

# 线性控制系统的时域分析及校正

**引言：**在建立了控制系统的数学模型后,就可以采用不同的方法来分析和研究系统的性能。控制系统的实际运行都是在时域内进行的,所以可用时域法分析系统性能。时域分析法是研究控制系统在输入信号作用下,其输出随时间变化的情况,方便分析系统的动态和稳态特性,是控制系统最基本的分析方法,也是频域分析法和根轨迹分析法的基础。时域分析包括稳定性分析、瞬态性能分析和稳态性能分析。

稳定是系统正常工作的前提条件,人们很早就开始关注系统的稳定性问题。万有引力理论建立后,天文学家如 Lagrange(拉格朗日)和 Laplace(拉普拉斯)等都努力研究保守系统(如太阳系)的稳定性。19世纪90年代,蒸汽机的普遍应用向控制系统的设计者提出了挑战,除了蒸汽压力需要控制外,还有部分转动轴的速度需要控制,而且系统还出现了不能稳定运行的情况。为了解决这类问题,数学家 Hurwitz(赫尔维茨)和工程师 Routh(劳斯)提出了利用特征方程的系数判断稳定性的方法,建立了稳定性的代数判据。

给系统输入一个时间信号,系统的输出即为时域响应,系统的时域响应可以通过求解微分方程得到,也可以由传递函数利用拉氏变换和拉氏反变换求出。

在控制理论发展初期,时域分析法分析高阶复杂系统比较困难,随着计算机技术的不断发展和各种实用软件的出现,时域分析法不仅仅用于分析阶次较低的简单系统,也在现代控制理论中得到了广泛的应用。

## 3.1 时域响应及性能指标

时域分析是指分析控制系统在典型输入信号作用下的输出响应,根据输出的时域表达式,分析系统的稳定性、瞬态性能(快速性)和稳态性能(准确性)。输出的时域表达式可能是对应图形的几何形式,也可能是对应数学表达式的解析形式。时域分析法具有以下特点:

- (1) 时域分析是直接的时间域中对系统进行分析的方法,具有直观和准确的优点。
- (2) 可以从响应的数学表达式或曲线上得到系统时间响应的全部信息。
- (3) 时域分析采用的是解析方法,过程较为繁琐。
- (4) 不易判断系统的结构和参数对动态性能的影响,因此进行系统设计时一般不用时

域分析法。

(5) 对高阶系统进行分析时计算量很大,不易确定性能指标,必须借助于计算机实现。

### 3.1.1 时域分析常用的方法

对控制系统进行时域分析时虽然可以由输出响应得出系统的性能,但是对于稳定性和准确性来说,采用输出响应来分析较为麻烦,时域性能分析常采用的方法如下:

(1) 稳定性分析采用的是代数判据,即劳斯稳定性判据和赫尔维兹稳定性判据。

(2) 稳态性能分析就是通过计算稳态误差来分析系统的准确性。

(3) 瞬态性能也称为动态性能,用动态性能指标表示,是通过求系统在典型输入时的输出响应得出的。输出响应的求取方法有两种,一是直接由微分方程求解得出,二是借助于传递函数采用拉氏反变换的方法求出。

线性定常微分方程的求解比较困难,时域响应分析常采用拉氏变换法。设控制系统的传递函数为  $G(s)$ ,求系统在任意输入信号  $x_i(t)$  作用下的输出响应的  $x_o(t)$  的步骤如下:

(1) 求输入的象函数  $X_i(s)$ ;

(2) 由传递函数的定义式变形求得输出的象函数  $X_o(s) = G(s)X_i(s)$ ;

(3) 对  $X_o(s)$  进行拉氏反变换得输出的时域表达式  $x_o(t)$ 。

### 3.1.2 与控制系统有关的几个概念

由绪论知,自动控制系统均采用反馈控制,其动态结构框图如图 3.1 所示。其中,  $X_i(s)$  为系统输入信号  $x_i(t)$  的象函数,  $X_o(s)$  为系统输出信号  $x_o(t)$  的象函数,  $G(s)$  为前向通道的传递函数,  $H(s)$  为反馈通道的传递函数。

在对控制系统进行分析和设计时经常会遇到的几个概念如下。

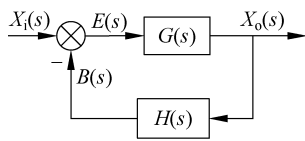


图 3.1 反馈控制系统

#### 1. 闭环传递函数和开环传递函数

反馈控制系统的闭环传递函数为

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

在图 3.1 所示的反馈控制系统中,“人为”地断开系统的主反馈通路,也就是将反馈通道  $H(s)$  的输出断开,前向通道传递函数  $G(s)$  与反馈通道传递函数  $H(s)$  相乘,即得系统的开环传递函数为  $G(s)H(s)$ 。

前面所说的“断开”就是指断开反馈信号进入的节点。当反馈通道的传递函数  $H(s) = 1$  时系统称为单位反馈系统,此时开环传递函数等于前向通道的传递函数  $G(s)$ 。

特别说明:开环传递函数是针对闭环系统而言的,而不是开环系统的传递函数。

#### 2. 特征方程和特征根

控制系统的闭环传递函数一般可以写成如下分式多项式的形式:

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{M(s)}{D(s)} \quad (3.1)$$

对于实际存在的控制系统,满足  $n \geq m$ 。

控制系统的闭环传递函数的分子多项式记为  $M(s)$ ,分母多项式记为  $D(s)$ 。系统的特征方程为

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

特征方程的根,即  $D(s)=0$  的解,称为系统的特征根。

### 3. 系统的零点、极点和零、极点分布图

零点和极点有开环零点、开环极点、闭环零点、闭环极点之分。

闭环传递函数中,分子多项式对应的方程  $M(s)=0$  的解,为系统的闭环零点;分母多项式对应的方程  $D(s)=0$  的解,为系统的闭环极点,可见,闭环极点与系统的特征根等价。

同理,开环传递函数的分子多项式等于 0 对应的方程的解为系统的开环零点,开环传递函数的分母多项式等于 0 对应的方程的解为系统的开环极点。

在控制系统的分析中经常用到系统的零、极点分布图。所谓零、极点分布图就是在  $s$  平面上,把系统的零点和极点所对应的矢量的端点标注出来,零点用“○”表示,极点用“×”表示。

若系统的传递函数为  $\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{2(s+2)}{s^2+2s+3}$ ,可求得其极点为  $-1 \pm j\sqrt{2}$ ,零点为  $-2$ ,则对应的零、极点分布图如图 3.2 所示。

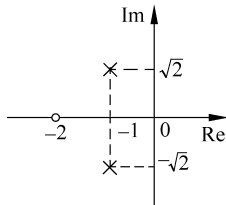


图 3.2 系统零、极点分布图

### 4. 开环增益和开环根轨迹增益

设反馈控制系统的开环传递函数  $G(s)H(s)$  可以写成如下标准形式:

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^\mu (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_{n-\mu} s + 1)} \quad (3.2)$$

其中,  $\mu \geq 0$ ,  $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_m, T_1, T_2, \cdots, T_{n-\mu}$  均为大于 0 的时间常数,则式(3.2)中分子多项式的常数  $K$  称为开环增益。

设系统的开环零点为  $z_1, z_2, \cdots, z_m$ ,开环极点为  $0$ (共有  $\mu$  个),  $p_1, p_2, \cdots, p_{n-\mu}$ ,则开环传递函数可以写成如下标准形式:

$$G(s)H(s) = \frac{K^* (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{s^\mu (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n-\mu})} \quad (3.3)$$

则式(3.3)中分子多项式的常数  $K^*$  称为开环根轨迹增益。开环增益和开环根轨迹增益可以进行相互转化,对照式(3.2)和式(3.3),得出二者的关系是

$$K^* = \frac{K \cdot \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m}{T_1 T_2 \cdots T_{n-\mu}} \quad (3.4)$$

#### 3.1.3 典型输入信号

控制系统的瞬态性能也就是动态性能可以通过在输入信号作用下的系统输出响应来获取,系统的输出响应不仅取决于系统本身的特性,还与输入信号的形式有关。在实际控制系

统中,输入信号常具有一定的随机性,而为了便于分析和设计,也为了对系统性能进行评价和比较,总是预先规定一些特殊的输入信号,我们把这类特殊的输入信号称为典型输入信号。典型输入信号是众多而复杂的实际输入的近似和抽象,是系统常遇到的输入信号形式,数学表达式十分简单。系统分析时常采用典型输入信号的原因是:

(1) 在分析系统性能时,采用典型输入信号可使数学计算简单,便于比较系统的性能。

(2) 复杂信号输入时的系统性能是以典型输入信号时的性能为基础的。

(3) 有些复杂输入信号可以由典型输入信号叠加而成。

(4) 给系统输入典型信号,分析系统的输出响应,可以确定未知系统的数学模型。常用的典型输入信号有如下几种。

### 1. 阶跃信号

阶跃信号也称为位置信号,其波形如图 3.3 所示,数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} a, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

其中  $a$  为常数。阶跃信号作用于系统时,说明系统在  $t=0$  时突然加入了幅值恒定为  $a$  的输入量,并且一直保持不变,如直流电路开关突然闭合等。分析系统的性能时,常以阶跃信号作为典型输入信号,因为它可以较好地考察系统的动态性能和稳态性能。

阶跃信号的象函数为  $X(s) = \frac{a}{s}$ 。当信号幅值  $a=1$  时,该信号称为单位阶跃信号,记为  $1(t)$ ,象函数为  $\frac{1}{s}$ 。

### 2. 斜坡信号

斜坡信号也称为速度信号,其波形如图 3.4 所示,数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} at, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

其中  $a$  为常数。斜坡信号作用于系统时,说明系统加入了幅值随时间逐渐变化的输入量,并且变化速度保持  $a$  不变,如雷达扫描系统等。该信号作典型输入时,可检测随动系统的跟踪能力。

斜坡信号的象函数  $X(s) = \frac{a}{s^2}$ 。当信号变化的速度  $a=1$  时,该信号称为单位斜坡信号,记为  $t \cdot 1(t)$ ,象函数为  $\frac{1}{s^2}$ ,其对时间的一阶导数为单位阶跃信号。

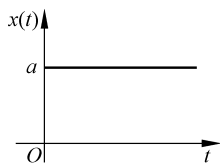


图 3.3 阶跃信号

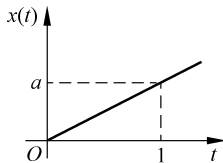


图 3.4 斜坡信号

### 3. 抛物线信号

抛物线信号也称为加速度信号,其波形如图 3.5 所示,数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} at^2, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

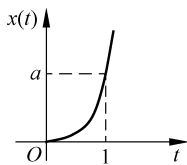


图 3.5 抛物线信号

其中  $a$  为常数。抛物线信号作用于系统时,说明系统加入了幅值随时间逐渐变化的输入量,并且变化加速度  $2a$  保持不变。

抛物线信号的象函数  $X(s) = \frac{2a}{s^3}$ 。当  $a = \frac{1}{2}$  时,该信号称为单位加速度信号,记为  $\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$ ,象函数为  $\frac{1}{s^3}$ ,其对时间的一阶导数为单位斜坡信号,对时间的二阶导数为单位阶跃信号。

### 4. 脉冲信号

脉冲信号也称为冲击信号。脉冲信号由矩形脉冲信号演变而来,矩形脉冲信号的波形如图 3.6 所示,其数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} \frac{a}{\epsilon}, & 0 < t < \epsilon \\ 0, & t < 0 \text{ 或 } t > \epsilon \end{cases} \quad (3.8)$$

其中  $a$  为常数。当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,矩形脉冲信号就成为脉冲信号。脉冲信号表示系统作用时间极短而幅值极强的输入信号。由式(3.8)可知,脉冲信号的面积为  $a$ ,在  $t \neq 0$  时,信号幅值为 0;仅在  $t=0$  时信号的幅值为无穷大,与  $a$  无关。为了区分各种脉冲信号的强弱,只能用信号的面积  $a$  来衡量,因此  $a$  也称为脉冲信号的强度。

脉冲信号的象函数  $X(s) = a$ 。当  $a=1$  时,该信号称为单位脉冲信号,记为  $\delta(t)$ ,是单位阶跃信号对时间的一阶导数,  $L[\delta(t)] = 1$ 。脉冲信号的波形如图 3.7 所示,用在  $t=0$  处的有向线段表示,箭头旁标注  $a$  表示脉冲信号的强度。

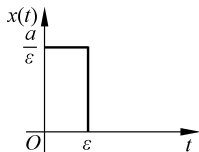


图 3.6 矩形脉冲信号

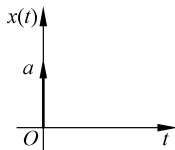


图 3.7 脉冲信号

### 5. 正弦信号

正弦信号的波形如图 3.8 所示,其数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} a \sin \omega t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

其中,  $a$  为正弦信号的幅值,  $\omega$  为正弦信号的角频率。正弦信号表示系统的输入信号是随时间变化往复运动的, 如机床的振动等。正弦信号在时域分析中一般不用, 主要用于频域分析。

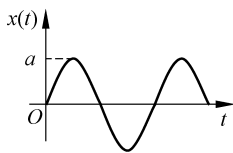


图 3.8 正弦信号

在进行系统性能分析时, 选择何种信号作为系统的输入取决于系统的工作状态和数学分析的方便程度, 同时, 在所有可能的输入信号中, 选取最不利的信号作为系统的典型输入信号。例如, 为了使随动系统能较好地跟随位置、速度和加速度等多种信号, 分析随动控制系统时, 输入信号(给定量)就分别选为阶跃、斜坡和抛物线信号; 而分析恒值控制系统时, 为了使系统具有良好的抗干扰能力, 一般选用阶跃信号为输入, 因为阶跃干扰被认为是最不利的情况, 若系统在这种输入信号下的性能能够满足要求, 那么实际信号输入时的性能均能满足要求。

### 3.1.4 控制系统的时域响应

控制系统在外加激励时, 其输出量随时间变化的函数关系称为系统的时域响应, 而描述系统的微分方程的解就是该系统时域响应的数学表达式。通过对时域响应的分析可揭示系统的特性。

设描述控制系统的微分方程为

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n x_o(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{(n-1)} x_o(t)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx_o(t)}{dt} + a_n \\ & = b_0 \frac{d^m x_i(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{(m-1)} x_i(t)}{dt^{(m-1)}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dx_i(t)}{dt} + b_m \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中,  $x_i(t)$  为输入信号,  $x_o(t)$  为输出信号。

微分方程的全解  $x_o(t)$  可表示为

$$x_o(t) = x_{oh}(t) + x_{ov}(t)$$

$x_{oh}(t)$  为对应的齐次方程的通解, 只与微分方程(也就是系统的结构参数或系统的特征方程的根)有关。对于稳定的系统, 当时间趋于无穷大时, 通解趋于零。所以根据通解或特征方程的根可以分析系统的稳定性。

$x_{ov}(t)$  为特解, 与微分方程和输入有关, 当时间趋于无穷大时特解应趋于一个稳态的函数, 微分方程的全解将趋于一个稳态的函数, 使系统达到一个新的平衡状态, 工程上称为系统进入稳态。

实际上, 任何存在的物理系统都存在惯性, 输出量的改变是与系统所储存的能量有关的, 系统所储存的能量的改变需要一个过程, 因此系统在外加激励时从一种稳定状态到另一种稳定状态的转换需要一定的时间, 任何一个控制系统的时域响应曲线如图 3.9 所示(以二阶系统单位阶跃响应为例), 都由瞬态响应和稳态响应两部分组成。

(1) 瞬态响应, 也称为过渡过程或动态过程, 如图 3.9 中  $AB$  段所示。瞬态响应是指从输入信号作用到系统的时刻开始, 到系统达到稳态过程前的响应过程。

由于系统具有惯性、摩擦以及其他一些原因, 过渡过程中输出量不可能完全复现输入量的变化。不同系统因结构和参数的不同, 过渡过程表现也不同, 一般有收敛、发散或等幅振荡几种形式。控制系统完成控制任务的前提是必须稳定, 即过渡过程必须是收敛的。

(2) 稳态响应, 也称为静态或稳态过程, 如图 3.9 中  $CD$  段所示。稳态响应是在输入信

号作用下时间  $t$  趋于无穷大时的输出响应,稳态过程表征输出量复现输入量的程度,用稳态性能来描述。理论上说,只有当时间趋于无穷大时,才进入稳态过程,但这在工程上显然是无法进行的。在工程上规定,输出与稳态值之差在一定的误差范围内时,认为系统进入了稳态。

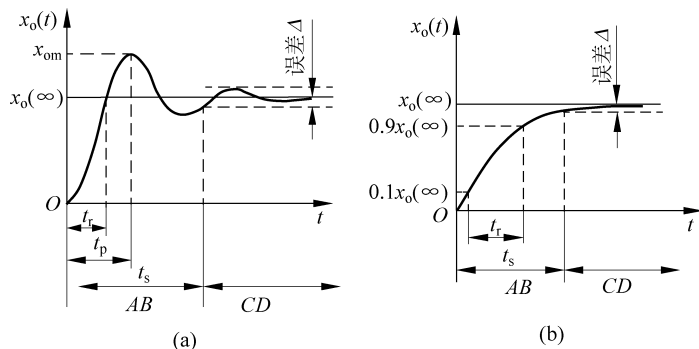


图 3.9 二阶系统阶跃响应曲线

### 3.1.5 控制系统的时域性能指标

由于控制系统的时域响应包括瞬态响应和稳态响应,因此其时域性能指标包括动态性能指标和稳态性能指标两种。

#### 1. 动态性能指标

动态性能指标也称为瞬态性能指标,是描述控制系统在典型信号输入(一般都用单位阶跃信号)作用下的过渡过程的性能指标,常用的动态性能指标有上升时间、峰值时间、调整时间、超调量和振荡次数等几种,如图 3.9 所示。

(1) 上升时间  $t_r$ : 在图 3.9(a)中,阶跃响应曲线有振荡,则上升时间定义为响应曲线从 0 首次达到稳态值  $x_o(\infty)$  所用的时间;在图 3.9(b)中,阶跃响应曲线无振荡,则上升时间定义为响应曲线从稳态值的 10% 上升到稳态值的 90% 所用的时间。

(2) 峰值时间  $t_p$ : 响应曲线从零时刻达到第一个峰值所用的时间。

(3) 最大超调量  $M_p$ : 定义为输出量的最大值  $x_{om}$  和稳态值  $x_o(\infty)$  之差与稳态值的比值,常用百分比表示,即

$$M_p = \frac{x_{om} - x_o(\infty)}{x_o(\infty)} \times 100\% \quad (3.11)$$

最大超调量反映了系统的动态精度,最大超调量越小,则说明系统过渡过程进行得越平稳。

(4) 调整时间  $t_s$ : 指输出响应曲线进入并一直保持在距稳态值允许的误差范围内所需的最小时间。允许的误差范围  $\Delta$  可以是  $\pm 5\%$  和  $\pm 2\%$ 。

(5) 振荡次数  $N$ : 指在调整时间  $t_s$  内,输出量在稳态值上下摆动的次数。

#### 2. 稳态性能指标

稳态性能指标用稳态误差表示,是系统的控制精度的一种度量,通常在阶跃信号、斜坡信号和加速度信号作用下进行测定或计算。在稳态(时间趋于无穷大)时,如果系统的输出

量不等于输入量或输入量的函数,则说明系统存在误差。

动态性能指标和稳态性能指标中,最大超调量和振荡次数反映了系统过渡过程的平稳性,调整时间反映了系统的快速性,而稳态误差反映了系统的准确性。一般来说,对于控制系统我们总希望具有平稳、准确和快速的性能,也就是希望超调量小一些、振荡次数少一点、调整时间短一些、稳态误差小一些。但在后面的学习过程中就会发现,这些性能往往相互矛盾,只能针对具体的系统而有所侧重。例如,民航客机要求飞行平稳,不允许有超调;歼击机则要求机动灵活、响应快速,允许有适当的超调;对于长期运行的生产过程(如化工过程)则强调稳态精度。

## 3.2 线性控制系统的稳定性及代数稳定性判据

稳定性是控制系统能完成控制任务的首要前提,如果一个控制系统是不稳定的,系统就无法正常工作,那也就无法谈到准确性和快速性问题。因此,稳定性分析是控制理论最重要的组成部分。分析系统的稳定性,提出保证系统稳定的措施,是控制工程的基本任务之一。

### 3.2.1 稳定的概念及稳定的充分必要条件

#### 1. 稳定的概念

控制系统在工作的过程中,常常会受到内部或外部的各种干扰,如环境温度的变化、各种电磁干扰及负载的变化等。如果系统在干扰作用的情况下,偏离了原来的平衡状态,当扰动消失后,经过一定时间,系统又能恢复到原来的平衡状态,则系统是稳定的;如果系统在扰动消失后不能恢复到原来的平衡状态或离平衡状态越来越远,则系统是不稳定的。

稳定性可由图 3.10 所示的小球来说明,图(a)中小球处于平衡位置,给小球施加一干扰力,则小球就会偏离平衡位置,干扰力撤消后,随着时间的推移,小球总能回到原始的平衡点,因此系统是稳定的;图(b)中的小球在干扰力作用下,也会偏离平衡位置,干扰力撤消后,无论经过多长的时间,小球都不可能回到原始的平衡点,因此系统是不稳定的。实际上还存在一种稳定和不稳定的中间状态,如图(c)所示,干扰撤消后,小球与原平衡点存在恒定的偏差,称为临界稳定状态。有的系统在干扰撤消后,输出与原平衡点之间存在等幅振荡,也属于临界稳定状态。经典控制理论中,把临界稳定均归为不稳定。

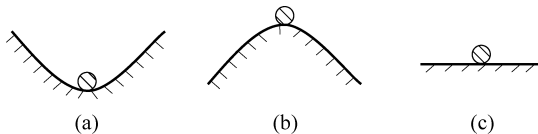


图 3.10 小球的稳定性

根据上述分析,稳定性表现在干扰消失后的时间响应  $x_o(t)$  (与原来平衡工作点的偏差)的性质上。于是控制系统的稳定性的第二种定义为:系统在干扰作用下,偏离了原来的平衡工作点,干扰消失后,如果随时间的推移其时间响应逐渐衰减并最终趋于零,响应曲线如图 3.11(a)所示,则系统一定能够回到原来的工作点,称该系统稳定;否则,随时间的推移

其时间响应逐渐发散或出现等幅振荡,响应曲线如图 3.11(b)、(c)所示,则系统不可能回到原来的工作点,系统不稳定。

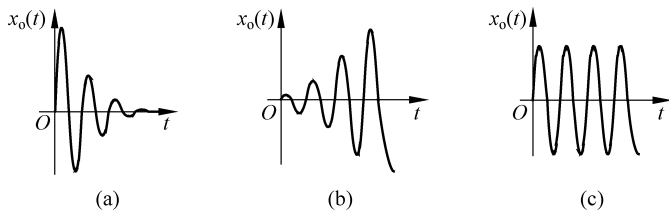


图 3.11 干扰消失后的时域响应曲线

必须指出,以上关于控制系统稳定性的定义仅适用于线性定常系统。

## 2. 稳定的充分必要条件

系统的稳定性仅与干扰撤消后的时间响应的性质有关,而干扰信号作用在系统的持续时间很短,故可以把干扰信号等效成脉冲信号,控制系统的稳定性问题就成为分析系统在单位脉冲信号作用下的时域响应即单位脉冲响应是否收敛的问题,而单位脉冲响应就是系统在干扰撤消后与平衡位置的偏差。由稳定的概念可知,如系统的单位脉冲响应  $x_{\infty}(t)$  在时间趋于无穷大时的极限值为 0,则系统稳定。

设反馈控制系统的传递函数如式(3.1)所示,特征方程为

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (3.12)$$

系统的特征根可以是实根  $-p_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ),也可以是成对出现的共轭复根  $-\sigma_j \pm j\omega_j$  ( $j=1, 2, \dots, r$ ),满足  $k+2r=n$ ,则  $D(s)$  可因式分解为

$$D(s) = a_0 \prod_{i=1}^k (s + p_i) \prod_{j=1}^r [s + (\sigma_j - j\omega_j)][s + (\sigma_j + j\omega_j)]$$

当  $x_i(t) = \delta(t)$  时,  $X_i(s) = 1$ ,  $X_o(s)$  为

$$\begin{aligned} X_o(s) &= \frac{X_o(s)}{X_i(s)} \cdot X_i(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{s + p_i} + \sum_{j=1}^r \frac{d_j s + e_j}{[s + (\sigma_j - j\omega_j)][s + (\sigma_j + j\omega_j)]} \end{aligned}$$

系统的单位脉冲响应  $x_{\infty}(t)$  为

$$x_{\infty}(t) = \sum_{i=1}^k c_i e^{-p_i t} + \sum_{j=1}^r e^{-\sigma_j t} (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t) \quad (3.13)$$

在系统稳定时  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\infty}(t) = 0$ ,由式(3.13)可知,此时应有  $-p_i < 0$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ),  $-\sigma_j < 0$  ( $j=1, 2, \dots, r$ )。  $-p_i$  和  $-\sigma_j$  中只要有一个大于 0,  $x_{\infty}(t)$  中对应的指数项随时间单调增加,则  $x_{\infty}(\infty) \neq 0$ ,系统不稳定。  $-\sigma_j$  中只要有一个等于 0,其他满足  $-p_i < 0$ ,  $-\sigma_j < 0$ ,此时出现共轭纯虚根,  $x_{\infty}(t)$  中对应项为正弦信号,则  $x_{\infty}(\infty)$  出现等幅振荡,系统为临界稳定状态。而系统的闭环极点  $-p_i$  和  $-\sigma_j \pm j\omega_j$  仅与系统传递函数的分母多项式有关,也就是取决于系统的结构和参数。由此可知,稳定性是系统的固有属性,与输入信号和初始条件无关。

由上分析得,系统稳定的充分必要条件是:系统的特征根(也就是系统的闭环极点)全

为负实数或具有负实部的共轭复根。也可以说闭环极点(特征方程的根)全部位于  $s$  平面左半部。

利用稳定的充分必要条件可以进行系统稳定性的判断,结论如下:

当系统的特征根全部位于  $s$  平面左半平面时,即系统的特征根为负实根或具有负实部的共轭复根时,系统是稳定的。

当系统有位于  $s$  右半平面的特征根时,即系统有正实根或具有正实部的共轭复根时,系统是不稳定的。

当系统有共轭纯虚根(位于  $s$  平面的虚轴上),而其余特征根均位于  $s$  平面的左半平面时,系统是临界稳定的。

总结特征根的分布与系统稳定性的关系如表 3.1 所示。

表 3.1 特征根的分布与系统的稳定性

特征根的分布	系统的稳定性
全都位于 $s$ 平面左半平面	稳定
除了在虚轴上,其余均位于 $s$ 平面左半平面	临界稳定
至少有一个位于 $s$ 平面右半平面	不稳定

一阶系统的特征方程为  $D(s) = a_0s + a_1 = 0$ ,特征根为  $s = -a_1/a_0$ ,只要  $a_1, a_0$  都大于 0,则系统稳定。

二阶系统的特征方程为  $D(s) = a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$ ,特征根为  $s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$ ,只要  $a_2, a_1, a_0$  都大于 0,则系统稳定。

三阶以上的系统,求特征根较为困难时,采用下面介绍的代数稳定性判据进行判断。

### 3.2.2 代数稳定性判据

利用稳定性的充分必要条件来判断系统的稳定性,需要求出系统的特征根,当系统的阶次高于 3 时,解特征方程就比较困难。所以有人提出了一种方法,不用解特征方程,利用方程根与系数的关系就能确定出特征根在  $s$  平面的分布情况。这就出现了一系列代数判据,虽然这些判据的形式稍有不同,但是结论是相同的。下面介绍比较具有代表性的劳斯判据和赫尔维兹判据。

#### 1. 劳斯判据

1877 年, E. J. Routh(劳斯)在剑桥“Adams Prize”奖(亚当斯奖,两年一次,授予在该委员会所选的科学主题方面的最佳论文,1877 年的主题是“运动的稳定性”)评比中,以论文“根据多项式的系数决定多项式在右半平面根的个数”夺得桂冠,Routh 的这一成果现被称为劳斯判据。

设系统的特征方程的各项系数  $a_0, a_1, \dots, a_n$  均为实数,特征方程为

$$D(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (3.14)$$

特征方程有  $n$  个根。设有  $k$  个实根  $-p_i, r$  对共轭复根  $-\sigma_j \pm j\omega_j, k + 2r = n$ ,则特征方程可