

# 数学建模概论

## 第 1 章

随着科学技术的迅速发展和计算机技术的突飞猛进,数学建模在社会各领域中的应用越来越广泛。例如,在生产管理方面,如何确定供求平衡状态下利润最大化的最优价格;如何解决企业库存管理问题以及如何进行人员最优调度分配等;在城市基础设施规划方面,如何制定合理的地铁和公交线路,开放小区道路是否可以缓解交通压力等问题,都可以通过建立数学模型进行分析和求解。诸如此类的还有,社会企业的工程和商业运作过程中出现的资源优化使用安排、销售策略、定价机制、市场分类、数据分析与挖掘、交通运输、物流管理等。此外,在日常生活中如购房的贷款年限、还款方式等选择,也可以通过设计一个数学模型进行优化分析。总的来说,数学建模就是利用现有的数学工具或发展新的数学工具,将实际问题转换成数学问题并求解的过程。

本章主要给出数学模型和数学建模的基本概念和特点,并通过几个简单的建模实例说明建立数学模型的一般步骤和基本方法。1.1 节介绍数学模型的基本概念及其分类,说明什么是数学模型;1.2 节阐述数学建模的步骤及基本方法;1.3 节通过几个简单的建模实例进一步说明数学建模的一般方法和步骤;1.4 节主要介绍大学生数学建模竞赛的发展历史以及赛制。

### 1.1 数学模型

什么是模型?在实际生产和日常生活中,经常会遇到各种各样的模型,如风洞实验中的飞机模型、水力系统实验模型、科技馆内的火箭、铁路模型等各种实物模型,又如用文字、符号、图表、公式和框图等描述客观事物某些特征和内在联系的模型。

模型是现实客观事物的一种表示和体现,它可以是文字、图表、公式,也可以是计算机程序或其他实体模型,需要具备以下三个特点:①是现实世界一部分的模仿和抽象;②由那些与分析问题有关的因素构成;③体现了有关因素之间的关系。模型是为了一定目的,对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物,它集中反映了原型中人们需要的那一部分特征。

什么是数学模型?一般来说,数学模型是对于现实世界的一个特定对象,为了一个特定目的,根据特有的内在规律,作出一些必要的简化假设,运

用适当的数学工具,得到的一个数学结构。

数学模型主要具有预测、判别和解释三大作用,其中预测功能是数学模型价值的最重要的体现。下面将分别举例进行说明。

### 例 1.1 谷神星的发现

1766年,德国有位名叫提丢斯(Titus)的中学数学教师,整理出如下数列:

$$R_n = \frac{1}{10} \times (4 + 3 \times 2^n),$$

令提丢斯惊奇的是,当 $n$ 分别取值为 $-10, 0, 1, 2, 4, 5$ 时,数列每一项恰好对应当时已知的六大行星(水星、金星、地球、火星、木星、土星)到太阳的距离(单位为天文单位): $0.4, 0.7, 1, 1.6, 5.2, 10$ 。提丢斯的朋友——天文学家波得(Bode)深知这一发现的重要意义,于1772年公布了提丢斯的这一发现,称为提丢斯-波得定则。这一串数引起了科学家们的极大重视。

1781年,英籍德国人赫歇尔(Herschel)在19.6的位置(即 $n=6$ )发现了天王星,人们从此就对这一定则深信不疑了。根据这一定则,人们很自然地思考为什么 $n=3$ 时没有行星对应?

1801年,意大利人皮亚齐(Piazzi)从望远镜里观察到一颗非常小的星星,正好在提丢斯-波得定则中 $2.8(n=3)$ 的位置,但是正当他想进一步观察这颗小行星时,他却病倒了。等到他恢复健康,再想寻找这颗小行星时,却毫无踪迹。德国数学家高斯(Gauss)根据皮亚齐的观测资料,创立了一种新的行星轨道计算理论,计算出这颗行星的轨道形状,并指出它将于何时出现在哪一片天空里。1801年12月31日,德国天文爱好者奥伯斯(Olbers)根据高斯预言的结果,用望远镜再次捕捉到了这颗曾经丢失而后命名为谷神星的小行星。

继谷神星发现之后,数学家们应用数学模型又计算预测出了海王星、冥王星的存在和位置,接着天文工作者才在天空中找到它们。

“谷神星的发现”这一例子告诉我们,通过分析过去已有数据的内在趋势并由此建立的数学模型可以对未来的数据进行预测,以便指导以后的工作或对问题做进一步的研究。

### 例 1.2 方桌能否放平问题

方桌能否放平问题描述为:将一张四条腿的方桌放在不平的地面上,不允许将桌子移到别处,但允许其绕中心旋转,是否总能设法使四条腿同时落地。

“四条腿长度相同吗?”“不平”是怎样的不平?如果不附加任何条件,答案显然是否定的。因此,我们作如下假设:

- (1) 地面为连续曲面;
- (2) 方桌的四条腿长度相同;
- (3) 相对于地面的弯曲程度而言,方桌的腿是足够长的;
- (4) 方桌的腿只要有一点接触地面就算着地。

那么,在作出这四条假设之后,方桌是否一定可以放平呢?在生活中我们常常有这样的经历:将桌子稍稍挪动几次,就可以使四条腿同时着地。那么,是否可以建立数学模型进行严格的证明呢?

以方桌的中心为坐标原点,建立如图1.1所示的直角坐标系。方桌的四条腿分别在 $A, B, C, D$ 处。 $A, C$ 的初始位置在 $x$ 轴上,而 $B, D$ 则在 $y$ 轴上。当方桌绕中心 $O$ 旋转 $\theta$ 角

度时,方桌  $ABCD$  旋转至  $A'B'C'D'$  的位置。对角线  $A'C'$  与  $x$  轴的夹角记为  $\theta$ 。

容易看出,当四条腿尚未完全着地时,四条腿到地面的距离是不确定的,当旋转角度  $\theta$  一定时,四条腿到地面的距离就被唯一确定。不妨设  $f(\theta)$  为  $A, C$  离地面距离之和,  $g(\theta)$  为  $B, D$  离地面距离之和。由假设(1),  $f(\theta)$  和  $g(\theta)$  均为  $\theta$  的连续函数。由假设(3),方桌在任何位置至少有三条腿可以同时着地,所以对于任意的角度  $\theta, f(\theta)g(\theta)=0$ 。当  $\theta=0$  时,不妨假设  $f(0)=0, g(0)>0$ 。(若此时  $g(0)=0$ ,则在该时刻方桌的四条腿已经同时着地。)于是,方桌能否放平就可以转化为如下的数学命题:

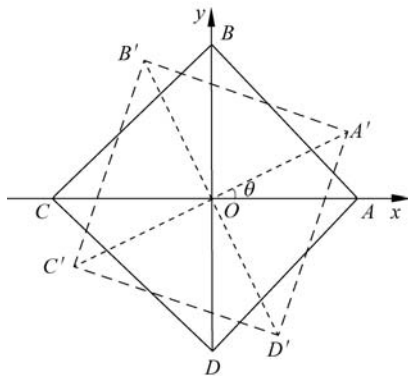


图 1.1 方桌旋转示意图

已知  $f(\theta)$  和  $g(\theta)$  均为  $\theta$  的连续函数,  $f(0)=0, g(0)>0$  且对于任意的角度  $\theta, f(\theta)g(\theta)=0$ , 证明存在某一角度  $\theta_0$ , 使  $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$ 。

这个数学命题可以利用连续函数的性质加以证明。

**证** 当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时,  $AC$  和  $BD$  互换位置, 即  $A'C' = BD, B'D' = AC$ , 于是  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 。

令  $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$ , 显然,  $h(\theta)$  也是  $\theta$  的连续函数,  $h(0) = f(0) - g(0) < 0$ , 而  $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ 。根据连续函数的零点定理, 必存在  $\theta_0 \left(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ , 使  $h(\theta_0) = 0$ , 即  $f(\theta_0) = g(\theta_0)$ 。最后, 因为  $f(\theta_0)g(\theta_0) = 0$ , 所以  $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$ 。

方桌能否放平问题这一实例告诉我们, 数学模型可以对已有现象进行数学上的分析, 帮助我们判断已有结论正确与否。

### 例 1.3 双层玻璃的功效

在寒冷的北方, 许多住房的玻璃窗是双层的, 即由两片镶嵌在框架内的玻璃组成, 其中间留有一定空隙。据说这么做是为了保暖, 即减少室内向室外的热量流失。那事实是否真的是这样呢? 双层玻璃的热量流失是否真的比单层玻璃热量流失的要少呢? 少多少呢?

现在我们就来建立一个简单的数学模型, 研究一下双层玻璃究竟有多大的功效。我们比较两座完全相同的房屋, 它们唯一的差别仅仅在于使用的是单层玻璃还是双层玻璃。因为我们的研究重点在于窗户的热传导引起的热量流失, 因此需要作出如下假设:

- (1) 室内热量的流失是热传导引起的, 不存在室内外的空气对流。
- (2) 室内温度  $T_1$  和室外温度  $T_2$  保持不变, 均为恒定的常数。
- (3) 玻璃是均匀的, 热传导系数是常数。

由热传导公式可知: 厚度为  $d$  的均匀介质, 两侧温差为  $\Delta T$ , 则单位时间由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量  $\theta$  与两侧温差  $\Delta T$  成正比, 与  $d$  成反比, 即

$$\theta = k \frac{\Delta T}{d},$$

其中,  $k$  为热传导系数。

设玻璃的热传导系数为  $k_1$ , 空气的热传导系数为  $k_2$ , 那么单位时间单位面积通过双层玻璃(如图 1.2 所示)的热量传导为

$$\theta_1 = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{l} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d},$$

其中,  $T_a$  为双层玻璃内层玻璃的外侧温度,  $T_b$  为双层玻璃外层玻璃的内侧温度。消去  $T_a$  和  $T_b$ , 可以得到:

$$\theta_1 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{d(2 + k_1 l / k_2 d)}.$$

对于厚度为  $2d$  的单层玻璃窗(如图 1.3 所示), 热量损失为:

$$\theta_2 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{2d}.$$

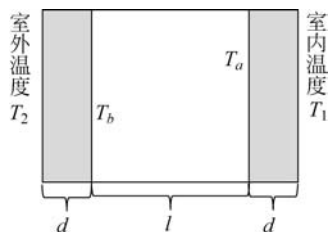


图 1.2 双层玻璃示意图

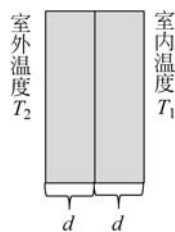


图 1.3 单层玻璃示意图

对比两种玻璃窗的热量损失:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{2}{2 + (k_1 l) / (k_2 d)},$$

显然  $\theta_1 < \theta_2$ , 为了获取更进一步的结果, 查阅相关资料, 得到  $\frac{k_1}{k_2} = 16 \sim 32$ , 所以  $\frac{\theta_1}{\theta_2} <$

$\frac{1}{1 + 8l/d}$ 。记  $h = l/d$ , 并令  $f(h) = \frac{1}{1 + 8h}$ , 此函数的图形如图 1.4 所示。

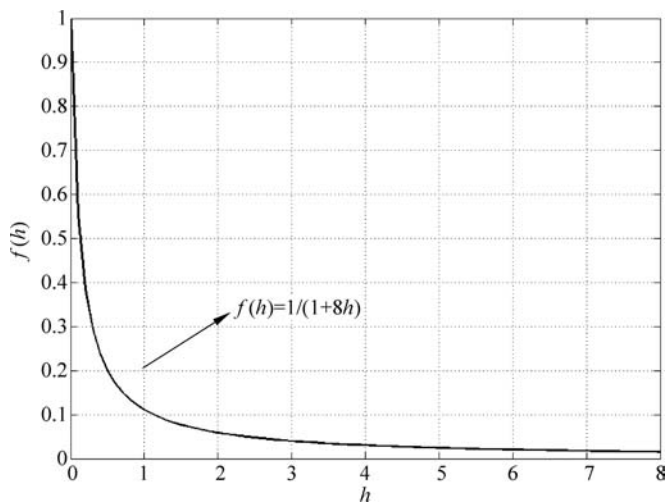


图 1.4  $f(h)$  的函数图形

观察图 1.4 可以看出,随着  $h$  的增大,  $f(h)$  的值迅速减小,当  $h$  超过一定值后,  $f(h)$  下降速度趋于缓慢。为了美观和使用上的方便,建筑规范一般要求  $h = l/d \approx 4$ , 即  $l \approx 4d$ , 此时双层玻璃窗热量损失不超过单层玻璃窗时的 3%。

这个例子告诉我们,数学模型具有解释功能,能够解释实际生活中的某种现象,并给出定量分析的结果。

数学模型就是为了解决现实问题而建立起来的。现实问题多种多样,因此建立的数学模型也各不相同。数学模型的种类繁多,不同的分类标准下可以获得不同的分类结果,下面将介绍几种常见的分类:

(1) 按照模型中变量的特征,分为:

连续型模型——变量是连续的;

离散性模型——变量是离散的;

确定性模型——变量是确定的;

随机性模型——变量是随机的。

(2) 按照对某个实际问题了解的深入程度,分为:

白箱模型——对研究对象的机理了解十分清楚,能够运用数学模型建立明确反映输入信息和输出信息内在联系的模型。例如,力学模型和电学模型等。

黑箱模型——由于因素众多,关系复杂,对研究对象的内部规律知之甚少。例如,生命科学、社会科学等方面的问题。

灰箱模型——介于白箱模型与黑箱模型之间,它所针对的研究对象往往是那些知识背景不完全清晰的问题,一般难以完全提取模型暗含的规律性信息及经过训练学习的知识。例如,生态、经济、管理等领域中机理尚不十分清楚的现象。

(3) 按照模型的应用领域,分为:

人口模型、生态系统模型、交通流模型、经济模型、基因模型、战争模型、城镇规划模型等。

(4) 按照建立模型所用的数学方法,分为:

初等模型、微分方程模型、数学规划模型、统计回归模型等。

## 1.2 数学建模

数学建模就是从实际问题中抽象、提炼出数学模型的过程。数学建模面临的实际问题虽然来自于不同学科和门类,但是建立数学模型的基本过程大致相同,下面将从一个例子出发,详细讲解数学建模的一般步骤。

### 1.2.1 数学建模的一般步骤

#### 例 1.4 悬崖高度的估算

假如你站在悬崖顶上且身上带着一只具有跑表功能的计算器,出于好奇想用扔下一块石头听回声的方法来确定悬崖的高度。假如你能准确地测定时间,你将如何估算悬崖的高度呢?

### 模型准备

问题要求的是悬崖高度,已知的是石块落地的时间。需要建立高度与时间的关系,这里很自然地想到自由落体运动的公式。

### 模型假设

(1) 石块下落并非是自由落体运动,由于本例题只是要估算悬崖的高度,因此可以假设空气阻力不计。

(2) 重力加速度值取为  $g=9.8\text{m/s}^2$ 。

(3) 听到回声再按跑表,这时间就包括了反应时间和声音传回来的时间,由于只是要估算,所以我们假设这两部分时间可忽略不计。

### 模型建立

假设石块下落的时间为  $t\text{s}$ ,悬崖高度为  $h\text{m}$ ,根据之前的假设,建立自由落体运动模型:

$$h = \frac{1}{2}gt^2。$$

### 模型求解

当跑表计时  $4\text{s}$  时,代入模型可以求得悬崖的高度:  $h=78.4\text{m}$ 。

### 模型分析

$78.4\text{m}$  的悬崖高度只是一个近似结果。如果想要得到更加精准的解,可以将空气阻力考虑进去,利用牛顿第二运动定律建立数学模型进行求解。同时,也可以去除反应时间和声音传回来的时间,就可以得到精确度更高的悬崖高度值。请同学们自行思考,建立模型进行求解。

### 模型检验与应用

回答原问题,悬崖高度大致为  $78.4\text{m}$ 。

从上述例子的求解过程,我们可以总结一下数学建模的一般步骤:

#### 1. 模型准备

在这一阶段需要对实际问题的背景和内在规律有深刻的了解,明确建模的目的,即最终需要解决一个怎样的问题。同时搜集与该问题相关的各种信息,如现象、数据等,尽量弄清对象的主要特征。只有掌握充分的数据资料,对问题有充分的了解才能建立正确的模型。

#### 2. 模型假设

实际问题往往错综复杂,应该根据对象的特征和建模目的,抓住问题的本质和主要因素,忽略次要因素,对问题进行必要的、合理的简化。合理的假设可以使得模型变得更加清晰,更加利于求解。试图建立一个面面俱到、包括所有因素的数学模型,往往会使你无法继续接下来的工作。同样,不合理的假设也会导致错误或者毫无意义的模型。通常,做出合理的假设需要对问题的准确了解、深入,还取决于建模者的直观判断力、丰富想象力以及足够的知识储备。

#### 3. 模型建立

根据所做的假设,用适当的数学工具去刻画各变量之间的关系,建立相应的数学模型,可以是数学公式、算法或图表等。这一阶段首先要分清变量的类型,查明各种变量所

处的地位、作用和相互联系,选择恰当的数学工具对其进行表征,构造出能够确实反映对象规律的数学模型。一般来说,建立的数学模型不唯一,应该尽量选择简单的、思路清晰的模型。

#### 4. 模型求解

建立模型之后,可以采用解方程、画图形、优化方法、统计分析和数值计算等方法,借助于相关的计算机软件进行求解,如 MATLAB、LINGO、SPSS 等软件。

#### 5. 模型分析

求得模型的解之后,需要对模型进行分析,如误差分析(误差是否在可允许的范围内)、稳定性分析(结果是否具有稳定性)和模型对数据的灵敏度分析(数据的微小改变是否会引起模型结果有大的变化)等。分析后不符合要求的需要修改或增减条件,重新建模直至符合要求为止。

#### 6. 模型检验与应用

模型的检验是指将求解结果和分析结果放回到原问题中,并与实际现象、数据比较,检验是否与实际情况吻合。如果检验无误,说明模型可用,建模是成功的,否则需要对所建模型进行修改。一个好的模型往往需要反复修正几次才能使用。

模型的应用是指将经过分析和检验的模型投入到实际应用中,解决实际的问题。

以上就是数学建模的一般步骤,可以用图 1.5 所示的流程图清晰地说明。值得一提的是,并不是所有问题的建模都要经过这些步骤,针对具体问题需要具体分析、应对。

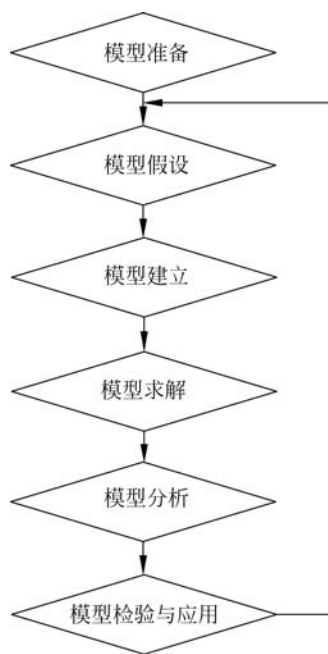


图 1.5 数学建模一般步骤示意图

### 1.2.2 数学建模的基本方法

数学建模的基本方法总结归纳如下:

#### 1. 机理分析法

根据对研究对象特性的认识,找出反映内部机理的数量规律,应用已知数据进行计算和确定模型的参数。

#### 2. 数据分析法

选用插值方法、差分方法、样条函数和回归分析等方法对已知数据进行数据拟合。

#### 3. 构造分析法

先假设一个合理的数学结构,再用已知数据确定模型的参数,或对模型进行模拟计算。

#### 4. 现成数学法

用现成的数学模型,常用的有微分方程、线性规划、概率统计、层次分析、图论、人工神经网络、模糊数学、灰色系统理论等。

## 5. 直观分析法

通过对图形和数据的直观分析,对参数进行估计和计算,并对结果进行模拟。

数学建模方法并不拘泥于上述几种。建立一个好的数学模型,需要熟练的数学技巧、丰富的想象力、敏锐的洞察力,也需要大量阅读、思考别人做的模型,积累经验。

## 1.3 简单的建模实例

### 1.3.1 万有引力定律的发现

#### 背景介绍

万有引力定律是牛顿(Newton)在1687年于《自然哲学的数学原理》上发表的,被认为是17世纪自然科学最伟大的成果之一。它将地面上物体运动的规律和天体运动的规律统一起来,对以后物理学和天文学的发展具有深远的影响。牛顿在研究变速运动过程中发明了微积分,又以此为工具在开普勒三定律和牛顿第二运动定律的基础上,成功地得到万有引力定律。

丹麦著名实验天文学家第谷(Tycho)花了二十多年时间观察记录下当时已经发现的五大行星运动的资料。第谷的学生和助手德国天文学家开普勒(Kepler)在对这些资料分析计算后,得出了著名的开普勒三定律:

(1) 行星轨道是一个椭圆,太阳位于此椭圆的一个焦点上。

(2) 行星在单位时间内向径扫过的面积是常数。

(3) 行星运行周期的平方正比于椭圆长半轴的三次方,比例系数不随行星而改变(绝对常数)。

下面将介绍万有引力定律的推导过程。

#### 模型假设

开普勒三定律和牛顿第二运动定律是导出万有引力定律的基础,所以需要将它们表述为假设条件。

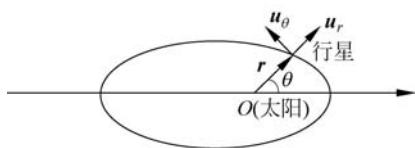


图 1.6 极坐标系下行星轨道

对任意一颗行星椭圆轨道建立极坐标系 $(r, \theta)$ ,以太阳为极点, $\theta=0$ 为椭圆长半轴方向,向径 $r$ 表示行星的位置,如图 1.6 所示。

(1) 椭圆轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad b^2 = a^2(1 - e^2), \quad (1.1)$$

其中, $a, b$ 为椭圆的长、短半轴, $e$ 表示椭圆的离心率。

(2) 单位时间内向径 $r$ 扫过的面积为常数 $A$ ,

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = A. \quad (1.2)$$

(3) 行星运行周期 $T$ 满足:

$$T^2 = \lambda a^3, \quad (1.3)$$

其中, $\lambda$ 为绝对常数,不依赖于哪颗行星。

(4) 行星运动时受力  $f$  等于行星质量  $m$  与行星加速度  $\ddot{\mathbf{r}}$  的乘积:

$$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.4)$$

模型建立

首先引入基向量:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_r = \cos\theta \cdot \mathbf{i} + \sin\theta \cdot \mathbf{j}, \\ \mathbf{u}_\theta = -\sin\theta \cdot \mathbf{i} + \cos\theta \cdot \mathbf{j}, \end{cases} \quad (1.5)$$

则向径  $\mathbf{r}$  可以表示为

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r. \quad (1.6)$$

易导出

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta \cdot \mathbf{i} + \dot{\theta}\cos\theta \cdot \mathbf{j} = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta, \\ \dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot{\theta}\cos\theta \cdot \mathbf{i} - \dot{\theta}\sin\theta \cdot \mathbf{j} = -\dot{\theta}\mathbf{u}_r. \end{cases} \quad (1.7)$$

由式(1.6)、式(1.7)及复合函数求导法则, 不难推出行星运动速度和加速度为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta, \\ \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta. \end{cases} \quad (1.8)$$

由式(1.2)有

$$\dot{\theta} = \frac{2A}{r^2}, \quad \ddot{\theta} = -\frac{4A\dot{r}}{r^3}. \quad (1.9)$$

于是,  $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$ , 从而式(1.8)中

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r. \quad (1.10)$$

对式(1.1)求导, 并将式(1.9)中  $\dot{\theta}$  的结果代入求导后的式子中, 可以得到

$$\dot{r} = \frac{2Ae}{p}\sin\theta, \quad \ddot{r} = \frac{4A^2(p-r)}{pr^3}, \quad (1.11)$$

再代入到式(1.10)中, 得到

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{-4A^2}{pr^2}\mathbf{u}_r. \quad (1.12)$$

将式(1.12)和式(1.6)代入到式(1.4)中, 有

$$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{4A^2m}{pr^2}\mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.13)$$

式(1.13)表明, 行星受力  $\mathbf{f}$  的方向与向径  $\mathbf{r}_0$  相反, 即沿太阳与行星连线反向指向太阳。此外, 力  $\mathbf{f}$  的大小与行星质量成正比, 且与太阳和行星间的距离  $r^2$  成反比。

为了完成万有引力定律的推导, 还只需要验证  $\frac{A^2}{p}$  是绝对常数, 即它与行星无关即可。因为行星运行一个周期  $T$  时, 其向径扫过的面积恰好为椭圆的面积, 即  $TA = \pi ab$ , 由此得出

$$\frac{A^2}{p} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{pT^2} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{\lambda a^3} \cdot \frac{a}{b^2} = \frac{\pi^2}{\lambda},$$

$\pi$  和  $\lambda$  是绝对常数,将上式代入到式(1.13)中,有

$$f = -\frac{4\pi^2 m}{\lambda r^2} \mathbf{r}_0 = -k \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}_0,$$

其中,  $\frac{4\pi^2}{\lambda} = kM$ ,  $k$  为万有引力常数,  $M$  为太阳质量,这就是人们熟知的万有引力定律。

### 1.3.2 冷却问题

将温度为  $T_0 = 150^\circ\text{C}$  的物体放在温度为  $24^\circ\text{C}$  的空气中冷却,经 10min 后,物体温度降为  $T = 100^\circ\text{C}$ 。问  $t = 20\text{min}$  后,物体的温度是多少?

#### 模型准备

问题中物体较周围的温度高很多,要求一段时间后的物体温度。很容易发现这个问题可以考虑利用牛顿冷却定律进行求解。

#### 模型假设

假设该物体表面积以及外部介质性质和温度变化忽略不计。物体的温度  $T$  随时间  $t$  的变化规律为  $T = T(t)$ 。

#### 模型建立

由冷却定律及条件可以得到:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - 24), \\ T(0) = 150, \end{cases}$$

其中,  $k > 0$  为比例常数。

#### 模型求解

这个模型是带有初始条件的一阶线性常微分方程,利用分离变量法容易求出特解为

$$T = 126e^{-kt} + 24.$$

已知  $T(10) = 100$ ,可求出  $k \approx 0.05$ 。因此该物体温度随时间变化的函数为

$$T = 126e^{-0.05t} + 24.$$

因此,当  $t = 20$  时,  $T(20) = 126e^{-0.05 \times 20} + 24 \approx 70^\circ\text{C}$ 。

## 1.4 数学建模竞赛

### 1.4.1 数学建模竞赛的发展历程

从 1983 年起,美国就有一些有识之士开始探讨组织一项数学应用方面竞赛的可能性。1985 年,在美国科学基金会的资助下,举办了第一届大学生数学建模竞赛(Mathematical Competition in Modeling,后改名为 Mathematical Contest in Modeling, MCM)。竞赛由美国工业与应用数学学会和美国运筹学会联合主办,从 1985 年起,每年举行一届。第一届 MCM 大赛,吸引了美国 70 所大学的 90 个队参赛。1989 年,北京的三所大学组队参加了美国的 MCM 竞赛。此后,我国参与此项赛事的大学越来越多。经过多方筹备,1992—1993 年中国工业与应用数学学会开始举办我国的全国大学生数学建模竞赛(China Undergraduate