

“只要一门科学分支能提出大量的问题,它就充满着生命力,而问题缺乏则预示着独立发展的终止或衰亡。”

——希尔伯特

“数学是一种精神,一种理性的精神。正是这种精神,激发促进鼓舞并驱使人类的思维得以运用到最完善的程度,亦正是这种精神,试图决定性地影响人类的物质道德和社会生活;试图回答有关人类自身存在提出的问题;努力去理解和控制自然;尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻的和最完美的内涵。”

——克莱因

数学方法论是方法论学科中一门独立的不断发展的学科,它在数学研究和教学中发挥着重要作用。关于数学方法论的研究对象、范围、数学方法的层次划分、数学方法论的体系问题等都在讨论、研究与发展之中。

1. 有关概念

为了表达方便,首先对与数学方法论有关的一些概念作简单的介绍。

方法,是一个元概念,没精确定义。它和“集合”等概念一样,不能逻辑地定义,只能概括地描述。方法是人们解决具体问题所采取的方式、手段、途径等。

“方法”一词,起源于希腊语,字面意思是沿着道路运动。其语义学解释是指关于某些调节原则的说明,这些调节原则是为了达到一定的目的所必须遵循的。《苏联大百科全书》中说:“方法表示研究或认识的途径、理论或学说,即从实践上或理论上把握现实的,为解决具体课题而采用的手段或操作的总和。”美国麦克米伦公司的《哲学百科全书》将方法解释为“按给定程序达到既定成果必须采取的步骤。”我国《辞源》中解释方法为“办法、方术或法术”。从科学研究的角度来说,方法是人们用以研究问题、解决问题的手段、工具,这种手段、工具与人们的知识经验、理论水平密切相关,是指导人们行动的原则。

与方法紧密联系的是思想。在现代汉语中,“思想”解释为客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果。《辞海》中称“思想”为理性认识。《中国大百科全书》认为“思想”是相对于感性认识的理性认识成果。《苏联大百科全书》中指出:“思想是解释客观现象的原则。”毛泽东在《人的正确思想是从哪里来的?》一文中说:“感性认识的材料积累多了,就会产生一个飞跃,变成了理性认识,这就是思想。”

数学方法是人们从事数学活动时所使用的方法,是人们在数学活动中为达到预期目的而采取的手段、途径和行为方式中所包含的可操作的规则或模式。数学活动包括研究和讨论数学发展规律、数学思想方法以及数学中的发现、发明、创新法则,也包括用数学语言表达事物的状态、关系、过程,也包括推导、运算、分析以及解释、判断、猜想等。所以,数学方法是以数学为工具进行科学研究的方法,即用数学语言表达事物的状态、关系和过程、经过和推导、运算和分析,以形成解释、判断和猜想的方法。数学活动有宏观和微观之分,所以数学方法也有宏观和微观之分。

方法论是把某种共同的发展规律和研究方法作为讨论和研究对象的一门学问。方法论是人们关于认识世界和改造世界的根本性的科学,是人们总结科学发现或发明的一般方法的理论。

数学方法论是研究数学的发展规律,数学的思想、方法、原则,数学中的发现、发明和创新法则的学科。它隶属于科学方法论的范畴,是科学方法论在数学中的具体表现。

数学知识、数学方法、数学思想是数学知识体系的三个层次,它们互相联系、互相依存。知识是人们在改造世界的实践中获得的认识和经验的总结,是人类文化的核心内容。在数学学科中,概念、法则、性质、公式、公理、定理等属于知识的范围。长期以来,人们一直思考着:这丰富多彩的数学内容反映了哪些共同的、带有本质性的东西呢?答案是数学思想。思想是客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果,是从大量的思维活动中获得的产物,经过反复提炼和实践,如果一再被证明为正确,就可以反复被应用到新的思维活动中,并产生出新的结果。数学思想是数学知识中奠基性的成分,是使人们获得概念、法则、性质、公式、公理、定理等必不可少的基础,它是人类文化的重要组成部分,是数学文化的核心内容。它作为数学知识内容的精髓,是铭记在人们头脑中起永恒作用的精神与态度。数学知识是数学方法解决问题所依赖的材料,是数学方法、数学思想的载体;数学方法是处理、探索、解决问题,实现数学思想的途径、手段与工具,是数学思想的基础,是数学思想发展的前提,“方法”是指向“实践”的,是理论用于实践的中介;数学思想是对数学知识和数学方法的进一步抽象和概括,是一类数学方法本质特征的反映,它比数学方法更本质、更深刻。数学思想通过数学方法来体现,它蕴含在数学知识的发生、发展和应用的全过程,是数学知识结构形成与发展的内在动力,也是知识化为能力的桥梁。数学方法的应用、实施与数学思想的概括、提炼相互为用、互为表里。数学思想指导数学方法,数学方法体现数学思想。数学思想是具体数学知识的本质与内在联系的反映,具有高度的抽象性与概括性。数学方法尚具有某种外在形式或模式,作为一类数学方法的概括的数学思想,只表现为一种意识或观念。同一数学成就,当用它去解决别的问题时,就称之为数学方法,当评价它在数学体系中的自身价值和意义时,称之为数学思想。当我们强调指导思想,解题策略时,称之为数学思想;强调操作时,称为数学方法,往往不加区别,泛称数学思想方法。简单地讲,数学是一个有机整体,问题是数学的心脏,知识是数学的躯体,方法是数学的行为,思想是数学的灵魂。从学习者的角度来说,运用数学方法解决问题的过程就是感性认识不断积累的过程,当这种积累达到一定程度时就会产生飞跃,从而上升为数学思想。例如,化归思想方法是研究数学问题的一种基本思想方法。我们在处理和解决数学问题时,总的指导思想是把问题转化为能够解决的问题,这就是化归思想。而实现这种化归,就是将问题不断地变换形式,通过不同的途径实现化归,这就是化归方法。

数学活动的核心是数学思维活动,数学方法实质上是数学思维活动的方法,是数学思维活动的步骤、程序和格式,它体现了人的意识的能动作用,因而数学方法论的研究离不开数学思维的应用。

数学思维是人脑和数学的空间形式、数量关系、结构关系交互作用并按照一般思维规律认识数学内容的内在理性活动。思维活动是按照客观存在的数学规律的表现方式进行的,具有数学的特点和操作方式。数学学习或研究是数学思维过程和数学思维结果这二者的有机结合。因而,也许我们可以说数学思维是“动”的数学,而数学知识本身是“静”的数学。数学知识是数学思维活动的产物。当然,在数学思维过程中,并非与数学知识的表述一样,离不开抽象的逻辑思维,而是综合地、交错地运用了抽象思维与形象思维以及直觉思维。

由以上的讨论可知,数学方法、数学思想方法、数学思维方法等概念同时出现在所难免。

另外,还可能会出现“思路”“思绪”“思考”“意识”这些词语。一般来说,“思路”是指思维活动的线索,可视为串联、并联或网络形状出现的思想和方法的载体;“思绪”是指思路的头绪;“思考”是指进行比较深刻、周到的思维活动,“思路”和“思绪”常作为同义词,并且它们都是名词。“思考”是动词,它反映了主体把思想、方法串联、并联或用网络组织起来以解决问题的思维过程。由此可见,“思考”所产生的有效途径就是“思路”或“思绪”,“思路”或“思绪”是“思考”的结果,是思想、方法的某种选择和组织,且明显带有程序性,对思路及其所含思想、方法的选择和组织的水平,能够反映学习者能力的差异。

当然还可能会出现词语是技巧或招术。解决问题所需要的特殊手段或计策常称为技巧或招术,技巧只能在某些问题中发挥特殊的作用,纯属于技能而不属于能力。“技巧”的教育价值远低于“通法”的价值,“通法”的可仿效性带有较为“普适”的意义,而“技巧”的“普适”要差得多,但是它们也是相互依存的:只有注意技巧,才能揭示方法的产生,共性寓于个性之中,方法正是从门路、技巧之处变通发展而来;实施技巧要以能实施管着它的方法为前提。例如,待定系数法是一种特别有用的“法”。求二次函数的解析式时,用待定系数法根据图像上三个点的坐标求出解析式可看作第一“技巧”;根据顶点和另一点的坐标求出解析式可看作第二“技巧”;根据与坐标轴的交点和另一点的坐标求出解析式可看作第三“技巧”。这三个技巧各有奇妙之处。哪一技巧更好使用,要看条件和管着它们的“法”而定。学习“用待定系数法求二次函数的解析式”,最根本、最要紧的“法旨”就在于明确二次函数的解析式中自变量、函数值和图像上点的横、纵坐标的对应关系;至于一般的点和特殊的点,解析式可以有不同的反映。同一手段、门路、技巧、程序被重复运用了多次,并且都达到了预期的目的,便成为数学方法。

2. 数学方法论的研究内容

方法具有多层次性和多样性。它包括哲学意义上方法、一般科学的方法、具体学科的方法。哲学意义上方法是客观世界中事物最一般关系的反映,是其他一切方法的基础。一般科学的方法是适用于所有科学领域的共同方法,其实质是哲学方法的具体化、特殊化。具体学科的方法是由认识对象的特殊性决定的特殊方法,其实质是前两种方法在特殊领域中的特殊运用。方法也有宏观与微观之分。对同一方法也有宏观与微观的研究视角。这样就使得数学方法论具有丰富的内涵。

从广义角度来说,数学方法论是一门对数学方法进行抽象、概括、综合化和系统化,使数学

方法不断地得到丰富和发展的学科。它与数学、哲学、思维科学、心理学、教育学、数学史等学科有着密切的关系。比如,和数学史的紧密联系,为了对数学中使用的所有认知方法的整体进行研究,就必须在数学的历史发展过程中来考察它,其中包括数学与其他科学以及人类社会各方面的活动的联系。在对数学史的考察中,我们可以看到数学方法、数学思想和数学概念是怎样形成的,各个数学理论是怎样形成和发展的,这样的话,数学方法论中的许多方法和原理都是从数学发展史中总结归纳出来的。所以数学方法论选取不同的角度建立的体系可能不同。

本书从这样的两个角度来研究数学方法。从数学学科总体上分析,一方面是把数学学科作为一个系统的演绎科学,使用抽象、概括、演绎等思维方法,形成概念,进行判断推理,形成独立的认识结构,这种论证表述的学习认识数学知识的任务,主要是通过逻辑性思维来进行的。另一方面把数学作为一门实验性的归纳科学,用实验—归纳—推广—类比—联想—猜想等合理思维方法来解决实际问题。

进一步地说,涉及到如下一些方法:

- (1) 建立数学概念的方法。它主要包括形成数学概念的方法,表述数学概念的方法。
- (2) 论证数学命题的方法。它主要包括论证数学命题的方法,也包括某种意义上的发现命题的方法。
- (3) 解答数学问题的方法。主要包括将问题化为数学问题,提炼数学模型方法,也包括将一个数学问题如何求解,化归方法。
- (4) 建构数学知识结构的方法。主要包括使数学知识系统化,建立逻辑体系的方法。

具体地说,数学方法之逻辑基础,也就是概念、判断和推理等;数学方法之来源,观察、抽象与概括的方法;数学方法之灵魂,即化归法;数学体系建立的基本方法,即数学模型方法和数学公理化方法;数学论证的基本方法;数学解题的基本方法;数学思维品质。

3. 学习和研究数学方法论有特别重要的意义

有助于认识数学本质。数学方法论是关于认识规律的科学,它总结了数学科学的认识方法、数学推理的逻辑方法和非逻辑方法,也揭示了数学发现和创造的规律,从而可以使人们从数学的发展方式中把握数学内在的本质和规律。

有助于促进数学的发展。数学上每一项重大成果的取得,都与数学思想的突破及方法的创新有关。笛卡儿创立的坐标法把数与形结合起来,实现了数学思想与方法的重大突破,促成了解析几何的创立,为微积分的诞生奠定了理论与方法的基础。

有助于发挥数学的社会功能。数学方法的研究和总结,不仅在数学的发展中发挥作用,而且在其他科学和社会生产中也发挥作用。发挥数学的社会功能,把数学的思想和方法灵活应用于社会的实践,以便运用数学知识去解决各种实际问题。因此,加强数学方法论的学习和研究,提高数学思想方法的素养,对于发挥数学的社会功能是极为重要的。

习题 1

1. 数学思想与数学方法有什么联系与区别?
2. 学习和研究数学方法论有什么重要意义?

数学方法之逻辑基础

“没有大胆的猜测，就做不出伟大的发现。”

——牛顿

“数学中的一些美丽定理具有这样的特性：它们极易从事实中归纳出来，但证明却隐藏得极深。”

——高斯

“数学家通常是先通过直觉来发现一个定理；这个结果对于他首先是似然的，然后他再着手去制造一个证明。”

——哈代

“数学是一门演绎的学问，从一组公设，经过逻辑的推理，获得结论。”

——陈省身

“要发明，就要挑选恰当的符号，要做到这一点，就要用含义简明的少量符号来表达和比较忠实地描绘事物的内在本质，从而最大限度地减少人的思维活动。”

——莱布尼茨

数学方法之基础是逻辑学。数学方法离不开逻辑学。

逻辑学是研究思维形式及其基本规律的科学。人们无论是在进行思考、交流，还是从事各项工作，都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思想。正确思想的形成过程离不开逻辑，把自己的思想传达给别人，更离不开逻辑。表达思想要靠语言，靠说话和写文章。话是说给别人听的，文章是写给别人看的，所以光自己懂还不行，还要使别人懂，要把思想传达给别人，自己先要有明确的概念和恰当的判断，然后还要合乎逻辑地表达出来。

逻辑学研究概念、判断和推理及其相互关系的规律、规则，以帮助人们正确地思维和认识客观世界。数学是建立在逻辑基础上的，借助于逻辑的基本形式（概念、判断和推理）、逻辑推理规则和逻辑推理方法使数学成为一门独立学科。逻辑方法是数学思维的基本方法，贯穿着整个数学体系。本章简单介绍数学的概念、判断、命题、推理和证明。

2.1 概念与数学概念

2.1.1 概念与数学概念的含义

概念是反映事物本质属性的基本思维形式之一。事物的性质以及与其他事物之间的关系,统称为事物的属性。决定某事物之所以成为该事物并区别于其他事物的属性就叫本质属性。例如,“人”就具有许多属性:骨肉长成,有肤色,有四肢,能直立而行,有脑袋,能思维,会制造和使用工具,有喜怒哀乐,会说话等。在这许多属性中,“会制造和使用工具”就是人的本质属性。这一本质属性只有人才有,其他动物没有。正因有了这一本质属性才把人与其他动物区别开来。当类人猿制造出第一把石斧时,猿就变成了人。要把这一事物与另一事物区别开来,必须掌握事物的本质属性。

这里涉及属性、特征和本质属性等概念,不妨对这三个概念作个简要说明。

属性:在客观世界中,存在着许许多多的事物,每一事物都有本身的性质并和其他事物之间存在一定的关系。事物的性质和事物之间的关系统称为事物的属性。

特征:事物和属性是不可分的,具有相同属性的事物构成一类。属性不同的事物就形成不同的类。事物由于属性相同或不同,形成各种不同的类,就是事物的特征。

本质属性:在一类事物的许多属性中,对该事物具有决定意义的,即决定该事物之所以成为该事物并区别于其他事物的属性,统称为事物的本质属性。

例如:能制造并使用生产工具是人的本质属性,两足直立、有感情、蓝色眼睛、黑色头发等属性都是人的非本质属性。

人们对客观事物的认识,一般是通过感觉、知觉形成印象(建立观念),在此基础上,运用比较、分析、综合、抽象、概括等方法,逐渐认识、抽象出事物的本质属性和特征,并借助词语形成反映该事物的概念。如:自然数产生于计数。“数”与某具体的事物联系在一起,3是由三个苹果,三个手指等抽象出的数量的共同特征。

概念是理性思维的产物,任何一门科学都是由一系列概念构成的理论体系。数学概念是反映客观事物空间形式和数量关系的本质属性的思维形式,它反映的是一类具有共同属性的事物(能区别于其他事物)的全体。概念是数学的“细胞”,离开数学概念便无法进行数学思维,也无法形成数学思想与方法,数学中的每一个判断、每一种推理都是在数学概念的基础上展开的。

数学概念是用数学语言表达的,其主要表达形式是词语或符号。例如,“函数”“直线”“圆”“实数”“平分线”“方程”等都分别表示一个数学概念;“=”“<”“⊥”“ $\sin x$ ”“ $\cap$ ”等符号,也都分别表达一个数学概念。

数学概念的产生有多种途径:

① 从现实模型中直接反映得来。比如,几何中的点、线、面、体——从物体的形状、位置、大小关系等概括出来;自然数——从手指数目和其他单个事物排列次序抽象出来。

② 经过多级抽象概括而产生和发展而成。比如,复数 $\leftarrow$ 实数 $\leftarrow$ 无理数 $\leftarrow$ 有理数 $\leftarrow$ 正

整数。

③ 经过思维加工,把客观事物理想化、纯粹化后得来。比如,直线的“直”和“可以无限延伸”。

④ 数学内部需要而产生。比如,“规定”:任何数乘以0的积为0;为把正整数幂的运算法则扩充到有理数幂、无理数幂,以至实数幂,在数学中,产生了零指数、负整数指数、分数指数、无理数指数等概念。

⑤ 根据理论上有可能提出来的,比如,无穷远点。

⑥ 在一定的数学对象的结构中产生出来,例如:多边形的顶点、边、对角线、内角、外角等概念,具有公共端点的两条射线所成的角,射线绕它的端点旋转所成的角。

概念有内涵与外延两方面的属性。

概念的内涵就是事物的本质属性,通常所说的概念的含义就是指概念的内涵,它回答“是什么”的问题,概念的内涵是对概念本质的叙述,表明了所反映事物的共性。例如:“平行四边形”这个概念的内涵就是平行四边形的所有对象的本质属性总和:两组对边分别平行,两组对边对应相等,一组对边平行且相等等。在整数集合中“偶数”这个概念的内涵是“能被2整除”。

外延是概念量的刻画,表明了反映事物的范围所在。如“平行四边形”这个概念的外延是一切由“平行四边形”组成的图形;“复数”这个概念的外延是实数和虚数。

数学概念的内涵和外延相互联系、互相依赖、互相确定,给定一个概念,意味着就确定了它的内涵和外延。也就是说,概念的内涵严格地确定概念的外延,反之概念的外延也完全确定着概念的内涵。

概念的内涵和外延之间遵循着发展中的反变关系,即当概念的外延集合缩小,就会得到概念内涵增多的新概念,反之,当概念的外延集合扩大就会得到概念内涵减少的新概念。简单地说,概念的内涵扩大,则外延就缩小,概念的内涵缩小,则外延就扩大。

例如,“等腰三角形”其内涵比“三角形”概念内涵大。而“等腰三角形”的外延比“三角形”的外延小,少了那些没有两边相等的三角形。

例如,“方程”比“整式方程”的内涵小(少了“两边都是关于未知数的整式”);而前者比后者的外延大(多了那些两边不都是整式的方程)。

例如,外延缩小的变化:四边形外延——平行四边形外延——矩形外延;内涵增大的变化:四边形内涵——平行四边形内涵——矩形内涵。

通过扩大概念的内涵来缩小概念的外延的办法实现对新概念的认识。如果“平行四边形”概念的内涵增加“有一个角是直角”这个属性,就得到外延缩小的“矩形”概念,这种认识概念的逻辑方法称为“概念的限制”;反之可以通过缩小概念内涵来扩大概念的外延,这种逻辑方法称为概念的概括。例如:在“一元二次方程”中去掉“只含有一个未知数,且未知数的最高次数是2”,便得到“整式方程”;在“整式方程”的内涵中去掉“两边都是关于未知数的整式”,便得到“方程”。这就是概念的概括。

概念的限制与概念的概括的过程正相反。利用它可使我们准确地选择概念,恰如其分地表示我们所要反映的事物。概念的内涵要用定义来揭示,外延常用分类加以明确。借助定义和分类,可以把单个的概念组成相互关联的概念体系。运用概念的限制和概括的逻辑方法可以给新概念下定义,使概念系列化、系统化,便于比较同类概念的异同,更好地掌握概

念的本质属性,也常对某知识系统进行整理和复习,加深对概念的认识。

数学概念的外延和内涵是在一定的数学科学体系中来认识的。

例如,“角”的概念。在平面几何中,其内涵是指具有公共端点的两条射线所组成的图形。在平面三角中,其内涵是指一射线绕它的端点旋转而成的图形。

显见,二者的外延和内涵都是不同的。

再如,方程的“解”与不等式的“解”的概念。

2.1.2 概念间的关系

概念间的关系指的是概念外延间的关系,分为相容关系与不相容关系两种。为叙述方便,现将甲、乙、丙三个概念外延集分别用 A, B, C 表示。

相容关系是指两个概念外延集有公共部分,即 $A \cap B \neq \emptyset$ 。相容关系又包括同一关系、属种关系(也叫从属关系)和交叉关系三种情况。

当 $A = B$ 时,称甲与乙为同一关系;

当 $B \subset A$ 时,称甲与乙是属种关系,甲是乙的属概念,乙是甲的种概念;

当 $A \cap B \subset A$ 且 $A \cap B \subset B$ 时,称甲与乙是交叉关系。

例如,同一概念可用不同词语表达,“矩形”与“长方形”。

例如,增函数与函数是具有属种关系的两个概念,增函数是函数的种概念,函数是增函数的属概念。

例如,矩形和菱形这两个概念的关系是交叉关系,利用它们的公共属性概括出新的概念“正方形”(是它们的公共元素)。

两个概念间的同一关系、属种关系和交叉关系可以用如图 2.1 所示的简图来表示。

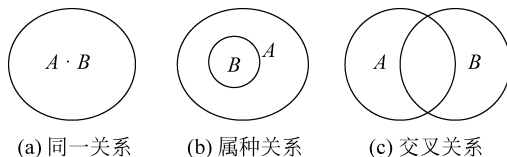


图 2.1

有一个讽刺迂秀才的笑话:

从前有一个秀才,步行外出,走到一条小水沟跟前,过不去了。他问路旁的农民怎样才能过沟。农民说:“跳过去就是了。”于是,这位秀才便站立沟沿,双脚并拢,向上一跳,“扑通”一声,跳到沟里了。农民禁不住笑了,说:“你为什么不一脚在前,一脚在后,偏要双脚并拢呢?”秀才责怪农民说:“两足并腾谓之跳,一足先腾谓之跃,你告诉我的是跳,不是说的跃。”

这位秀才的确够迂腐可笑的了。他只会咬文嚼字,不会活用,不知道不同的语词有时可以表达同一个概念。很显然,这里的“跳”和“跃”表达的是同一个概念。

不相容关系是指 $A \cap B = \emptyset$ 且 $A \subset C, B \subset C$ 的情况, A, B 都是同一属概念 C 下的种概念。

不相容关系又包括对立关系和矛盾关系。

当 $A \cup B \neq C$ 时,称甲与乙是对立关系;

当 $A \cup B = C$ 时,称甲与乙是矛盾关系。

例如,相对于属概念“函数”而言,其种概念奇函数与偶函数之间是对立关系。

例如,相对于属概念“实数”而言,其种概念“有理数”与“无理数”之间的关系是矛盾关系;

又如,相对于属概念“数列”而言,其种概念“收敛数列”与“发散数列”之间就是矛盾关系。

属概念 C 中的二个不相容关系概念的对立关系和矛盾关系如图 2.2 所示。

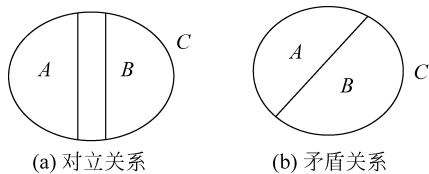
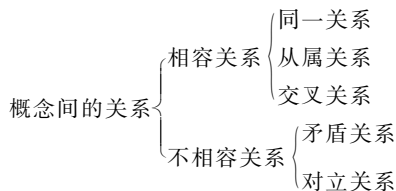


图 2.2

数学概念间的关系可以用以下简单的图表示:



2.1.3 概念的定义及规则

1. 概念的定义

概念的定义就是准确揭示一个概念的内涵或外延的逻辑方法。揭示内涵的定义称为内涵定义,明确外延的定义称为外延定义。

给一个概念下定义就是用简明扼要的语句,使它同相邻近的概念区别开来。一般来说概念是需要用定义来表述和揭示的,但最起始的一些概念,是不需要给出定义的,称为原始概念。原始概念是定义其他概念的基础,也就是说,一个概念是用其他概念来定义的,这里的其他概念也是用别的概念来定义的,这样就形成了一个概念系列。这一概念系列不能无穷无尽,否则没办法理解和把握。比如“点”“线”“面”“集合”等是原始概念。对原始概念可以做描述性的解释或说明。

任何定义都由三部分组成,即被定义项(D_s)、定义项(D_p)和定义联项,其中被定义项是需要加以明确的概念,定义项是指用来明确被定义项的概念,定义联项是指用来连接定义项与被定义项的词语。定义的叙述方式常有: D_s 就是 D_p , D_s 等于 D_p , D_p 叫做 D_s , D_p 称为 D_s 等。例如:“正方形是四边相等、四角为直角的四边形”,这是正方形的定义。在这个定义中,“正方形”是被定义项,“四边相等、四角为直角的四边形”是定义项,“是”是定义联项。

例如,平行四边形就是两组对边分别平行的四边形。

D_s 联项 D_p

2. 数学中常用的定义方式

(1) 属加种差定义

定义项 D_p 由与 D_s 最邻近的属概念加上用来区别 D_s 与其他同级种概念的那些本质属

性(种差)构成。

公式为“被定义概念”=“属概念”+“种差”。

例如:两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形,即“四边形”+“两组对边分别平行”=“平行四边形”。

这里的平行四边形是Ds,四边形就是与Ds最邻近的属概念,种差就是两组对边分别平行。

用“四边形”作属概念,选择不同的种差,可给出平行四边形下面几组定义:

- ① 两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形;
- ② 一组对边平行且相等的四边形叫做平行四边形;
- ③ 两组对边分别相等的四边形叫做平行四边形;
- ④ 对角线互相平分的四边形叫做平行四边形。

在同一教材体系中,一个概念只能采用一个定义。也许是为了和“平行四边形”这个名称协调一致,一般选用第①的定义。其他定义都被表述为一个性质定理或判定定理。

例如,定义④被“分解”为:

平行四边形性质定理:平行四边形的对角线互相平分。

平行四边形判定定理:对角线互相平分的四边形是平行四边形。

这种借助已知属概念的内涵来揭示其某种概念内涵的定义方式属演绎型定义方式,非常精炼、准确、明了,还有助于揭示概念间的各种关系,把概念系统化,十分常用。

(2) 发生式定义

它是属加种差定义方式派生出来的一种特殊定义方式。就是用被定义项Ds所反映的对象产生或形成的过程作为种差来下定义的方式。

定义基础不是事物的存在,而是它的产生和形成过程。它即是把只属于被定义概念,而不属于其他任何事物的发生或形成的特有属性作为种差的定义。

例如:

- ① 在平面上射线绕它的端点旋转所成的图形叫做角。
- ② 把数和表示数的字母用代数运算符号连接起来的式子叫做代数式。
- ③ 平面内一个点绕着一个定点做等距离运动所成的封闭曲线叫做圆。
- ④ 一个圆沿着一定直线滚动时,圆周上的一定点的轨迹叫做摆线。

立体几何中有关旋转体的概念(如图柱、圆锥、圆台等);解析几何中,椭圆、双曲线、抛物线、渐近线、摆线等都是采用发生式定义的。

这些定义方式的共同特点:把被定义概念的属概念(不一定是最近邻近的)加上被定义的概念的发生过程,即把概念的发生过程作为种差。

有的概念虽然是发生式定义,但未必能明显地写成“属加种差”的形式。如排列、组合、某事件的概率。

“排列”定义为:“从 n 个不同元素中,任取 m ($m \leq n$)个,按照一定的顺序排成一行,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列”。

例如,圆是平面上到定点的距离等于定长的点的轨迹。

(3) 关系定义

它是一种特殊的属加种差定义方式。用被定义项Ds与其他同属种概念之间的关系作