充满人生百态，读者难以亦步亦趋跟随成功的榜样前进，每个人的成功都不可复制；也不能按部就班，循规蹈矩，最后只能流于中庸。在现实世界中，没有既定的轨迹，正如数值分析一样，必须瞻前顾后，一步一个脚印，踏踏实实，摸着石头前进。面对浮躁世事，没有实事求是的态度，面对惊涛骇浪，没有气定神闲的勇气，面对暴风骤雨，没有搏击长空的气概，难以驾驭生活这艘帆船，也难以学习到数值分析的真谛。

正由于数值分析的这种本质，我们才得以在面对现实世界的复杂时，多了一份神情自若，多了一份胸有成竹。恕我孤陋寡闻，在物理、大气科学、化学、材料科学与工程、医学等众多领域，凡是涉及计算的学科，数值分析都起着举足轻重的作用。童话世界再美好，也抵不住来自现实世界的冲击。童话世界中的解析方法，理想、完美、简单，但是，在现实领域中，却难担大任。数值方法“丑到极致”，却在复杂的实践中大放异彩。在实践中，读者才能体会到数值分析的用途，没有实践，对数值分析的学习只能算得上是隔靴搔痒，因而也就不能举一反三，触类旁通。

数值分析是一门实践性很强的学科，如果没有现代计算机技术的发展，数值分析烦琐、冗长的计算，会让许多人都感到望而生畏。因此，MATLAB 软件的开发，恰逢其时，为广大工程师和科学家带来了福音和希望。MATLAB 软件是众多工程师耳熟能详的数值计算和建模软件，也几乎成为工程学院或科学学院学生的必备技能。任何一门工程或科学课程，只要牵涉计算，在课程描述中，总会要求学生了解必需的 MATLAB 编程或建模技能。本书以 MATLAB 为载体，与时俱进，旁征博引，深入浅出地介绍了数值计算的各种方法和理论。对于初次接触工程与科学计算的人员，以及理工院校相关专业本科生和研究生而言，如果要系统学习数值方法，本书是很好的开始，有了此书，读者不必发出“书到用时方恨少”的感慨。

本书知识完备、内容丰富、循循善诱、颇具特色，是一本数值计算和工程实践方面不可多得的优秀教材，既可作为入门参考书，也可作为自学教材，还可供广大科技工作者参考阅读。全书内容以实际问题而不是数学理论为牵引进行组织，除了介绍工程和科学中常用的算法和方法之外，还广泛地使用实例演示以及工程和科学案例讲授这些方法

的实际应用。在算法实现方面，书中不仅详细介绍了相关的 MATLAB 内置数值函数，而且提供了一些经典算法的 M 文件，以方便读者自行编写程序。本书作者 Steven C. Chapra 教授不仅是一位优秀的教师，还在工程领域颇有建树，曾经被评为工程领域的杰出教师。在本书中，他通过独特的视角，巧妙地将数值方法理论与工程实践结合起来，以浅显易懂、图文并茂的方式进行讲述。在此，我们很高兴能将其译本奉献给广大读者。

在这里，要特别感谢清华大学出版社的编辑们，她们为本书的翻译投入了巨大的热情，可谓呕心沥血。没有她们的耐心和帮助，本书不可能顺利付梓。

译者才疏学浅，见闻浅薄，言辞多有不足错漏之处，还望谅解并不吝指正。读者如有任何意见和建议，请将反馈信息发送到邮箱 cilin2046@gmail.com。我们将不胜感激。本书主要内容由林赐翻译，参与翻译的还有陈妍、何美英、陈宏波、熊晓磊、管兆昶、潘洪荣、曹汉鸣、高娟妮、王燕、谢李君、李珍珍、王璐、王华健、柳松洋、曹晓松、陈彬、洪妍、刘芸、邱培强、高维杰、张素英、颜灵佳、方峻、顾永湘、孔祥亮。

林 赐

2017 年 7 月 5 日于加拿大渥太华大学

作者简介

Steven C. Chapra 执教于塔夫斯(Tufts)大学的土木与环境工程系，他还担任该校计算机与工程系的教授职位。除本书外，Steven 还著有 *Numerical Methods for Engineers* 和 *Surface Water-Quality Modeling* 这两本书。

Steven 在密歇根(Michigan)大学和曼哈顿(Manhattan)学院获得了工学学位。在进入塔夫斯大学工作之前，他曾在美国环保局、海洋与大气管理局工作过，也曾执教于德州(Texas) A&M 大学和科罗拉多州(Colorado)大学。他的主要研究兴趣集中在地表水质建模以及计算机在环境工程中的高级应用。

由于突出的学术贡献，他获得了很多奖项，包括鲁道夫·霍普勋章(Rudolph Hering Medal ASCE)、梅里安/威利杰出作者奖(Meriam/Wiley Distinguished Author Award)和钱德勒-米塞尔奖(Chandler-Misener Award)。作为杰出的教师，他获得了德克萨斯农工大学 1986 年度 Tenneco 奖、州立科罗拉多大学 1992 年度 Hutchinson 奖和塔夫斯大学 2011 年度杰出教授奖。

Steven 进入环境工程和科学领域起初源于对室外环境的热爱。他还是一名狂热的垂钓者和徒步旅行者。虽然他现在年事已高，但早在 1966 年还是一名大学生的时候，初次接触 Fortran 编程就迷上了计算。现在，他真正感觉到，应该将对数学、科学和计算的热爱与对自然界的激情融合在一起。另外，他还感觉到应该通过教学和写作与其他人分享这一切！

除了对专业感兴趣外，Steven 还喜爱艺术、音乐(尤其是古典音乐、爵士乐和蓝草音乐)以及阅读历史书籍。

如果希望与 Steven 取得联系，或更多地了解他，可以访问他的主页 <http://engineering.tufts.edu/cee/people/chapra/> 或通过邮箱 steven.chapra@tufts.edu 与他联系。

献词

献给
我的兄弟，
约翰和鲍勃·查普拉

以及
弗雷德·贝格(Fred Berger)(1947-2015)

他是我一个好朋友，一个很好的人。
是我的战友，他将工程的光明
带到世界的一些相对黑暗的角落。

致 谢

McGraw-Hill 团队中有好几名成员为本书做出了贡献。特别要感谢 Jolynn Kilburg、博士 Thomas Scaife 和 Chelsea Haupt, 以及 Jeni McAtee, 感谢他们的鼓励、支持和指导。

在本书的出版过程中, MathWorks 公司的员工真正表现出他们的才能, 以及他们对工程和科学教育的强烈责任感。尤其是 MathWorks 公司的图书策划 Naomi Fernandes, 他为本书的出版给予了特别的帮助, 并且要特别感谢 MathWorks 技术支持部门的 Jared Wasserman, 他对技术问题提供了很大的帮助。

由于伯杰家族(Berger family)的慷慨, 为我提供了良机, 让我能够参与像本书这样与工程和科学相关书籍的创新性项目。此外, 我要感谢塔夫茨大学的同事, 尤其是 Masoud Sanayei、Babak Moaveni、Luis Dorfmann、Rob White、Linda Abriola 和 Laurie Baise, 他们给予了我莫大的支持和帮助。

一些同事也提出了重要的建议。特别是 Dave Clough(科罗拉多州-博尔德大学)和 Mike Gustafson(杜克大学), 他们提供了宝贵的意见和建议。此外, 一些审稿人提供了有用的反馈意见和建议, 包括 Karen Dow Ambtman(阿尔伯塔大学)、Jalal Behzadi(沙希德·查兰大学)、Eric Cochran(爱荷华州立大学)、Frederic Gibou(加利福尼亚大学圣巴巴拉分校)、Jane Grande-Allen(莱斯大学)、Raphael Haftka(佛罗里达大学)、Scott Hendricks(弗吉尼亚理工大学)、Ming Huang(圣地亚哥大学)、Oleg Igoshin(莱斯大学)、David Jack(贝勒大学)、Se Won Lee(韩国成均馆大学)、Clare McCabe(范德堡大学)、Eckart Meiburg(加州大学圣巴巴拉分校)、Luis Ricardez(滑铁卢大学)、James Rottman(加利福尼亚大学圣地亚哥分校)、Bingjing Su(辛辛那提大学)、Chin-An Tan(韦恩州立大学)、Joseph Tipton(埃文斯维尔大学)、Marion W. Vance(亚利桑那州立大学)、Jonathan Vande Geest(亚利桑那大学)、Leah J. Walker(阿肯色州立大学)、Qiang Hu(亨茨维尔的阿拉巴马州大学)、Yukinobu Tanimoto(塔夫茨大学)、Henning T. Sogaard(奥胡斯大学)和 Jimmy Feng(不列颠哥伦比亚大学)。

应该强调的是, 尽管我从上面提到的每个人那里都得到了有益的建议, 但是我认为, 您很有可能还会发现书中存在不准确或错误的地方, 如果发现任何错误, 可以通过电子邮件联系我。

最后, 我要感谢我的家庭, 尤其是我的妻子 Cynthia, 感谢她在本书编写过程中一直以来给予的关爱、耐心和支持。

Steven C. Chapra
塔夫茨大学
梅德福, 马萨诸塞州
steven.chapra@tufts.edu

前言

本书的设计目标是满足一个学期的数值方法课程。对于希望学习和应用数值方法来
解决工程与科学问题的学生来讲，本书正是为他们而编写的。同样，这些方法是由实际
问题而不是由数学理论来驱动的。本书同时提供了足够的理论，可以让学生对这些方法
及其不足有深入的认识。

MATLAB 为该课程提供了一个非常棒的环境。尽管还可以选择其他的环境(如
Excel/VBA、Mathcad)或语言(如 Fortran 90、C++)，但就目前来说，方便的编程特性与强
大的内置数值函数的完美结合让我们选择了 MATLAB。一方面，MATLAB 的 M 文件编
程环境可以让学生以结构化和一致的方式适度地实现一些高级算法。另一方面，
MATLAB 的内置数值函数增强了学生的能力，让他们可以求解更加困难的问题，而不用
试着“重复一些简单的问题”。

本书在第 4 版中保留了第 3 版的基本内容、组织结构和教学原理。特别是，第 4 版
特意保留了会话式的写作风格，使得本书深入浅出，易于阅读。本书试图直接与读者对
话，并有意设计，旨在成为自学的工具书。

也就是说，这个版本与之前的版本相比，在三个方面有所不同：(1)新材料；(2)新增
习题以及修订的习题；(3)新增了介绍 Simulink 的附录 C。

(1) 新内容。在一些主题中，增加了一些新内容，并增强介绍了一些章节。补充的
主要内容包括一些先前版本中未提到的 MATLAB 函数(如 `fsolve`、`integrated`、`bvp4c`)，在
积分和优化问题方面，一些蒙特卡罗方法的新应用，以及 MATLAB 将参数传递给函数
的新方法。

(2) 新增习题。既修改了章末的大部分习题，也新增了各种新习题。特别是，已经
做出了努力，在每一章中包含若干比前一版更具挑战性和更困难的新习题。

(3) 新增关于 Simulink 的简短入门介绍，让学生在阅读这个课题之前，先阅读这个
入门介绍。虽然我知道一些教授可能不会选择教授 Simulink，但是我将这个内容涵盖在
本书内，旨在作为讲解该内容的教学辅助手段。

除了增加这些习题和材料之外，第 4 版与第 3 版非常相似。尤其是，尽可能地保留
大多数有益于增强教学效果的优秀特征，包括广泛地使用实例演示以及工程和科学应用
案例。与前一版一样，本书同样尽可能地满足学生的使用需求。为此，本书努力做到让
解释更直接、更实用。

尽管本书的基本目的是增强学生的能力，让他们能够更好地进入数值问题求解领域，
但是还有一个目的就是让学生在学学习时感到激动和愉悦。我相信积极主动的学生会喜爱
工程与科学、问题求解、数学，当然还有编程，他们最终会获得更好的职业。如果本书
能够培养他们对这些主题的激情和兴趣，那么我认为这种努力就取得了成功。

目 录

第 I 部分 建模、计算机与误差分析	
第 1 章 数学建模、数值方法与问题	
求解	3
提出问题	3
1.1 一个简单的数学模型	4
1.2 工程与科学中的守恒律	10
1.3 本书中涉及的数值方法	13
1.4 案例研究	15
1.5 习题	17
第 2 章 MATLAB 基础	29
提出问题	29
2.1 MATLAB 环境	30
2.2 赋值	31
2.2.1 标量	31
2.2.2 数组、向量和矩阵	33
2.2.3 冒号操作符	35
2.2.4 linspace 和 logspace 函数	36
2.2.5 字符串	36
2.3 数学运算	38
2.4 使用内置函数	42
2.5 绘图	45
2.6 其他资源	49
2.7 案例研究：探索性数据分析	49
2.8 习题	51
第 3 章 编写 MATLAB 程序	59
提出问题	59
3.1 M 文件	60
3.1.1 脚本文件	60
3.1.2 函数文件	61

3.1.3 变量的作用域	63
3.1.4 全局变量	64
3.1.5 子函数	66
3.2 输入/输出	67
3.3 结构化编程	71
3.3.1 决策	71
3.3.2 循环	79
3.3.3 动画	83
3.4 嵌套与缩进	85
3.5 将函数传入 M 文件	88
3.5.1 匿名函数	88
3.5.2 函数函数	89
3.5.3 传递参数	92
3.6 案例研究：蹦极运动员的速度	93
3.7 习题	97
第 4 章 舍入与截断误差	111
提出问题	111
4.1 误差	112
4.1.1 准确度与精度	112
4.1.2 误差定义	113
4.1.3 迭代计算的计算机算法	116
4.2 舍入误差	118
4.2.1 计算机中数的表示	118
4.2.2 计算机中数的算术运算	123
4.3 截断误差	125
4.3.1 泰勒级数	125
4.3.2 泰勒级数展开的余项	129
4.3.3 用泰勒级数估计截断误差	131
4.3.4 数值差分	132

4.4 总数值误差·····136	7.2.1 黄金分割搜索·····217
4.4.1 数值微分的误差分析·····137	7.2.2 抛物线插值·····222
4.4.2 数值误差的控制·····139	7.2.3 MATLAB 函数: fminbnd·····224
4.5 粗差、模型误差和 数据不确定性·····140	7.3 多维最优化·····225
4.5.1 粗差·····140	7.4 案例研究: 平衡与 极小势能·····227
4.5.2 模型误差·····141	7.5 习题·····229
4.5.3 数据不确定性·····141	
4.6 习题·····141	
第 II 部分 求根与最优化	
第 5 章 求根: 划界法·····149	第 III 部分 线性方程组
提出问题·····149	第 8 章 线性代数方程和矩阵·····245
5.1 工程和科学领域中的 求根问题·····150	提出问题·····245
5.2 图形法·····151	8.1 矩阵代数概述·····247
5.3 划界法与初始猜测值·····153	8.1.1 矩阵符号·····247
5.4 二分法·····157	8.1.2 矩阵的运算规则·····249
5.5 试位法·····163	8.1.3 将线性代数方程组表示成 矩阵形式·····256
5.6 案例研究: 温室气体与 雨水·····166	8.2 用 MATLAB 求解线性 代数方程组·····257
5.7 习题·····169	8.3 案例研究: 电路中的 电流和电压·····258
第 6 章 方程求根: 开方法·····177	8.4 习题·····262
6.1 简单不动点迭代·····178	第 9 章 高斯消元法·····269
6.2 牛顿-拉弗森方法·····182	9.1 求解小型方程组·····270
6.3 割线法·····187	9.1.1 绘图法·····270
6.4 布伦特法·····189	9.1.2 行列式和克拉默法则·····271
6.4.1 逆二次插值·····189	9.1.3 未知数消元法·····274
6.4.2 布伦特法算法·····191	9.2 朴素高斯消元法·····275
6.5 MATLAB 函数: fzero·····193	9.2.1 MATLAB M 文件: GaussNaive·····278
6.6 多项式·····195	9.2.2 运算次数·····279
6.7 案例研究: 管道摩擦力·····198	9.3 选主元·····281
6.8 习题·····202	9.3.1 MATLAB M 文件: GaussPivot·····283
第 7 章 最优化·····213	9.3.2 用高斯消元法计算 行列式·····284
提出问题·····213	9.4 三对角方程组·····285
7.1 简介与背景·····214	
7.2 一维最优化·····216	

9.5 案例研究: 热杆模型	287	12.3 案例研究: 化学反应	343
9.6 习题	290	12.4 习题	345
第 10 章 LU 分解	297	第 13 章 特征值	351
10.1 LU 分解概述	298	提出问题	351
10.2 高斯消元法与 LU 分解	299	13.1 数学背景	352
10.2.1 使用选主元的 LU 分解	302	13.2 物理背景	356
10.2.2 MATLAB 函数: lu	304	13.3 幂方法	358
10.3 楚列斯基分解	305	13.4 MATLAB 函数: eig	360
10.4 MATLAB 的左除运算	308	13.5 案例研究: 特征值与 地震	362
10.5 习题	308	13.6 习题	364
第 11 章 矩阵求逆和条件数	311	第 IV 部分 曲线拟合	
11.1 矩阵的逆	311	第 14 章 线性回归	373
11.1.1 逆矩阵的计算	311	提出问题	373
11.1.2 激励-响应计算	313	14.1 统计学回顾	374
11.2 误差分析和方程组的 条件数	315	14.1.1 描述统计学	375
11.2.1 向量和矩阵 范数	316	14.1.2 正态分布	377
11.2.2 矩阵条件数	317	14.1.3 用 MATLAB 计算描述 统计学量	378
11.2.3 用 MATLAB 计算 范数和条件数	319	14.2 随机数和模拟	380
11.3 案例研究: 室内空气 污染	320	14.2.1 MATLAB 函数: rand	380
11.4 习题	323	14.2.2 MATLAB 函数: randn	383
第 12 章 迭代法	329	14.3 线性最小二乘回归	384
12.1 线性方程组: 高斯-赛德尔	329	14.3.1 “最佳”拟合条件	385
12.1.1 收敛性与对角占优	332	14.3.2 直线的最小二乘拟合	386
12.1.2 MATLAB M 文件: GaussSeidel	332	14.3.3 线性回归误差的量化	388
12.1.3 松弛法	333	14.4 非线性关系的线性化	392
12.2 非线性方程组	335	14.5 计算机应用	396
12.2.1 逐次代换法	336	14.5.1 MATLAB M 文件: linregr	396
12.2.2 牛顿-拉弗森方法	337	14.5.2 MATLAB 函数: polyfit 和 polyval	398
12.2.3 MATLAB 函数: fsolve	342	14.6 案例研究: 酶动力学	398
		14.7 习题	402

第 15 章 一般线性最小二乘回归和

非线性回归 413

15.1 多项式回归 413

15.2 多重线性回归 416

15.3 一般线性最小二乘回归 419

15.4 QR 分解与反斜杆运算符 421

15.5 非线性回归 422

15.6 案例研究: 实验数据
拟合 424

15.7 习题 427

第 16 章 傅里叶分析 435

提出问题 435

16.1 使用正弦函数进行
曲线拟合 436

16.2 连续傅里叶级数 442

16.3 频域和时域 444

16.4 傅里叶积分和变换 447

16.5 离散傅里叶变换(DFT) 447

16.5.1 快速傅里叶
变换(FFT) 44916.5.2 MATLAB 函数: `fft` 450

16.6 功率谱 452

16.7 案例研究: 太阳黑子 453

16.8 习题 455

第 17 章 多项式插值 459

提出问题 459

17.1 插值法导论 460

17.1.1 确定多项式的系数 461

17.1.2 MATLAB 函数:
`polyfit` 和 `polyval` 462

17.2 牛顿插值多项式 463

17.2.1 线性插值 463

17.2.2 二次插值 465

17.2.3 牛顿插值多项式的
一般形式 46617.2.4 MATLAB M 文件:
`Newtint` 469

17.3 拉格朗日插值多项式 470

17.4 逆插值 473

17.5 外插值和振荡 474

17.5.1 外插值 474

17.5.2 振荡 476

17.6 习题 478

第 18 章 样条和分段插值 485

18.1 样条导论 485

18.2 线性样条 487

18.3 二次样条 490

18.4 三次样条 493

18.4.1 三次样条的推导 494

18.4.2 边界条件 497

18.5 MATLAB 中的分段线性
插值 49818.5.1 MATLAB 函数:
`spline` 49918.5.2 MAYTLAB 函数:
`interp1` 500

18.6 多维插值 502

18.6.1 双线性插值 503

18.6.2 MATLAB 中的
多维插值 504

18.7 案例研究: 传热 505

18.8 习题 508

第 V 部分 积分与微分

第 19 章 数值积分公式 519

提出问题 519

19.1 导论和背景 520

19.1.1 什么是积分 520

19.1.2 工程和科学中的积分 521

19.2 牛顿-科特斯公式 523

19.3 梯形法则 524

19.3.1 梯形法则的误差 525

19.3.2 复合梯形法则 527

19.3.3 MATLAB M 文件:
`trap` 529

19.4 辛普森法则·····530	21.2 高精度微分公式·····585
19.4.1 辛普森 1/3 法则·····531	21.3 理查森外推法·····588
19.4.2 复合辛普森1/3法则·····532	21.4 不等距数据的导数·····589
19.4.3 辛普森 3/8 法则·····534	21.5 含误差数据的导数与 积分·····590
19.5 高阶牛顿-科特斯公式·····536	21.6 偏导数·····591
19.6 非等距积分·····537	21.7 用 MATLAB 计算数值 微分·····592
19.6.1 MATLAB M 文件: trapuneq·····537	21.7.1 MATLAB函数: diff·····592
19.6.2 MATLAB 函数: trapz 和 cumtrapz·····538	21.7.2 MATLAB函数: gradient·····594
19.7 开型方法·····540	21.8 案例研究: 向量场的 可视化·····596
19.8 多重积分·····541	21.9 习题·····597
19.9 案例研究: 用数值积分 计算功·····543	
19.10 习题·····546	
第 20 章 函数的数值积分·····555	第 VI 部分 常微分方程
20.1 导论·····555	第 22 章 初值问题·····613
20.2 龙贝格积分·····556	提出问题·····613
20.2.1 理查森外推法·····556	22.1 概述·····614
20.2.2 龙贝格积分公式·····558	22.2 欧拉法·····615
20.3 高斯求积·····561	22.2.1 欧拉法的误差分析·····617
20.3.1 待定系数法·····562	22.2.2 欧拉法的稳定性·····618
20.3.2 两点高斯-勒让德 公式的推导·····563	22.2.3 MATLAB 的 M 文件 函数: eulode·····619
20.3.3 更多点的公式·····566	22.3 欧拉法的改进·····620
20.4 自适应求积分·····567	22.3.1 休恩法·····620
20.4.1 MATLAB 的 M 文件: quadadapt·····567	22.3.2 中点方法·····624
20.4.2 MATLAB 函数: integral·····570	22.4 龙格-库塔方法·····625
20.5 案例研究: 均方根电流·····570	22.4.1 二阶龙格-库塔方法·····626
20.6 习题·····574	22.4.2 古典四阶龙格-库塔 方法·····627
第 21 章 数值微分·····581	22.5 方程组·····630
提出问题·····581	22.5.1 欧拉法·····630
21.1 导论和背景·····582	22.5.2 龙格-库塔方法·····631
21.1.1 什么是微分·····582	22.5.3 MATLAB 的 M 文件 函数: rk4sys·····633
21.1.2 工程和科学中的微分·····583	22.6 案例研究: 捕食者-猎物 模型与混沌·····635

22.7	习题	639	24.1.1	什么是边值问题	680
第 23 章	自适应方法和刚性		24.1.2	工程和科学中的	
	方程组	647		边值问题	681
23.1	自适应龙格-库塔方法	647	24.2	打靶法	684
23.1.1	求解非刚性方程组的		24.2.1	导数边界条件	686
	MATLAB 函数	649	24.2.2	非线性 ODE 的	
23.1.2	事件	653		打靶法	688
23.2	多步方法	655	24.3	有限差分法	690
23.2.1	非自启动休恩法	655	24.3.1	导数边界条件	692
23.2.2	误差估计	658	24.3.2	非线性 ODE 的	
23.3	刚性	659		有限差分法	694
23.4	MATLAB 应用: 带绳索的		24.4	MATLAB 函数: bvp4c	696
	蹦极运动员	664	24.5	习题	698
23.5	案例研究: 普林尼的		附录 A	MATLAB 内置函数	707
	间歇式喷泉	665	附录 B	MATLAB 的 M 文件函数	709
23.6	习题	669	附录 C	Simulink 简介	711
第 24 章	边值问题	679			
	提出问题	679			
24.1	导论和背景	680			

第 I 部分

建模、计算机与误差分析

动机

数值方法是什么，为什么要学习数值方法呢？

数值方法(numerical method)是用公式表示数学问题以便可以用算术和逻辑运算解决这些问题的技术。这是因为数字计算机擅长于执行算术和逻辑这类运算。有时，数值方法也称为计算机数学(computer mathematics)。

在计算机出现以前，实现这类计算的时间和代价严重地限制了它们的实际应用。然而，随着快速、廉价的数字计算机的出现，数值方法在工程和科学问题求解中的应用正呈爆炸式发展。由于数值方法在我们的工作中发挥着如此突出的作用，笔者相信数值方法应该成为每个工程师和科学家基础教育的一部分。正如在数学和科学的其他领域中，我们所有的人都必须具有坚实的基础一样，对于数值方法，我们也应该有一个基本的理解。尤其是对数值方法的长处和不足，我们应该有一个清楚的认识。

除了对整体教育有用之外，对于为什么应该学习数值方法，还有一些其他的理由：

(1) 数值方法能够极大地覆盖所能解决的问题类型。它们能够处理大型方程组(system of equations)、非线性和复杂几何等问题，这些在工程和科学领域中是普遍的，但用标准的微积分通过解析方法求解是不可能的。因此，学习数值方法通常可以增强问题求解技能。



(2) 数值方法可以让用户更加智慧地使用“封装过的”软件。在你的职业生涯中，总会有机会使用涉及数值方法的、经过预打包的商用计算机程序。如果对这些方法背后的基本理论有所理解，那么就可以聪明地使用这些程序。如果缺少对基本理论的理解，那么就只能把这些软件包看作“黑盒”，因此就会对内部的工作机理和它们产

生结果的优劣缺少必要的了解。

(3) 很多问题不能用封装的程序解决。如果熟悉数值方法并擅长于计算机编程的话,那么就可以设计自己的程序来解决问题,而不必购买或租用昂贵的软件。

(4) 数值方法是学习使用计算机的有效载体。因为数值方法是专门设计用于计算机实现的,对于展示计算机的强大和不足是非常理想的。当你成功地在计算机上实现了数值方法,然后将它们应用于求解其他难以处理的问题时,就可以极大地展示计算机如何为你的职业发展服务了。同时,你还会学习如何认识和控制逼近误差,这是大规模(large-scale)数值计算的组成部分,也是大规模数值计算面临的最大问题。

(5) 数值方法提供了一个能够增强对数学理解的平台。因为数值方法的一个功能是将数学从更高级的表示归约为基本的算术操作,这样就可以抓住一些非常晦涩的主题的核心(nuts and bolts)。从这个独特的角度可以让我们提高对数学问题的理解和认知。

如果将这些原因作为学习的动机,那么我们现在就可以开始去理解数值方法和数字计算机是如何共同作用来获得数学问题的可靠解的。本书剩余部分的任务就是要解决这个问题。

内容组织

本书分为六大部分。后五部分专注于数值方法的主要领域。尽管我们急于直接跳到这些部分,但第 I 部分的 4 章内容涉及一些关键的背景知识。

第 1 章给出了一个具体例子,说明如何将数值方法用于求解实际问题。为此,我们为自由落体蹦极运动员(bungee jumper)建立了一个数学模型。该模型基于牛顿第二定律,其结果是一个常微分方程(ordinary differential equation)。首先使用微积分(calculus)建立了闭型解(closed-form solution),然后说明了如何用一种简单的数值方法生成与此相当的解。最后,我们对第 II~第 VI 部分所涉及的数值方法的主要领域进行了概述。

第 2 和第 3 章介绍了 MATLAB 的软件环境。第 2 章介绍了运行 MATLAB 的标准方式,即所谓的计算器模式(calculator mode)或命令模式(command mode)。在该模式下,每次输入一个命令,然后 MATLAB 执行该命令,如此反复。这种交互模式提供了一种使用 MATLAB 环境的直接方式,并可以演示如何用它实现一般的操作,如执行计算和生成图形。

第 3 章介绍了 MATLAB 的编程模式(programming mode),用示例说明了如何利用这个平台将单个命令组织成算法。因此,我们的意图是要说明如何将 MATLAB 作为一个方便的编程环境以开发自己的软件。

第 4 章介绍了误差分析这个重要的主题,为了有效地使用数值方法,必须理解误差分析。该章前半部分集中介绍了舍入误差(roundoff error),舍入误差是由于数字计算机不能准确地表示某些值而引起的;后半部分讨论了截断误差(truncation error),截断误差缘于用近似数学过程代替精确数学过程。

第 1 章

数学建模、数值方法与问题求解

本章目标

本章的主要目标是让读者具体感受一下，什么是数值方法以及如何将它们与工程和科学问题求解联系起来。具体的目标和主题包括：

- 学习如何基于科学原理建立数学模型，进而对简单物理系统的行为进行仿真。
- 理解数值方法如何提供一种方式以便在数字计算机上求得问题的解。
- 对于工程学科中使用的各种模型，理解其背后不同类型的守恒律(conservation law)，正确评价这些模型稳态(steady-state)解和动态解间的差异。
- 学习本书中涉及的不同类型的数值方法。

提出问题

假设你受雇于某家蹦极公司。你的任务是要预测蹦极过程中在自由落体阶段蹦极运动员的速度(见图 1.1)，它是时间的函数。得到的信息可以用于更进一步的分析，如针对不同质量的蹦极运动员确定蹦极绳索的长度和必要强度。

在学习物理学的时候，已经知道加速度应该等于所受外力与质量之比(牛顿第二定律)。基于该定律和基本的物理和流体力学知识，就可以建立下面的数学模型以计算速度关于时间的变化率：

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

其中， v 为垂直向下速度(m/s)， t 为时间(s)， g 是重力加速度($\approx 9.81\text{m/s}^2$)， C_d 是集总阻力系数(kg/m)， m 为蹦极运动员的体重(kg)。将阻力系数称为“集总”，这是因为它的大小取决于一些因素，如蹦极运动员的表面积和流体密度(见 1.4 节)。

由于这是一个微分方程，因此可以用微积分求解速度 v 的解析解或精确解，它是时间 t 的函数。但是，在下面的内容中，我们将使用另外一种求解方法。这种方法会得到

面向计算机的数值解或近似解。



图 1.1 作用在自由落体蹦极运动员身上的力

除了展示如何用计算机求解这个特定的问题之外，我们更一般的目标是要展示：
①什么是数值方法；②在工程和科学问题求解中，数值方法扮演着什么样的角色。在此过程中，我们还会说明如何建立典型的数学模型，以便工程师和科学家在工作中使用数值方法。

1.1 一个简单的数学模型

在数学术语中，数学模型(mathematical model)可以广义地定义为表达物理系统或物理过程本质特性的公式或方程。从更广义的角度讲，数学模型可以表达为如下形式的函数关系式：

$$\text{应变变量} = f(\text{自变量}, \text{参数}, \text{强制函数}) \quad (1.1)$$

其中，应变变量(dependent variable)是物理系统的特征，典型反映了系统的行为或状态；自变量(independent variable)通常为维度(dimension)，如时间和空间，通过维度确定系统的行为；参数(parameter)是系统特性或构成的反映(reflective)；强制函数(forcing function)是作用在系统上的外部影响。

式(1.1)的实际数学表达式可以从简单的代数关系到大规模复杂微分方程组的所有可能情况。例如，基于自己的观察，牛顿建立了第二运动定律，表达的是物体的动量(momentum)随时间的变化率等于作用在其上的总外力。牛顿第二定律的数学表达式或模型为著名的如下方程：

$$F = ma \quad (1.2)$$

其中, F 是作用在物体上的总外力(N, 或 kg m/s^2), m 是物体的质量(kg), a 是加速度(m/s^2)。只要在方程两边同时除以 m , 就可以将牛顿第二定律变为式(1.1)的形式

$$a = \frac{F}{m} \quad (1.3)$$

其中, a 为应变量, 反映了系统的行为, F 是强制函数, m 是参数。注意, 对于这个简单的例子, 并没有自变量, 这是因为我们还没有预测加速度在时间和空间中是如何变化的。

式(1.3)具有很多特性, 是现实世界中典型的数学模型。

- 它以数学形式描述了自然的过程或系统。
- 它表示的是对现实的理想化和简化。也就是说, 该模型忽略了自然过程中微不足道的细节, 而关注于其本质表现。因此, 牛顿第二定律并不包含相对论效应(effects of relativity), 当应用于地球表面或附近相互作用的物体或力时, 以及在人类可见的速度和尺度范围内时, 相对论效应是非常微不足道的。
- 最终, 得到的结果是可再现的, 所以可以将其用于预测物体的状态。例如, 如果作用在物体上的力和物体的质量已知, 那么式(1.3)可以用于计算物体的加速度。

由于式(1.2)是一种简单的代数形式, 因此其解很容易获得。然而, 其他物理现象的数学模型可能要复杂得多, 它们要么无法获得精确解, 要么需要比简单代数更高级的数学方法才能求得它们的解。为了展示这样一个更复杂的模型, 可以用牛顿第二定律确定自由落体在到达地面时的最终速度。我们研究的落体为蹦极运动员(见图 1.1)。在该例中, 通过将加速度表示为速度随时间的变化率(dv/dt)可以推导出问题的模型, 并将其代入式(1.3), 可得:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \quad (1.4)$$

其中, v 为速度(m/s)。这样, 速度随时间的变化率就等于作用在身体上的力相对于质量的归化值(单位质量上的受力大小)。如果总作用力(net force)为 0, 那么物体的速度将保持不变。

接下来, 我们用可测变量和参数表达总作用力。对于在地球表面附近的自由落体, 总作用力由两个方向相反的力组成: 向下的地球引力 F_D 和向上的大气阻力 F_U (见图 1.1):

$$F = F_D + F_U \quad (1.5)$$

如果将向下的力指定为正, 那么可以用牛顿第二定律将万有引力表示为:

$$F_D = mg \quad (1.6)$$

其中, g 为万有引力引起的加速度(9.81m/s^2)。

大气阻力可以表示为多种形式。根据流体力学的知识可知, 较好的一阶近似是近似值与速度平方成比例:

$$F_U = -c_d v^2 \quad (1.7)$$

其中, c_d 为比例常数, 称为集总阻力系数(lumped drag coefficient)(kg/m)。这样, 下降速度越快, 大气阻力导致的向上力越大。 c_d 是说明落体属性的参数, 如物体形状或表面粗糙度, 这些参数会影响到大气阻力。在蹦极的例子中, c_d 可能是自由下降过程中蹦极运动员的衣着类型或身体方向。

总作用力是向下力与向上力之差。因此, 结合式(1.4)~式(1.7)可得:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2 \quad (1.8)$$

式(1.8)中的模型将落体的加速度与作用在其上的力关联起来。这是一个微分方程, 因为该方程将预测中我们感兴趣的变量表示为变量的微分变化率(differential rate of change)。然而, 与式(1.3)中通过牛顿第二定律得到的解相比, 式(1.8)中蹦极运动员速度的精确解不能通过简单的代数运算获得。但是, 像微积分那样更高级的方法可以用于求得其精确解或解析解。例如, 如果蹦极运动员初始为静止状态($t=0$ 时 $v=0$), 那么可以用微积分求得式(1.8)的解为:

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} t\right) \quad (1.9)$$

其中, $\tanh$ 为双曲正切(hyperbolic tangent)函数, 可以直接计算¹或通过更基本的指数函数计算:

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (1.10)$$

注意, 式(1.9)是式(1.1)的一种特殊形式, 其中 $v(t)$ 是应变量, t 为自变量, c_d 和 m 为参数, g 为强制函数。

例 1.1 蹦极问题的解析解

问题描述: 一个质量为 68.1kg 的蹦极运动员从一个静止的热气球上滑落。利用式(1.9)计算蹦极运动员前 12s 自由落体过程中的速度。如果所使用的绳索无限长(或蹦极运动经营者遇到了特别倒霉的一天!), 那么还可以确定蹦极运动员能达到的最终速度。假设使用的阻力系数为 0.25kg/m。

解: 将参数代入式(1.9)中可得

$$v(t) = \sqrt{\frac{9.81(68.1)}{0.25}} \tanh\left(\sqrt{\frac{9.81(0.25)}{68.1}} t\right) = 51.6938 \tanh(0.18977t)$$

1 MATLAB 准许直接通过内置函数 $\tanh(x)$ 计算双曲正切值。

利用上式计算可得：

$t(\text{s})$	$v(\text{m/s})$
0	0
2	18.7292
4	33.1118
6	42.0762
8	46.9575
10	49.4214
12	50.6175
∞	51.6938

根据该模型可知，蹦极运动员是在加速下降，其速度越来越快(见图 1.2)。在 10s 以后，蹦极运动员的速度达到了 49.4214m/s(大约 110 英里/小时)。还要注意，在经过足够长的时间以后，其速度不再变化，此时的速度称为极限速度(terminal velocity)，大约为 51.6983m/s(大约 115.6 英里/小时)。蹦极运动员的速度之所以最终变得恒定，是因为重力与大气阻力处于平衡状态。为此，蹦极运动员所受到的总作用力为 0，加速过程结束。

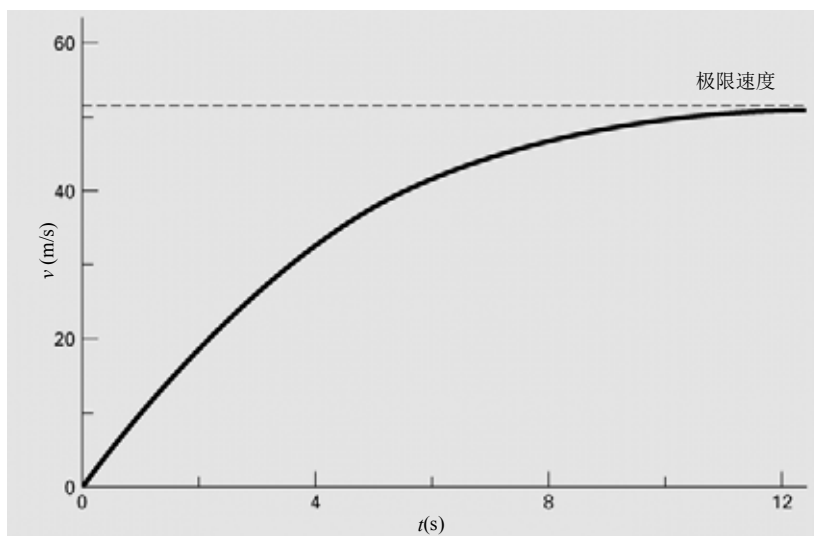


图 1.2 例 1.1 中蹦极问题解析解的计算。速度随着时间增加，并最终趋近于极限速度

式(1.9)又称为解析解(analytical solution)或闭型解(closed-form solution)，这是因为，它与初始微分方程是精确对应的。遗憾的是，有很多数学模型还不能精确地求解。遇到这种情况时，大多数情况下唯一的选择就是建立逼近精确解的数值解。

数值方法(numerical method)是一些需要对数学问题进行变换，使得可以通过算术操作进行求解的方法。对于式(1.8)求速度随时间变化率的情况，这种变换可以由图1.3所示的逼近过程说明：

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \quad (1.11)$$

其中, Δv 和 Δt 是速度和时间在有限区间上计算得到的微分, $v(t_i)$ 为初始时刻 t_i 的速度, 而 $v(t_{i+1})$ 是随后某个时刻 t_{i+1} 的速度。注意, $dv/dt \approx \Delta v / \Delta t$ 是一个近似表示, 因为 Δt 是有限的。回顾一下微分的定义:

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

式(1.11)表示的是上式的逆过程。

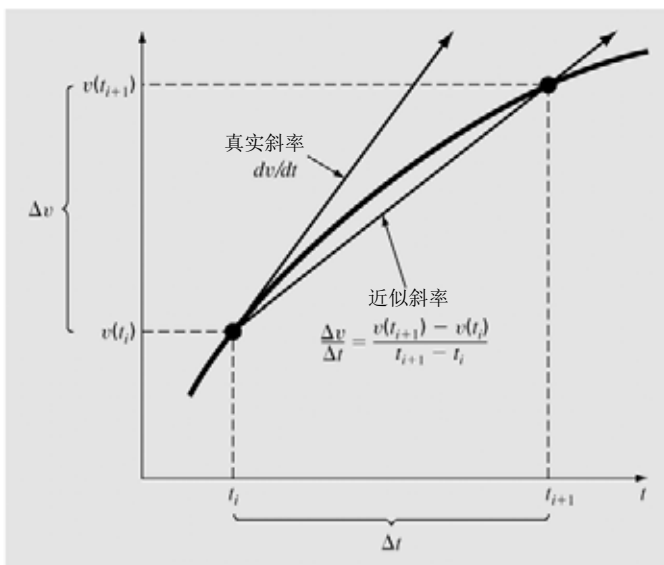


图 1.3 使用有限差分逼近 v 关于时间 t 的一阶导数

式(1.11)称为时刻 t_i 处一阶导数的有限差分逼近(finite-difference approximation)。将其代入式(1.8), 可得:

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2$$

对方程进行整理, 可得:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2 \right] (t_{i+1} - t_i) \quad (1.12)$$

注意, 括号中的项是差分方程自身[式(1.8)]的右边。这就是说, 它给出了一种计算 v 的变化率或斜率的方式。为此, 该式可以更精确地重写为:

$$v_{i+1} = v_i + \frac{dv_i}{dt} \Delta t \quad (1.13)$$

其中, v_i 表示 t_i 时刻的速度, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ 。

现在可以看到, 通过变换, 微分方程已经成为可以用代数方法确定 t_{i+1} 时刻速度的方程, 需要用到斜率和前一时刻 v 和 t 的值。如果给定速度在时刻 t_i 的初始值, 那么就可以很容易地计算得到下一时刻 t_{i+1} 的速度; 而利用新的速度值 v_{i+1} , 可以进一步计算以求得 t_{i+2} 时刻的速度, 如此反复下去。因此, 在计算过程中的任意时刻有:

新值=上一时刻的值+斜率×步长

该方法的正式称呼是欧拉法(Euler's method)。当我们进入本书后面的微分方程部分时, 还会进一步详细讨论欧拉法。

例 1.2 蹦极问题的数值解

问题描述: 执行与例 1.1 相同的计算, 但使用式(1.13)的欧拉法计算速度。计算过程中使用 2s 的步长。

解: 计算开始时($t_0=0$), 蹦极运动员的速度为 0。利用该信息和例 1.1 的参数值, 通过式(1.13)可以计算 $t_1=2s$ 时的速度:

$$v = 0 + \left[9.81 - \frac{0.25}{68.1} (0)^2 \right] \times 2 = 19.62 \text{ m/s}$$

对于下一区间(t 取 2s~4s), 重复该计算过程, 得到的结果是:

$$v = 19.62 + \left[9.81 - \frac{0.25}{68.1} (19.62)^2 \right] \times 2 = 36.4137 \text{ m/s}$$

以类似的模式计算可以得到其他的值:

$t(s)$	$v(m/s)$
0	0
2	19.6200
4	36.4137
6	46.2983
8	50.1802
10	51.3123
12	51.6008
∞	51.6938

在图1.4中同时画出了表中的结果和精确的解析解。我们可以看到, 数值方法抓住了精确解析解的本质特征。然而, 由于我们是用直线段来逼近连续的曲线函数, 因此两种

结果之间还是存在一定的差异。为了缩小这种差异，一种方式是使用更小的步长。例如，应用式(1.12)，在采用的步长为1s时，所得结果的误差会变小，因为直线段连成的轨迹更接近真实解。手工计算时，使用越来越小的步长进行求解所需付出的工作量也会越来越大，这使得求数值解变得不切实际。然而，在计算机的辅助下，就可以很容易地完成大量的计算。为此，我们可能要精确地对蹦极运动员的速度建模，但却不必精确地求解微分方程。

与例 1.2 一样，为了得到更加准确的数值解，也必须付出一定的计算代价。为了获得更高的求解精度，可以将步长不断减半，但每次将步长减半都会导致计算量的翻倍。因此，我们应该明白，在准确度与计算代价之间需要进行权衡。类似的权衡在数值方法中有很多，这也构成了本书一条重要的主线。

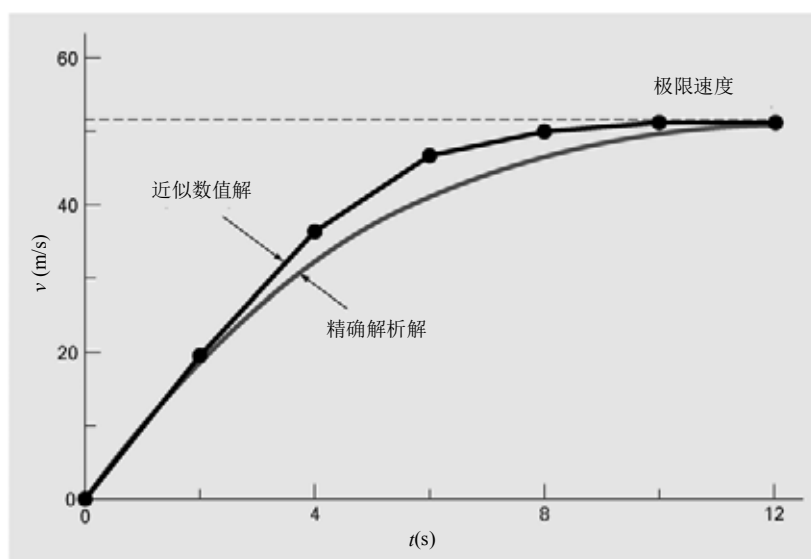


图 1.4 蹦极问题数值解与解析解的比较

1.2 工程与科学中的守恒律

除了牛顿第二定律外，科学与工程领域中还存在很多其他的主要组织原理。其中最重要的就是守恒律(conservation laws)。尽管它们构成了各种复杂和强大数学模型的基础，但大多数科学和工程守恒律在概念上是易于理解的。它们都可以归结为：

$$\text{变化量} = \text{增加量} - \text{减少量} \quad (1.14)$$

当使用牛顿定律建立蹦极运动员的力平衡时，我们采用的正好就是这样的格式[式(1.8)]。

尽管式(1.14)很简单，但它却体现了工程和科学中使用守恒律的一种最基本方式——预测关于时间的变化量。我们还赋予它一个特定的名称——时变(time-variable)(或称瞬时)计算。

除了预测变化量之外，应用守恒律的另外一种方式是针对没有变化的情况。如果变化量为 0，那么式(1.14)变为：

$$\text{变化量}=0=\text{增加量}-\text{减少量}$$

或

$$\text{增加量}=\text{减少量} \quad (1.15)$$

这样，如果变化量没有变化，那么增加量与减少量就必须保持平衡。这种情况在工程与科学领域中有很多应用，它也被赋予了一个特定的名字——稳态(steady-state)计算。例如，对于管道中的稳态不可压液体流，进入节点(junction)的流量必须与流出节点的流量保持平衡，如下：

$$\text{流入} = \text{流出}$$

对于图 1.5 中的节点，可以利用平衡来计算第四个管道的流出量，结果必为 60。

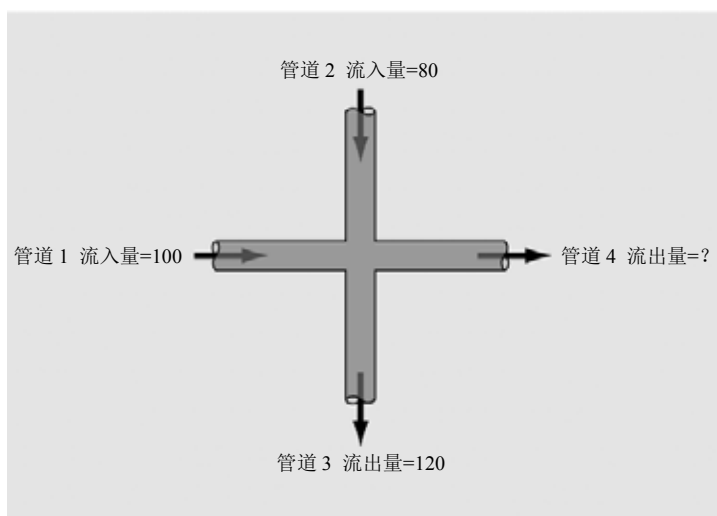


图 1.5 在管道连接处的稳定不可压液体流的流平衡

对于蹦极的例子而言，稳态条件对应于合力为 0 或[式(1.8)中 $dv/dt=0$]的情况：

$$mg = c_d v^2 \quad (1.16)$$

为此，在稳态下，向下和向上的力处于平衡，求解式(1.16)，可得速度：

$$v = \sqrt{\frac{gm}{c_d}}$$

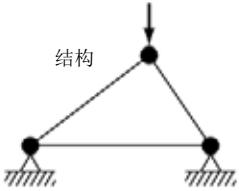
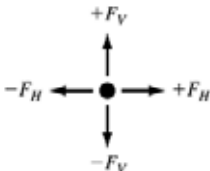
尽管式(1.14)和式(1.15)的形式可能相当简单，但它们体现了工程和科学领域中应用守恒律的两种基本方式。同样地，它们还是后续章节内容的重要组成部分，这些章节以示例的方式介绍了数值方法与工程和科学问题的衔接方式。

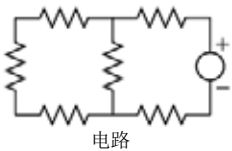
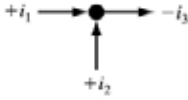
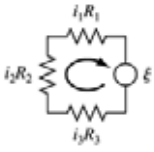
表 1.1 对工程领域中的一些重要的模型和相关守恒律进行了总结。很多化学工程问题涉及反应器中的质量平衡。质量平衡来自于质量守恒。质量守恒指出，反应器中化学物质的质量变化依赖于流进质量与流出质量之差。

土木工程师(civil engineer)和机械工程师(mechanical engineer)通常对利用动量守恒建立的模型感兴趣。对于土木工程师而言，力平衡通常用于分析表 1.1 中简单支架(truss)这样的结构。同样的原理还可以用于机械工程的案例研究，以分析汽车瞬时的上下运动或振动(vibration)。

最后，电子工程研究同时应用电流和能量平衡对电子线路建模。电流平衡(源于电荷守恒)在本质上类似于图 1.5 描述的流平衡。正如流在管道连接处必须保持平衡一样，电流在电子线路的连接处也必须保持平衡。能量平衡是指，在电路的任何环路中，电压变化量的和必须等于 0。

表 1.1 在四个主要工程领域中常用的平衡设备和类型。对于每个领域，平衡所依赖的守恒律是与特定领域相关的

领 域	设 备	组 织 原 理	数 学 表 达
化学工程	 反应器	质量守恒	质量平衡：  输入 → 输出 在一个单位时间周期内 $\Delta \text{质量} = \text{输入} - \text{输出}$
土木工程	 结构	力矩守恒	力平衡：  在每个节点上 $\Sigma \text{水平力}(F_H) = 0$ $\Sigma \text{垂直力}(F_V) = 0$
机械工程	 机器	力矩守恒	力平衡：  向上的力 $-x=0$ 向下的力 $m \frac{d^2x}{dt^2} = \text{向下的力} - \text{向上的力}$

(续表)			
领 域	设 备	组 织 原 理	数 学 表 达
电子工程		电荷守恒	电流平衡：  对于每个节点有： $\sum \text{电流}(i)=0$
		能量守恒	电压平衡：  沿着每个环路 $\sum \text{电压源的电势} - \sum \text{电阻上的压降}=0$ $\sum \xi - \sum iR = 0$

注意，除了化学、土木、电子和机械工程以外，还存在很多其他的学科分支。这些分支很多都与这四大领域有关。例如，化学工艺在环境、石油和生物医学工程领域中应用广泛。类似地，航空航天工程与机械工程也有很多共同点。笔者在后面的内容中将尽可能地介绍一些这方面的例子。

1.3 本书中涉及的数值方法

本章是全书的简介部分，我们之所以选择欧拉法，是因为它是很多其他类型数值方法的典型。从本质上讲，大多数数值方法都需要将数学操作变换为简单类型的代数或逻辑操作，这些操作与数字计算机是兼容的。图 1.6 总结了本书中涉及的主要领域。

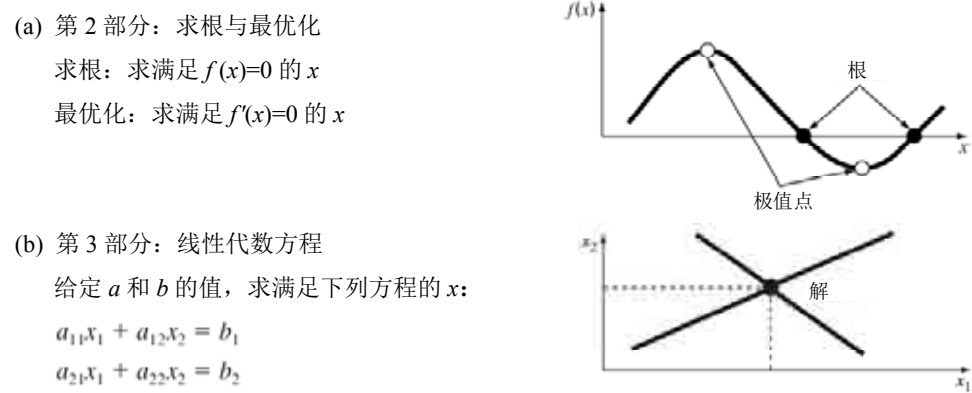
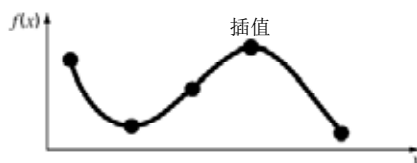
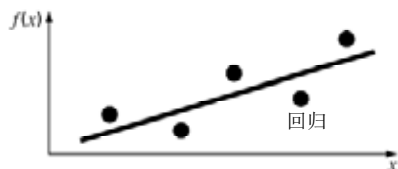


图 1.6 本书中所涉及的数值方法总结

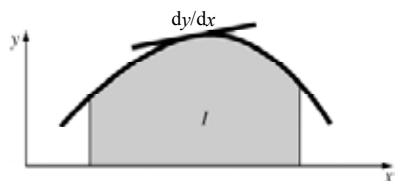
(c) 第4部分：曲线拟合



(d) 第5部分：积分与微分

积分：求曲线下方的面积

微分：求曲线的斜率



(e) 第6部分：微分方程

给定：

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = f(t, y)$$

求 t 的函数 y ：

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t$$

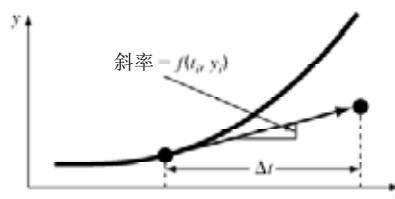


图 1.6(续)

第2部分涉及两个主题：方程求根与最优化。如图1.6(a)所示，求根(root location)需要搜索函数的零值点。相比之下，最优化(optimization)需要确定自变量的一个或多个值，它或它们对应于函数的“最好”或最优值。因此，与图1.6(a)一样，最优化需要找到极大值和极小值。尽管使用的方法有所不同，但是求根与最优化在设计领域都是典型的应用。

第3部分专门介绍如何求解联立的线性代数方程组(system of simultaneous linear algebraic equations)[见图1.6(b)]。这类方程组本质上类似于方程求根，因为它们都关心满足方程的值。然而，与满足单一方程相比，方程组需要找到一组同时满足这组代数方程的值。在各种问题环境下和所有的工程与科学领域中都可能遇到这类方程。尤其是，它们来源于对由互联元素组成的大系统建立的数学建模，如结构体、电子线路和流网络。当然，在数值方法的其他领域中也可能会遇到这类方程组，如曲线拟合和微分方程。

作为一名工程师或科学家，会经常遇到用曲线对数据点进行拟合的情况。用于这种方法的方法可以分为两大类：回归与插值。与第4部分描述的一样[见图1.6(c)]，当要处理的数据存在显著误差时就要用到回归(regression)。实验数据通常就是这样。在这种情况下，使用的策略是推导出一条代表这些数据的总体趋势的曲线，但是不要求曲线通过任何单个数据点。

相比之下，当目标是确定相对来讲没有误差的数据点之间的过渡值时，就需要插值(interpolation)。列表信息(tabulated information)通常就是这种情况。在这种情况下，使用的策略就是拟合一条直接通过这些数据点的曲线，并利用得到的曲线预测中间值。

与图1.6(d)描述的一样，第5部分主要讨论积分与微分。数值积分(numerical integration)的物理解释就是确定曲线之下的面积。积分在工程与科学领域具有广泛的应用，包括各类应用，从确定不规则形状物体的质心到计算基于一组离散测量值的总质量。另外，数

值积分公式在求解微分方程方面发挥着重要作用。第5部分还涉及一些用于解决数值微分(numerical differentiation)的方法。与学习微积分时所知道的一样,数值微分需要确定函数的斜率或变化率。

最后,第6部分主要集中于常微分方程(ordinary differential equation)[见图1.6(e)]。这些方程在所有的工程与科学领域中都是非常重要的。这是因为,很多物理定律都是用物理量的变化率表达的,而不是用物理量本身的大小来表达。这样的例子很多,包括从生育预测模型(生育变化率)到落体的加速度(速度的变化率)。需要解决两种类型的问题:初值(initial-value)问题和边值(boundary-value)问题。

1.4 案例研究

真正的阻力

背景:在自由落体蹦极运动员模型中,我们假定阻力取决于速度的平方(式1.7)。最初由瑞利爵士(Lord Rayleigh)阐述的更为详细的表达式,可以写成:

$$F_d = -\frac{1}{2} \rho v^2 A C_d \vec{v} \quad (1.17)$$

其中 F_d = 阻力(N), ρ = 流体密度(kg/m^3), A = 垂直于运动方向平面上物体的正面面积(m^2), C_d = 无量纲阻力系数, $\vec{v}$ = 指示了速度方向的单位向量。

这种假定了湍流条件(即高雷诺数)的关系,允许我们以一种更基本的方式,表达式(1.7)中的集总阻力系数,如下所示:

$$c_d = \frac{1}{2} \rho A C_d \quad (1.18)$$

因此,集总阻力系数取决于物体的面积、流体密度和无量纲阻力系数。后一个公式,考虑了对空气阻力有贡献的所有其他因素,如物体的“粗糙度”。例如,穿着宽松装备的运动员将比穿着时尚连身衣的运动员,集总阻力系数 C_d 比较高。

注意,对于速度非常低的情况,物体周围的流动状态呈现出层流,并且阻力与速度之间的关系变成了线性关系。这就是所谓的斯托克斯阻力。

在建立蹦极模型时,我们假设向下的方向为正。因此,式(1.7)是式(1.17)的精确表示,此时 $\vec{v} = +1$, 阻力为负。于是,阻力减小了速度。

但是,如果运动员具有向上(即负)速度,会发生什么情况?在这种情况下, $\vec{v} = -1$, 式(1.17)产生正阻力。同样,在物理学上,这是正确的,因为正阻力向下作用,与向上的负速度相反。

遗憾的是,在这种情况下,因为式(1.7)不包括单位方向向量,因此得到了负阻力。换句话说,将速度进行平方,其符号和方向就会丢失。因此,在物理上,这个模型产生了不切实际的结果,空气阻力起到加速向上、提高速度的作用!

在这个案例研究中,我们将修改模型,使其同时适用于向下和向上的速度。我们将

使用与例 1.2 中相同的情况，初始值为 $v(0)=-40$ m/s，测试修正后的模型。此外，我们还将说明如何扩展数值分析，确定运动员的位置。

解：做出以下简单修改，就允许将符号并入阻力中

$$F_d = -\frac{1}{2} \rho v |v| A C_d \quad (1.19)$$

或根据集总阻力：

$$F_d = -c_d v |v| \quad (1.20)$$

因此，待求解的微分方程是：

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v |v| \quad (1.21)$$

为了确定运动员的位置，我们认识到行驶距离 $x(\text{m})$ 与速度有关：

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (1.22)$$

与速度相反，这个公式假设向上的位移为正。使用与式(1.12)相同的方式，这个方程可以用欧拉法进行数值积分：

$$x_{i+1} = x_i + v(t_i) \Delta t \quad (1.23)$$

假设运动员的初始位置定义为 $x(0)=0$ ，并且使用例 1.1 和例 1.2 中的参数值，在 $t=2\text{s}$ 时，速度和距离可以使用下式计算：

$$v(2) = -40 + \left[9.81 - \frac{0.25}{68.1} (-40)(40) \right] 2 = -8.6326 \text{ m/s}$$

$$x(2) = 0 - (-40)2 = 80 \text{ m}$$

请注意，如果我们使用不正确的阻力公式，结果将得到 -32.1274 m/s 和 80 m。

在下一个间隔中($t=2\text{s}$ 至 4s)，我们可以重复此计算：

$$v(4) = -8.6326 + \left[9.81 - \frac{0.25}{68.1} (-8.6326)(8.6326) \right] 2 = 11.5346 \text{ m/s}$$

$$x(4) = 80 - (-8.6326)2 = 97.2651 \text{ m}$$

不正确的阻力公式得到 -20.0858m/s 和 144.2549m 。

继续进行计算，结果如图 1.7 所示，并且也显示了使用不正确阻力模型所获得的结果。请注意，采用正确的公式，阻力一直在降低速度，速度减小得更快。

随着时间的推移，最终两种速度都是向下的，因此它们都收敛于相同的极限速度，在这种情况下，式(1.7)是正确的。但是，对于高度的预测，错误式子产生的影响则非常明显，在错误的阻力情况下，得到的轨迹高得多。

这个案例研究证明了正确物理模型的重要性。在某些情况下，解决方案将产生明显不现实的结果。由于我们没有视觉证据表明错误的解是不对的，因此当前的示例隐藏相对较深。也就是说，不正确的解“看起来”非常合理。

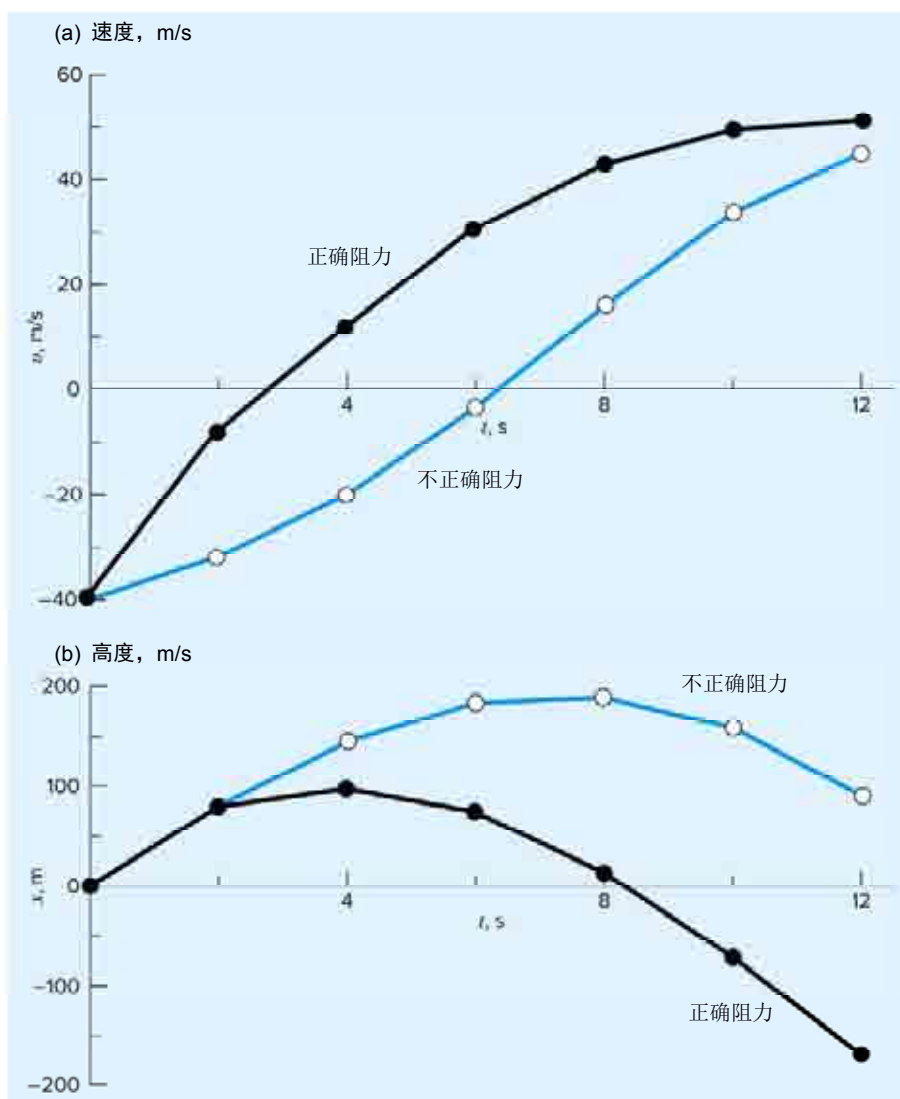


图 1.7 对于具有向上(负)初始速度的自由落体蹦极运动员,使用欧拉法得到的速度和高度的示意图。图中同时显示了使用正确(式 1.20)和不正确(式 1.7)阻力公式得到的结果

1.5 习题

1.1 用微积分验证式(1.9)是初始条件 $v(0) = 0$ 的式(1.8)的解。

1.2 在(a)初始速度为正和(b)初始速度为负的情况下,使用微积分求解式 (1.21)。(c) 根据(a)和(b)的结果,在初始速度为-40 m/s,以 2s 为时间间隔的情况下,执行与例 1.1 中相同的计算,计算 $t=0$ 至 12s 的速度值。请注意,这种情况下,在 $t=3.470239$ s 时,速度为零。

1.3 表 1.2 是关于银行账户的信息。

表 1.2 银行账户信息

日 期	存 入	提 取	结 余
5/1			1512.33
	220.13	327.26	
6/1			
	216.80	378.61	
7/1			
	450.25	106.80	
8/1			
	127.31	350.61	
9/1			

请注意，赚取的利息，用下式计算：

$$\text{Interest} = iB_i$$

其中 i 是以每月百分比表示的利率， B_i 是月初初始余额。

- (a) 如果利率为每月 1% ($i = 0.01/\text{月}$)，使用现金守恒来计算日期 6/1、7/1、8/1 和 9/1 的结余。写出计算过程的每个步骤。
- (b) 用以下形式，写出现金守恒的微分方程式：

$$\frac{dB}{dt} = f[D(t), W(t), i]$$

其中 t = 时间(月)； $D(t)$ = 存款(\$ / 月)，是时间的函数； $W(t)$ = 提款(\$ / 月)，也是时间的函数。对于这种情况，我们假设使用的是复利；即利息 = iB 。

- (c) 使用欧拉法，模拟余额，时间步长为 0.5 个月。假设在一个月内存款和取款始终如一。
- (d) 画出(a)、(c)的余额随时间变化的曲线。

1.4 重复例 1.2。计算 $t=12\text{s}$ 的速度，分别使用步长：(a)1s 和(b)0.5s。基于计算结果，能够给出关于计算误差的评论吗？

1.5 除了式(1.7)的非线性关系外，还可以选择将作用在蹦极运动员身上的向上力建模为线性关系：

$$F_U = -c'v$$

其中， c' = 一阶阻力系数(kg/s)。

- (a) 当蹦极运动员初始状态为静止($t=0$ 时, $v=0$)时，使用微积分学知识求此情况下的闭型解。
- (b) 重复例 1.2 中的数值计算，使用同样的初始条件和参数值。 c' 的值取 11.5kg/s。

1.6 对于具有线性阻力系数的自由落体蹦极运动员(习题 1.5)，假定第一名蹦极运动

员的体重是 70kg，阻力系数为 12kg/s。如果第二名蹦极运动员的阻力系数为 15kg/s，体重为 80kg，那么需要多久才能达到第一名蹦极运动员在 9s 时的速度？

1.7 对于二阶阻力系数模型(式1.8)，用欧拉法计算自由落体跳伞者的速度，其中 $m=80\text{kg}$ ， $c_d=0.25\text{kg/m}$ 。使用步长 1s 计算从 $t=0\text{s}$ 到 $t=20\text{s}$ 跳伞者的速度。使用的初始条件为：跳伞者在 $t=0$ 时具有向上的速度，大小为 20m/s。在 $t=10\text{s}$ 时，假定降落伞瞬时打开，使得跳伞者的阻力系数跳跃至 1.5kg/m。

1.8 封闭反应堆中均匀分布放射性污染物的量是通过测量其浓度 c (贝可/升或 Bq/L) 计算得到的。污染物按照与其浓度成比例的衰减速度减少，即：

$$\text{衰减率} = -kc$$

其中 k 为常数，单位为 1/日(day^{-1} ，简写为 d^{-1})。所以，根据式(1.14)，该反应堆的质量平衡可以表示为：

$$\frac{dc}{dt} = -kc$$

(质量的变化)=(衰减的减少)

- 使用欧拉法求解该方程，其中 t 从 0 到 1d， $k=0.175\text{d}^{-1}$ 。使用步长 $\Delta t=0.1\text{d}$ 。 $t=0$ 时刻的浓度为 100Bq/L。
- 在半对数(semilog)图($\ln c$ 随 t 的变化)上画出其解，并确定斜率。对得到的结果进行解释。

1.9 存储罐(见图 1.8)盛有深度为 y 的液体。当存储罐半满时， $y=0$ 。为了满足应用要求，液体须以恒定流速 Q 流出，并以正弦曲线速率 $3Q\sin^2(t)$ 注入存储罐。对于该系统，式(1.14)可以写为：

$$\frac{d(Ay)}{dt} = 3Q\sin^2(t) - Q$$

(所盛液体变化率)=(流入量) - (流出量)

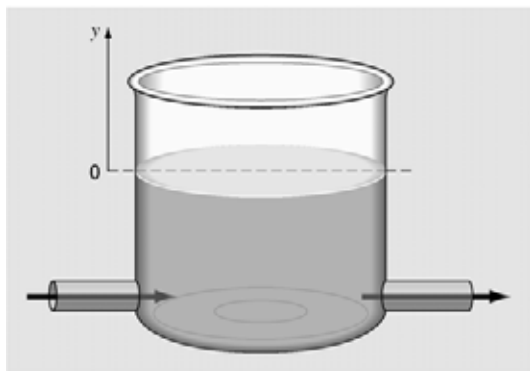


图 1.8 存储罐

或者, 因为表面积 A 为常数, 所以有:

$$\frac{dy}{dt} = 3\frac{Q}{A}\sin^2(t) - \frac{Q}{A}$$

使用欧拉法求解从 $t=0$ 到 $t=10d$ 存储罐中液体的深度 y , 步长采用 $0.5d$ 。参数值为 $A=1250m^2$, $Q=450m^3/d$ 。假定初始条件为 $y=0$ 。

1.10 使用与习题 1.9 中描述的相同的存储罐, 假定出流不是恒定的, 而是依赖于所盛液体的深度。对于这种情况, 深度的微分方程可以写为:

$$\frac{dy}{dt} = 3\frac{Q}{A}\sin^2(t) - \frac{\alpha(1+y)^{1.5}}{A}$$

使用欧拉法求解从 $t=0$ 到 $t=10d$ 存储罐中液体的深度 y , 步长为 $0.5d$ 。参数值为 $A=1250m^2$, $Q=450m^3/d$, $\alpha=150$ 。假设初始条件为 $y=0$ 。

1.11 应用体积守恒(参见习题 1.9)来模拟锥形存储罐中液体的液位(见图 1.9)。

液体以 $Q_{in} = 3\sin^2(t)$ 正弦速率流入, 流出速率如下所示:

$$\begin{aligned} Q_{out} &= 3(y - y_{out})^{1.5} & y > y_{out} \\ Q_{out} &= 0 & y \leq y_{out} \end{aligned}$$

其中流量单位为 m^3/d , y = 水面到水箱底部之间的高度(m)。使用欧拉法求解高度 y , 其中, $t=0$ 到 $10d$, 步长为 $0.5d$ 。参数值为 $r_{top} = 2.5m$, $y_{top} = 4m$, $y_{out} = 1m$ 。假设最初水平面低于出口管, $y(0) = 0.8m$ 。

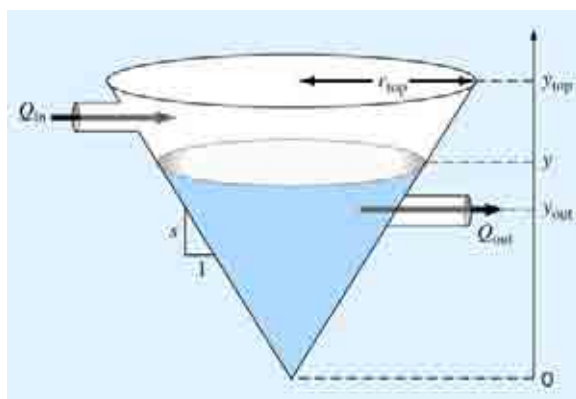


图 1.9 锥形存储罐

1.12 一组学生(35 个)在一间教室里上课, 教室的空间大小为 $11m \times 8m \times 3m$ 。每个学生占用大约 $0.075m^3$, 释放大约 $80W$ 的热量($1W=1J/s$)。如果教室是完全密封和隔热的, 计算上课的前 15 分钟空气温度的上升量。假设空气的热容量 C_v 为 $0.718kJ/(kgK)$ 。假定空气为 $20^\circ C$ 、 $101.325kPa$ 的理想气体。注意, 空气吸收的热量 Q 是与空气的质量 m 和热容量、温度变化量有关的, 关系如下:

$$Q = m \int_{T_1}^{T_2} C_v dT = m C_v (T_2 - T_1)$$

空气质量可由下面的理想气体定律得到：

$$PV = \frac{m}{M_{wt}} RT$$

其中， P 为气体压强， V 为气体体积， M_{wt} 为气体分子重量(对于空气而言，为 28.97kg/kmol)， R 为理想气体常数[$8.314\text{kPa m}^3/(\text{kmol K})$]。

1.13 图 1.10 描述了一天中普通人通过各种途径获取和失去的水分。1 升水是通过食物摄入的，身体的新陈代谢产生了 0.3 升水。在呼吸空气时，在吸气时交换量为 0.05 升，而在呼气时的交换量为 0.4 升。身体还会通过出汗、小便、大便和通过皮肤分别失去 0.2 升、1.4 升、0.2 升和 0.35 升的水。为了保持稳定状态，每天必须摄入多少水？

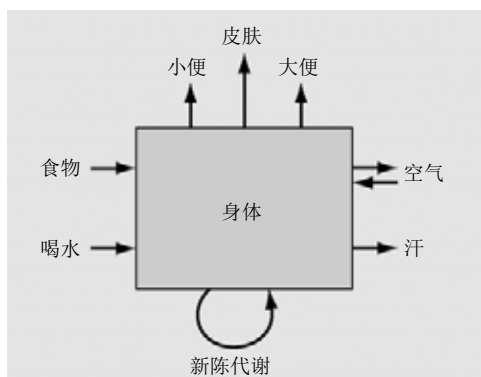


图 1.10 人的新陈代谢

1.14 在自由落体跳伞者的例子中，假定由重力引起的加速度为常数 9.81m/s^2 。尽管我们考察地表附近的落体时，这是十分合宜的近似，但引力会随着我们离开海平面而减小。更一般的表示基于牛顿万有引力逆平方律(inverse square law)，可以表示为：

$$g(x) = g(0) \frac{R^2}{(R+x)^2}$$

其中， $g(x)$ =高度 x (以 m 为单位)处的重力加速度，从地面向上度量(m/s^2)， $g(0)$ =地球表面附近的重力加速度($\cong 9.81\text{m/s}^2$)， R =地球半径($\cong 6.37 \times 10^6\text{m}$)。

- 以类似于式(1.8)的推导模式，使用力平衡推导一个作为时间函数的速度的微分方程，该函数利用了这个更加完整的重力表示。然而，在推导过程中，假定向上的加速度为正。
- 对于阻力可以忽略的情况，使用链规则(chain rule)将微分方程表示为高度的函数而不是时间的函数。回顾一下，链规则为：

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

- (c) 利用微积分学知识推导得到闭型解, 其中 $x=0$ 处的速度为 $v=v_0$ 。
- (d) 使用欧拉法求从 $x=0$ 到 $x=100000\text{m}$ 的数值解, 使用步长 10000m , 其中初始速度为 1500m/s , 方向向上。对得到的结果与解析解进行比较。

1.15 假设圆形液滴的蒸发速度与其表面积成正比, 即:

$$\frac{dV}{dt} = -kA$$

其中, V =体积(mm^3), t =时间(min), k =蒸发速度(mm/min), A =表面积(mm^2)。使用欧拉法计算从 $t=0$ 到 $t=10\text{min}$ 液滴的体积, 使用步长 0.25min 。假定 $k=0.08\text{mm/min}$, 液滴初始时的半径为 2.5mm 。确定最终计算所得液滴体积对应的半径, 并验证是否与蒸发速度一致以分析结果的有效性。

1.16 如图 1.11 所示, 将液体泵到网络中。如果 $Q_2=0.7\text{m}^3/\text{s}$ 、 $Q_3=0.5\text{m}^3/\text{s}$ 、 $Q_7=0.1\text{m}^3/\text{s}$ 、 $Q_8=0.3\text{m}^3/\text{s}$, 求出其他的流量。

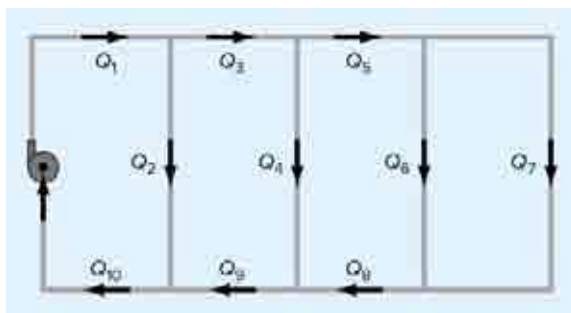


图 1.11 将液体泵到网络中

1.17 牛顿冷却定律表明, 物体温度的变化率与自身温度及其周围介质温度(环境温度)的差成正比, 即:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

其中, T =物体的温度($^{\circ}\text{C}$)。 t =时间(min), k =比例常数(min^{-1}), T_a =环境温度($^{\circ}\text{C}$)。假定有一杯咖啡, 其初始温度为 70°C 。使用欧拉法计算从 $t=0$ 到 20min 区间内咖啡的温度, 步长使用 2min , 其中 $T_a=20^{\circ}\text{C}$, $k=0.019/\text{min}$ 。

1.18 作为犯罪现场调查员, 必须预测在5小时内, 凶杀案受害者的体温。你知道, 当受害者的尸体被发现时, 房间温度为 10°C 。

- (a) 使用牛顿冷却定律(见习题 1.17)和欧拉法, 并且使用 $k = 0.12/\text{hr}$ 和 $\Delta t = 0.5\text{hr}$ 的值, 计算 5 个小时内受害者的体温。假设受害者在死亡时的体温为 37°C , 在这 5 个小时内, 室温为恒定值 10°C 。
- (b) 进一步调查显示, 室温在 5 小时内, 实际上已从 20°C 线性下降至 10°C 。重复在 (a) 中相同的计算, 但是要纳入这个新信息。
- (c) 通过将(a)和(b)的结果绘制在同一幅图中来比较它们。

1.19 速度等于距离 $x(\text{m})$ 的变化率:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \quad (1.24)$$

使用欧拉法, 对式(1.23)和式(1.8)进行数值积分, 为了同时确定速度和下落距离这两个值, 将速度和下落距离作为自由落体前 10 秒的时间函数, 并使用与例 1.2 相同的参数和条件来绘制结果。

1.20 除了受到向下的重力(重量)和阻力之外, 在流体中穿梭, 落下的物体也受到浮力, 这个浮力与排出体积成正比(阿基米德原理)。例如, 对于直径为 $d(\text{m})$ 的球体, 球的体积为 $V = \pi d^3/6$, 投影面积为 $A = \pi d^2/4$ 。因此, 浮力为 $F_b = -\rho V g$ 。在推导式(1.8)时, 我们忽略了浮力。这是因为, 对于一个像蹦极运动员的物体而言, 在空气中移动, 浮力较小。但是, 对于像水一样的更致密的流体而言, 浮力会变得比较重要。

- 使用与推导方程(1.8)相同的方式, 推导微分方程, 但是要包括浮力, 并用 1.4 节的描述表示阻力。
- 对于球体的特殊情况, 重写习题(a)的微分方程。
- 使用习题(b)中建立的方程, 计算极限速度(即稳态情况)。对球体在水中因重力而下落的情况, 使用下列参数: 球直径 = 1cm, 球密度 = 2700kg/m³, 水密度 = 1000kg/m³, $C_d = 0.47$ 。
- 使用欧拉法, 步长 $\Delta t = 0.03125\text{s}$, 初始速度为零, 对于从 $t = 0$ 至 0.25s 的速度, 进行数值求解。

1.21 正如 1.4 节所述, 假设在湍流条件(即高雷诺数)下, 阻力的基本表示可以写为:

$$F_d = -\frac{1}{2} \rho A C_d v |v|$$

其中 F_d = 阻力(N), ρ = 流体密度(kg/m³), A = 垂直于运动方向平面上物体的正面面积(m²), v = 速度(m/s)而 C_d = 无量纲阻力系数。

- 写出速度和位置的微分方程组(参见习题 1.19), 描述直径为 $d(\text{m})$, 密度为 $\rho_s(\text{kg/m}^3)$ 球体的垂直运动。速度的微分方程应该写为球体直径的函数。
- 使用欧拉法, 步长 $\Delta t = 2\text{s}$, 计算球体在前 14 秒内的位置和速度。在计算中采用以下参数: $d = 120\text{cm}$, $\rho = 1.3\text{kg/m}^3$, $\rho_s = 2700\text{kg/m}^3$, $C_d = 0.47$ 。假设球体的初始条件为: $x(0) = 100\text{m}$, $v(0) = -40\text{m/s}$ 。
- 绘制结果(例如, y 和 v 随 t 变化的曲线), 并使用图像法估计球体何时落地。
- 计算二阶阻力系数的值, $c_d'(\text{kg/m})$ 。请注意, 在最终的速度微分方程中, 二阶阻力系数是乘以项 $v|v|$ 的项。

1.22 如图 1.12 所示, 沉降在静态流体中的球形颗粒受到三种力: 向下的重力(F_G), 向上的浮力(F_B)和阻力(F_D)。重力和浮力都可以用牛顿第二定律计算, 浮力等于排出流体的重量。对于层流而言, 阻力可以使用斯托克定律计算:

$$F_D = 3\pi\mu d v$$

其中, μ = 流体的动态粘度(N s/m²), d = 粒子的直径(m), v = 颗粒的沉降速度(m/s)。颗

粒的质量可以表示为颗粒的体积和密度 $\rho_s(\text{kg/m}^3)$ 的乘积, 排开流体的质量可以用颗粒体积和流体密度 $\rho(\text{kg/m}^3)$ 的乘积计算得到。球体积为 $\pi d^3/6$ 。此外, 层流对应于无量纲雷诺数 Re 小于 1 的情况, 其中 $\text{Re} = \rho d v / \mu$ 。

- 使用颗粒的力平衡关系, 将 dv/dt 的微分方程作为 d 、 ρ 、 ρ_s 和 μ 的函数, 求 dv/dt 的微分方程。
- 在稳态下, 使用这个方程求解颗粒的极限速度。
- 采用(b)的结果, 对于沉淀在水中的球形淤泥颗粒, 计算其极限速度(m/s): $d=10\mu\text{m}$, $\rho=1\text{g/cm}^3$, $\rho_s=2.65\text{g/cm}^3$, $\mu=0.014\text{g}/(\text{cm}\cdot\text{s})$ 。
- 检查是否为层流。
- 给定初始条件: $v(0)=0$, 使用欧拉法, 计算从 $t=2^{-15}\text{s}$ 到 2^{-18}s 的速度, 步长 $\Delta t=2^{-18}\text{s}$ 。

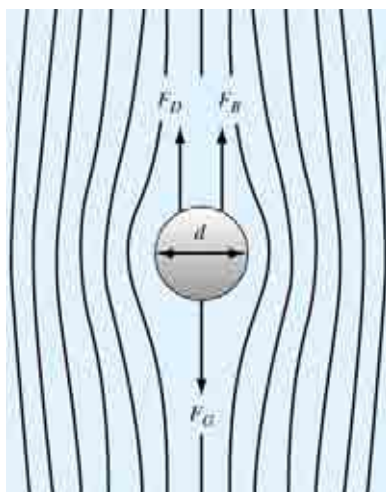


图 1.12 沉降物

1.23 如图 1.13 所示, 具有均匀载荷 $w = 10000\text{kg/m}$ 的悬臂梁的向下偏转 $y(\text{m})$, 可以用下式计算:

$$y = \frac{w}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$$

其中 x = 距离(m), E = 弹性模量 = $2 \times 10^{11}\text{Pa}$, I = 惯性矩 = $3.25 \times 10^{-4}\text{m}^4$, L = 长度 = 4m。这个方程可以进行微分, 得到作为 x 的函数的向下偏转斜率:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{24EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 12L^2x)$$



图 1.13 悬臂梁

如果在 $x=0$ 时 $y=0$ ，使用欧拉法($\Delta x=0.125\text{ m}$)和这个方程，计算从 $x=0$ 到 L 的偏转。将第一个方程得出的解析解与所得到的数值结果绘制在一起。

1.24 使用阿基米德原理，得到浮在海水中的球形冰在稳态下的力平衡关系。力平衡关系应该根据水线上方冰盖的高度(h)、海水密度(ρ_f)、球密度(ρ_s)和球半径(r)，表示为三阶多项式(立方)。

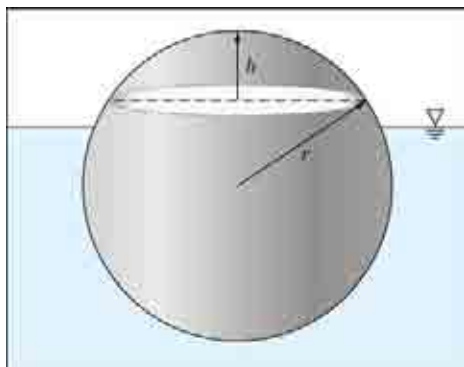


图 1.14 球形冰

1.25 阿基米德原理不仅仅可以应用于流体，当应用于地壳上的固体时，实践证明其在地质学中大有作为。图1.15描绘了一个这样的情况，其中在地球表面，较轻的锥形花岗岩“漂浮在”更致密的玄武岩层上。请注意，表面下方锥体的部分，正式称呼为平截头体(*frustum*)。在这种情况下，根据以下参数建立稳态力平衡：玄武岩密度(ρ_b)、花岗岩密度(ρ_g)、锥体底半径(r)、地球表面上方的高度(h_1)和地球表面下方的高度(h_2)。

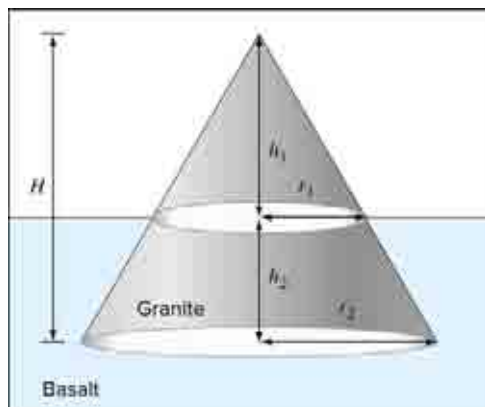


图 1.15 锥形花岗岩

1.26 如图 1.16 所示， RLC 电路由三个元件组成：电阻器(R)、电感器(L)和电容器(C)。电流流过每个元件会导致电压降。基尔霍夫的第二个电压定律表明，在闭合电路中，这些电压的代数和为零：

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

其中 i =电流， R =电阻， L =电感， t =时间， q =电荷， C =电容。此外，电流与电荷

的关系为:

$$\frac{dq}{dt} = i$$

- (a) 如果初始值为 $i(0) = 0$ 且 $q(0) = 1C$, 那么使用欧拉法, 步长 $\Delta t = 0.01$, 计算 $t = 0$ 到 $0.1s$ 时, 微分方程组的解。在计算中, 使用以下参数: $R = 200\Omega$, $L = 5H$, $C = 10^{-4}F$ 。
- (b) 绘制 i 、 q 随 t 变化的曲线。

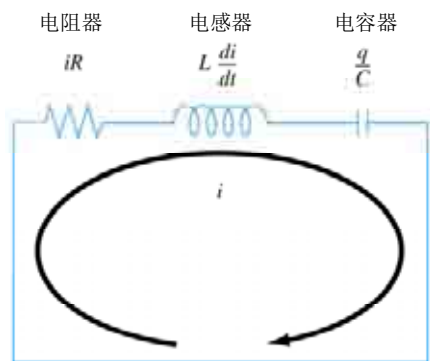


图 1.16 RLC 电路

1.27 假设具有线性阻力($m = 70kg$, $c = 12.5kg/s$)的跳伞运动员, 从飞行高度为 $200m$, 相对于地面的水平速度为 $180m/s$ 的飞机上跳下。

- (a) 为 x 、 y 、 $v_x = dx/dt$ 和 $v_y = dy/dt$, 写出具有四个微分方程的方程组。
- (b) 如果初始水平位置定义为 $x = 0$, 那么使用欧拉法, 步长 $\Delta t = 1s$, 计算跳伞运动员前 10 秒的位置。
- (c) 绘制 y 随 t 变化和 y 随 x 变化的曲线。如果降落伞未能打开, 请使用图形来估计, 跳伞运动员将在何时、何处撞击到地面。

1.28 图 1.17 显示了施加在热气球系统上的力。

热气球所受的力: F_B = 浮力, F_G = 气体重量, F_P = 有效载荷的重量(包括气球外皮), F_D = 阻力。请注意, 当气球上升时, 阻力的方向向下。

阻力公式为:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho_a v^2 A C_d$$

其中 ρ_a = 空气密度(kg/m^3), v = 速度(m/s), A = 投影的正面面积(m^2), C_d = 无量纲阻力系数(对于球体而言 $\cong 0.47$)。同时注意, 气球的总质量由两部分组成:

$$m = m_G + m_P$$

其中 m_G = 膨胀气球内气体的质量(kg), m_P = 有效载荷的质量(篮子、乘客和未膨胀气球 = $265kg$)。假设, 理想气体定律成立($P = \rho RT$), 气球是一个直径为 $17.3m$ 的完美球体, 并且球体内加热的空气与外部空气的压力大致相同。

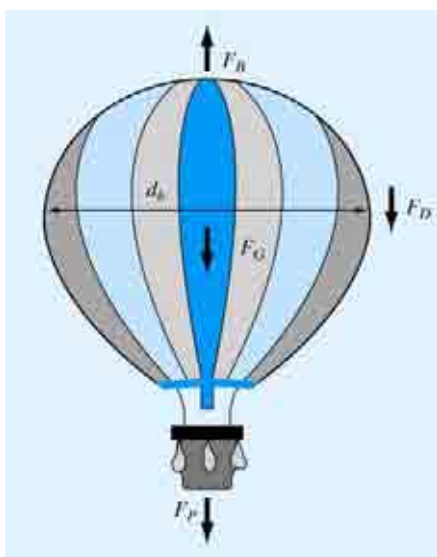


图 1.17 热气球

其他必需的参数有：

- 正常大气压, $P = 101300\text{Pa}$
- 干燥空气的气体常数 $R = 287\text{J}/(\text{kg K})$
- 将球体内的空气加热至平均温度, $T = 100^\circ\text{C}$
- 正常(环境)空气密度 $\rho = 1.2\text{kg}/\text{m}^3$ 。

- (a) 使用力平衡关系, 将 dv/dt 作为模型基本参数的函数, 得到其微分方程。
- (b) 在稳态下, 计算球体的最终速度。
- (c) 给定初始条件: $v(0) = 0$ 以及先前的参数, 使用欧拉法和 Excel, 计算从 $t = 0$ 到 60s 的速度, 其中步长 $\Delta t = 2\text{s}$ 。绘制出结果。