第 1 章

初识数学

1．1+1永远等于2吗

在数学领域，有一个连3岁幼儿都能看懂的公式，你知道是什么吗？

没错！就是1+1=2！

幼儿最早开始认识数字，几乎都是从 1+1=2 起步的。对于我们现代人来说，1+1=2是一个极为简单的公式，然而对于原始人来说，这无疑是一个具有史诗意义的难题。它昭示着自然数的诞生，以及数字的一个非常重要的性质——可加性，这是人类文明史上一个极其伟大的时刻。

那么，1加1为什么等于2呢？

意大利数学家皮亚诺巧妙地运用公理证明了这个公式的正确性。

首先，我们需要了解什么是公理。公理是指依据人类理性，无须证明便不言而喻的基本事实。简单来说，就是经过人类长期反复的实践检验，不需要加以证明就知道一定是正确的命题。

皮亚诺用于证明1+1=2的公理共有5条，分别如下。

公理1：0是自然数。

公理2：每一个确定的自然数 a，都有一个确定的后继数 a'，a'也是自然数。

公理3：不同的自然数具有不同的后继数。

公理4：0不是任何自然数的后继数。

公理5：假定P(n)是自然数的一个性质，如果P(0)是真的，且假定P(n)是真的，则P(n')也是真的，那么这个性质对所有自然数都是真的。

前4条公理很好理解，第5条公理看起来有些“烧脑”。简单地说，它就是数学中的归纳公理。也就是说，如果有一个自然数具备某个性质，那么所有自然数都将满足这个性质，不满足该性质的就不是自然数。

有了这5条公理，我们就可以证明1+1=2了。

证明过程如下：

对于任意自然数 m，$0+m=m$

对于任意自然数 m 和 n，$n'+m=(n+m)'$

所以：$1+1=0'+1=(0+1)'=1'=2$。

这种证明方法或许有些“烧脑”，暂时无法理解的小朋友可以先忽略。

那么，1+1 一定永远等于 2 吗?

当然，答案并非一定如此。

比如，在一些脑筋急转弯中，1+1 可以等于 4(前面的 1 和中间的+组合在一起像数字 4)，也可以等于王(把 1 写成小写的汉字“一”，然后竖着排列，就变成了一个“王”字)。

再比如，在二进制中，1+1=10；在哥德巴赫猜想中，“1+1”只是一个简称；在我们以后学习矢量运算时，两个模为 1 的矢量相加，由于存在方向性，结果可以为−2 到 2 之间的任意数值……

此外，还有一些带有单位的数字，就更不能简单地认为 1+1=2 了。

例如，一堆沙子加一堆沙子，结果等于一堆沙子；单位不同时，1 小时加 1 分钟，需要先化为相同单位，结果等于 61 分钟；一条狗加一块骨头，单位不同且不能化为相同单位，是不能相加的。

这种例子还有很多，小朋友们可以发挥你们的想象力，给出更多有趣的答案吧！

举一反三

1) 通货膨胀

上小学的小明在学习认识人民币单位换算时，发现了一个非常奇怪的现象:

1 元=100 分=10 分×10 分=1 角×1 角=0.1 元×0.1 元=0.01 元=1 分

1 元怎么变成了 1 分?

小朋友，你知道上面这个计算过程哪里出现问题了吗?

2) 找宝箱

小明和妈妈玩藏宝游戏。两人选定一棵大树，妈妈从树下向东走了 10 步，埋下了一个“宝箱”，小明从树下向西走了 10 步，也埋下了一个“宝箱”。后来，他们把这件事忘记了。5 年以后，他们才想起这件事。他们决定一起去挖自己当年埋起来的“宝箱”。妈妈从那棵大树向东走了 10 步，挖了一会儿，挖出了自己的“宝箱”。小明从树下向西走了 10 步，可是挖了半天也没有挖到自己的“宝箱”。

你知道小明的宝箱去哪里了吗?

3) 填空题

上小学的小明在学习简单的加减法之后，发现了一个奇怪的现象，那就是在一

些明显不相等的算式中，加上一些特定的计量单位，等式竟然成立了。比如5(月)+7(月)=1(年)，根据这个思路，你能在下面数字后面的括号里填上合适的计量单位，让这些等式成立吗？

400(　)+600(　)=1(　)

360(　)−36(　)=13.5(　)

3(　)+4(　)=1(　)

4)　马和猎狗

一只猎狗追赶一匹马，狗跳 6 次的时间，马只能跳 5 次；狗跳 4 次的距离和马跳 7 次的距离相同。马在前面，跑了 5.5 公里以后，狗开始在后面追赶。

请问，马再跑多长的距离，才能被狗追上？

5)　金鸡

王老师买了一只 2 斤重的鸡回家。妻子看到了，问多少钱一斤？王老师说 10 元一斤。妻子突发奇想，说道："假如黄金每克 300 元，这只鸡要是金子做的，那它可就值 30 万元了。"王老师笑了笑说："这只鸡要是金子做的，它起码值上百万元。"

请问，他们俩谁说得对？

举一反三参考答案

1)　因为带有单位的数字是不能简单地进行乘法运算的。

比如，1 米(m)×1 米(m)是不能简单地等于 1 米(m)的，而应连同单位一起计算，正确的结果应该是 1 平方米(m^2)。当然，不是所有带单位的数字都能直接进行乘法和除法运算，只有那些有特殊含义的物理量是可以进行乘法和除法运算。比如，路程(m)÷时间(s)=速度(m/s)，重力 G(N)=质量 m(kg)×重力加速度 g(9.8 N/kg)，等等。

2)　因为小明长大了，步子也变大了，所以，现在走 10 步的距离比小时候长，位置不再是原来埋宝箱的位置了。

3)　400(克)+600(克)=1(千克)；360(小时)−36(小时)=13.5(天)；3(天)+4(天)=1(周)。

4)　设马跳 1 次的距离为 1 个单位距离，则狗跳 1 次的距离为 7/4=1.75 个单位距离。

在相同时间内(取狗跳 6 次的时间，马跳 5 次的时间)，狗跳的距离为 1.75×6=10.5

个单位距离，马跳的距离为 $1\times5=5$ 个单位距离，所以，狗和马的速度比为 $10.5/5=2.1$。

设马被狗追上时，跑的总距离为 S 千米，则追赶过程中，狗跑的距离为 S 千米，马跑的距离为 $(S-5.5)$ 千米，由相同时间内，距离比等于速度比，可得方程：

$S/(S-5.5)=2.1$，

解得：$S=10.5$(千米)，

所以，马一共跑了 10.5 千米，即又跑了 5 千米时，才被狗追上。

5) 两个人说得都对。妻子是按质量计算的，王老师是按体积计算的。

2．能被 2、3、5、7…整除的数都有什么特征

如果一个整数 a，除以一个整数 $b(b\neq0)$，得到一个整数商 c，并且没有余数，那么叫作 a 能被 b 整除或 b 能整除 a，记作 $b\,|\,a$。

给出一个整数，我们如何能够一眼就看出它能被哪些数整除呢？其实很简单，能够被整除的数，都具有某些特征，只要你掌握了方法，就可以轻松判断。

1) 数的整除性质

(1) 对称性：若 a 能被 b 整除且 b 也能被 a 整除，那么 a、b 两数相等。

(2) 传递性：若 a 能被 b 整除，b 能被 c 整除，那么 a 能被 c 整除。

(3) 如果 a、b 都能被 c 整除，那么 $(a+b)$、$(a-b)$ 与 $a\times b$ 也能被 c 整除。

(4) 如果 a 能被 b 整除，c 是整数，那么 a 乘以 c 也能被 b 整除。

(5) 如果 a 能被 c 整除，a 能被 b 整除，且 b、c 互质，那么 a 能被 $b\times c$ 整除。

(6) 如果 a 能被 $b\times c$ 整除，且 b、c 互质，那么 a 能被 b 整除，a 也能被 c 整除。

(7) 若一个质数能整除两个自然数的乘积，那么这个质数至少能整除这两个自然数中的一个。

(8) 几个数相乘，若其中有一个因子能被某一个数整除，那么它们的积也能被该数整除。

(9) 不为 0 的整数能被自己整除。

(10) 0 能被所有不为 0 的整数整除。

2) 判断数能否被整除

判断一个数能否被特殊数字整除的方法如下。

(1) 判断一个数能否被 2 整除，只需判断其个位数字能否被 2 整除(即个位数字为 0、2、4、6、8)。

(2) 判断一个数能否被 3 整除，只需判断其各位数字之和能否被 3 整除。

(3) 判断一个数能否被 4 整除，只需判断其末尾两位数能否被 4 整除。

(4) 判断一个数能否被 5 整除，只需看其个位数是否为 0 或 5。

(5) 判断一个数能否被 7 整除，将此数的个位数字截去，再从余下的数字中减去个位数字的 2 倍，如果差是 7 的倍数，则原数能被 7 整除。

(6) 判断一个数能否被 9 整除，只需判断其各位数字之和能否被 9 整除。

(7) 判断一个数能否被 11 整除，将此数的奇位数字之和与偶位数字之和作差，若差能被 11 整除，则此数能被 11 整除。

整除歌诀：

一数能被 2 整除，它就必定是偶数；

一数能被 3 整除，数字之和 3 倍数；

一数能被 4 整除，最后两位 4 倍数；

一数能被 5 整除，末尾必是 0 或 5；

一数能被 9 整除，数字之和 9 倍数。

举一反三

3) 三位数

有一个奇怪的三位数，减去 9 后正好可以被 9 整除，减去 8 后正好可以被 8 整除，减去 7 后正好可以被 7 整除。

你知道这个三位数是多少吗？

4) 扑克数字游戏

小李、小王、小刘、小方、小邓和小周 6 个人在一起玩扑克牌数字游戏，用的是一副牌中的 2 到 9，共 32 张牌。每人随机摸了 5 张牌，且每人只能看见自己的牌。每人将自己的 5 张牌排列组成一个 5 位数，得到以下结论，请根据这些话判断剩下的两张牌是什么。

小李：无论如何排列，我的数字都可以被 36 整除。

小王：无论如何排列，我的数字都不可能被从 2 到 9 的所有整数整除。

小刘：我的 5 张牌是一个连子，也就是 5 个相邻数字。

小方：这么说来，咱们 6 个人能够做出来的 5 位数中，最大的数和最小的数都在我这儿了。

小邓：我能够做出来的 5 位数中，最小的可以被 5 整除，最大的可以被 8 整除。

小周：这样啊！那么除了小方以外的 5 个人能够做出来的 5 位数中，最大的数和最小的数都在我这儿了。

5) 赌注太小

王丫丫和李蛋蛋在玩一个小小的赌博游戏。王丫丫开始分牌，并且定下了以下规则：第一局输的人，输掉他所有钱的 1/5；第二局输的人，输掉他那时拥有钱的 1/4；而第三局输的人，则须支付他当时拥有钱的 1/3。

于是他们开始玩这个游戏，并且相互间准确付了钱。第三局李蛋蛋输了，付完钱后他站起来说："我觉得这种游戏投入的精力太多，回报太少。直到现在我们之间的钱数，总共才相差 7 元。"

这自然是很小的赌博，因为他们合起来一共也只有 75 元的赌本。

试问，在游戏开始时王丫丫有多少钱？

6) 共有元素

仔细观察图 1-1，中间两个字母为左右两边共有，你知道它们之间为什么如此排列吗？

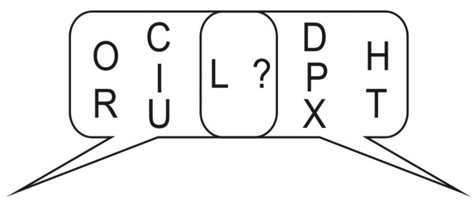

图 1-1

举一反三参考答案

3) 因为这个数减去 9 正好可以被 9 整除，减去 8 正好可以被 8 整除，减去 7 正好可以被 7 整除，说明这个数正好可以被 7、8、9 三个数整除。那么这个数必然是 7、8、9 的公倍数。

7、8、9 的最小公倍数是 504，下一个公倍数为 1008，为四位数。所以这个三位数就是 504。

4) 据六个人说法，我们首先可以推出：

小李：4、8、8、8、8

小王：有 7(1、2、4 张)，另外的只可能是 3、9

小刘：有 3、4、5、6，另外 1 张是 2 或 7

小方：有 9(1～3 张)，有 2

小邓：可能是 5、4、4、3、2，或 5、5、4、3、2，或者 5、5、4、4、4

小周：有 9

由此继续推理可得六个人的牌分别是：

小李：4、8、8、8、8

小王：3、7、7、7、7

小刘：2、3、4、5、6

小方：9、9、6、2、2

小邓：5、5、5、4、4

小周：2、3、3、9、9

因此，剩下的两张牌是两张 6。

5) 第三局结束后，两人钱数之和是 75 元，之差是 7 元，因此，一个有 41 元，一个有 34 元。由于只有 34 能被 2 整除，而李蛋蛋第三局输了，所以李蛋蛋的钱是 34 元。推出第二局结束时，李蛋蛋的钱是 34/2×3=51 元，王丫丫是 75−51=24 元。24 和 51 都能被 3 整除，所以无法判断谁赢了第二局。

假设李蛋蛋赢了第二局，则第一局结束时，李蛋蛋的钱是 51/3×4=68 元，王丫丫的钱是 75−68=7 元。由于只有 68 能被 4 整除，所以第一局也是李蛋蛋赢了，最开始李蛋蛋的钱是 68/4×5=85 元，85 大于 75，所以假设错误，第二局应是王丫丫赢了。

这样第一局结束时，王丫丫的钱是 24/3×4=32 元，李蛋蛋的钱是 75−32=43 元。由于只有 32 能被 4 整除，所以第一局也是王丫丫赢了，则最开始王丫丫的钱应是 32/4×5=40 元，而李蛋蛋的钱是 75−40=35 元。

6) 把 26 个字母按字母表的顺序分别标上 1～26 的数字，左边框中的数字都可以被 3 整除，右边框中的数字都可以被 4 整除，而中间交叉的框中的数字既可以被 3 整除，又可以被 4 整除。

3. 一出生你的公民身份号码就固定了吗

在我们的日常生活中有很多常见的数字编码。这些编码是用预先规定的方法将文字、数字或其他对象编成数码，并将信息、数据转换成规定的电脉冲信号，以便于交互传输。

例如，我们的公民身份号码，从我们一出生，进行出生登记后就固定下来了。根据中华人民共和国国家标准《公民身份号码》(GB 11643—1999)中的有关规定，公民身份号码是由十七位数字本体码和一位数字校验码组成。公民身份号码是特征组合码，排列顺序从左至右依次为：六位数字地址码，八位数字出生日期码，三位数字顺序码和一位数字校验码。

简单地说，就是前六位表示你出生时常住户所在地的行政区划代码，随后的八位表示你出生的日期，接着的三位表示在同一地址所标识的区域范围内，对同年、同月、同日出生的人员编写的顺序号，最后一位是根据前十七位数字计算出来的校验码。

1) 地址码

表示编码对象常住户口所在县(市、旗、区)的行政区划代码。

公民身份号码中的地址码的数字编码规则为：

第一、二位表示省(自治区、直辖市、特别行政区)。

第三、四位表示市(地级市、自治州、盟及国家直辖市所属市辖区和县的汇总码)。其中，01～20，51～70 表示省直辖市；21～50 表示地区(自治州、盟)。

第五、六位表示县(市辖区、县级市、旗)。01～18 表示市辖区或地区(自治州、盟)辖县级市；21～80 表示县(旗)；81～99 表示省直辖县级市。

2) 出生日期码

公民身份号码从第七位到第十四位表示编码对象出生的年、月、日，其中年份用四位数字表示，年、月、日之间不用分隔符。例如，1981 年 05 月 11 日就用 19810511 表示。

3) 顺序码

公民身份号码第十五位到第十七位是顺序码，它是在地址码所标识的区域范围内，对同年、同月、同日出生的人员编定的顺序号。其中，第十七位奇数分配给男

性，偶数分配给女性。也就是说，看一个人的公民身份号码的倒数第二位，就可以知道这个人的性别。

4) 校验码

公民身份号码的第十八位（最后一位）是校验码。作为尾号的校验码，是由号码编制单位按统一的公式计算出来的。

校验码的计算方法如下。

(1) 将公民身份号码前 17 位数分别乘以不同的系数。从第一位到第十七位的系数分别为：7、9、10、5、8、4、2、1、6、3、7、9、10、5、8、4、2。

(2) 将这 17 位数字与对应的系数相乘的结果相加。

(3) 用加出来的和除以 11，看余数是多少。

(4) 余数只可能是 0 至 10 这 11 个数字之一。其分别对应的最后一位身份号码为 1、0、Ⅹ、9、8、7、6、5、4、3、2(即余数 0 对应 1，余数 1 对应 0，余数 2 对应 X，余数 3 对应 9……余数 10 对应 2……)。

Ⅹ是罗马数字 10，当余数为 2 时，校验码为Ⅹ，可以保证公民身份号码符合国家标准，否则就会出现公民身份号码为 19 位的情况。

举一反三

5) 不看日历，如何计算某个日期是星期几

某天，爸爸问小明：“今天是星期几？”小明赶紧跑去翻日历，很快就把答案告诉了爸爸。爸爸想了一下说：“每个星期有 7 天，从星期一到星期日，周而复始。它们之中一定有规律，可以让我们在想要知道某个日期是星期几时，不一定要打开日历来计算。”小明听后也来了兴致，父子俩研究了整整一天，终于找出了能够不看日历就能计算出 2000 年至 2099 年之间任何日期是星期几的方法。小朋友，你知道该如何计算吗？

6) 2020 年是平年还是闰年

很多人都知道，每 4 年会出现一次闰年。2000 年是闰年，2004 年是闰年，2008 年也是闰年……那是不是能被 4 整除的年份都是闰年呢？

当然不是！像 2100、2200 都可以被 4 整除，但 2100 年、2200 年都不是闰年！

想要知道某一年到底是平年还是闰年，该怎么办呢？它到底有什么样的规律呢？小朋友，你知道吗？

7) 金属棒上的图书馆

某一天，一位外星人来到了地球。他和人类进行了和平友好的交流，教给了我们很多新的科学知识和技术。在他准备要离开的时候，地球方面的代表提出将地球上所有图书馆里的藏书作为礼物送给外星人:“虽然我们的科学技术没有你们发达，但是这些书里记录了我们所有的文化，你们感兴趣就带走吧。”

外星人回答道: “这些书是你们地球人几千年来的积累，我们带走不太合适;而且我们的飞船也装不下这么多的书。不过，我们确实对你们的文明很感兴趣，想把这些书的内容复制下来回去好好研究。”

地球代表忙道: “我们可以把书的内容扫描下来，刻录成光盘给你，这样重量会减轻很多。”

外星人道: “不用麻烦，我们只需要一根 1 厘米长的金属棒就可以把你们所有的书的内容复制下来了。”

你知道这个外星人是如何做到的吗?

举一反三参考答案

5) 经过研究我们发现，一个日期是星期几，除了和这个日期是几日有关系外，还和它所在的年份、月份以及当年是否为闰年有关。所以我们编制了日期代码表，如表 1-1 所示。

表 1-1 日期代码

日	代码	月份	代码	闰年	代码
1	1	一月	6	2000	0
2	2	二月	2	2004	5
3	3	三月	2	2008	10
4	4	四月	5	2012	15
5	5	五月	0	2016	20
6	6	六月	3	2020	25
7	7	七月	5	2024	30
10	10	八月	1	2028	35
15	15	九月	4	2032	40
20	20	十月	6	2036	45
25	25	十一月	2	2040	50
30	30	十二月	4	2044	55