第1章

优化设计简介

1.1 优化与设计

1.1.1 优化

古之工匠历来有对作品不断打磨追求完美的精神，于是在这一精益求精的过程中便有了“优化”的概念。“优化”一词本意是指采取一定的措施使作品变得优异，这里的“措施”通常代表对事物的取舍，正如工匠在雕琢璞玉时需对玉石不断打磨、凿刻以取其精华去其糟粕，使之趋于完美的过程。现今“优化”一词多表示为了在某方面更优秀而放弃其他不太重要的方面。随着时代的进步，优化的理念和思想已经贯彻于当今社会的各行各业中，其中在制造业的产品设计领域最具代表性。

1.1.2 设计

“设计”是指把一种设想经过合理的规划、周密的计划，再通过各种方式表达出来的过程。人类通过劳动改造世界，创造文明，创造物质财富和精神财富，而最基础、最主要的创造活动是造物。设计便是对造物活动进行预先计划，可以把任何造物活动的计划技术和计划过程理解为设计。“设计”的种类相当广泛，在许多领域有应用，如商业设计、服务设计、工业设计、软件设计、传达设计、形象设计、机械设计、城市设计等。“设计”的方法也因其应用领域的不同而多种多样，本书主要介绍的是工业产品的设计。

早期人类的设计过程主要通过手绘图纸及符号文字等来传达设计意图。但随着20世纪计算机科学技术的快速发展，现如今的设计过程早已告别了耗时耗力、复杂烦琐的人力设计流程，取而代之的是各式各样可满足各个应用领域设计标准的计算机软件，如Auto CAD、3Ds Max、CAXA、SolidWorks、Pro/E等。这类设计软件的产生和崛起大大加速了人类社会各类生活生产工具的设计流程和更新速度。

1.2 优化设计及其发展

1.2.1 优化设计

优化的概念最早就是伴随着设计过程产生的,优化设计就是一种对设计过程进一步提炼改进的方法,从多种设计方案中选择最佳方案以获得更完美的设计结果。通常设计方案可以用一组参数来表示,这些参数有些已经给定,有些没有给定,需要在设计中优选,称为设计变量。如何找到一组最合适的设计变量,使之在允许的范围内使所设计的产品结构最合理、性能最好、质量最轻、成本最低,同时设计的时间又不太长,这就是优化设计所要解决的问题。

随着基础科学的发展和计算机技术的进步,现如今的优化设计方法有着更严谨的理论基础和更高的设计效率。它以数学中的最优化理论为基础,以计算机为手段,根据设计所追求的性能目标建立目标函数,在满足给定的各种约束条件下,寻求最优的设计方案。

通常一个完整的优化设计过程包括以下步骤:

(1) 建立优化设计问题的数学模型。优化设计问题通常来自人类生活和生产实践中的某个过程或某个实践对象,通过研究与该过程或该对象相关的系统组成要素及各组成要素之间的客观联系可以构建起对应的物理模型,而后再将该物理模型用数学语言表达并定义优化目标和相关约束,即可得到该优化设计问题的数学模型。

(2) 选择最优化算法。最优化算法是指解决最优化问题的数值计算方法,它主要运用数学方法研究各种系统的优化方案,为优化设计问题的求解提供途径。该过程不存在通用有效的普适性算法,需要根据优化问题的数学模型特征选择合适的求解算法,常用的最优化算法有逐步逼近法、线性规划方法、非线性规划方法等。

(3) 程序设计。随着计算机技术的高速发展,如今优化设计问题都通过计算机程序进行实际求解。该过程将根据前期构建的优化设计问题的数学模型和所选择的最优化算法设计程序执行步骤并编写对应的程序代码。

(4) 利用计算机程序筛选最优设计方案并输出设计结果。该过程将在计算机内通过简单的二进制运算自动完成。随着现代计算机计算能力的不断提升,优化设计问题的求解速度越来越快。

1.2.2 优化设计发展简史

优化设计的思想由来已久,但最早形成一套完备的理论体系主要出现在工程结构设计领域。J. C. 麦克斯韦于 1854 年、J. H. 米歇尔于 1905 年就曾研究过在不

加任何形状约束条件下桁架式结构的最优设计问题。他们的工作在理论上有一定的意义,但所得结果往往在工艺上无法实现。到 20 世纪 40 年代,在航空结构的构件设计中提出了所谓的“同步极限”准则,即认为一个构件的最优设计应使它在受力后各部分同时达到极限状态。求解方法一般采用经典的受等式约束的函数极小化理论,但是这种方法只能处理一些简单的问题,例如,处理形状简单的薄壁结构部件的优化问题。此外,还有学者曾提出满应力设计准则,即认为最优结构每个部件的应力应在至少一种工况下达到其容许限值。对于静定结构,满应力准则是不难实现的,但是对于静不定结构,满应力设计需要经过多次反复分析和修改才能完成,在还没有电子计算机的时代,这是很难实现的[1]。

第二次世界大战期间,美国在军事上首先应用了优化设计技术。20 世纪 60 年代初,出现了现代化的结构优化设计理论和方法,它是以利用电子计算机为基础的。1967 年,美国的 R. L. 福克斯等发表了第一篇机构最优化论文。1970 年,在 C. S. 贝特勒等用几何规划解决了液体动压轴承的优化设计问题后,优化设计在机械设计中得到了广泛应用和发展。随着数学理论和电子计算机技术的进一步发展,优化设计已逐步形成为一门新兴的独立的工程学科,并在生产实践中得到了广泛应用[1]。

1.3 优化设计的不足及发展趋势

1.3.1 优化设计的不足

尽管求解优化设计问题的算法很多,但仍可依据求解问题有无约束条件将优化算法分为无约束优化算法和约束优化算法两类。线性约束优化和无约束优化算法是求解非线性优化问题的基础。无约束优化算法主要包括坐标轮换法、梯度法(最速下降法)、牛顿法、共轭梯度法、Powell 法、变尺度法、单纯形法等。约束优化算法主要包括 Monte Carlo 法、随机方向搜索法、复合形法、可行方向法、广义简约梯度法、罚函数法、序列线性规划法、序列二次规划法、遗传算法等[2]。

在无约束优化算法中,各种优化方法各有优、缺点。坐标轮换法[3]具有不需要导数信息的优点,计算过程比较简单,程序实现也比较容易,但存在算法收敛速度较慢、计算效率低等缺点。坐标轮换法主要用来解决优化问题设计变量数目小于 10 的小规模无约束优化问题;另外,坐标轮换法还可解决目标函数的等值线为圆或平行于坐标轴的优化问题。与其他无约束优化算法相比,梯度法(最速下降法)[4,5]具有方法简单等优点,计算效率在最初几步迭代时较高,且对初始点不敏感,因而常与其他方法一起使用,但梯度法(最速下降法)需要目标函数的一阶导数信息。求解无约束优化问题的牛顿法对给定的初始点比较敏感。如果初始点选择的比较好,则其解的收敛过程会很快;如果初始点选择不当,则其解可能会出现不

收敛的情况。另外,牛顿法存在计算过程复杂、计算量特别大等缺点,因此主要适合设计变量数目小的优化问题及目标函数阶次较低的优化问题。共轭梯度法具有收敛速度快等优点,其收敛速度远快于最速下降法。共轭梯度法计算简单,所需要的存储空间少,适合优化变量数目较多的中等规模优化问题(牛顿法一般用到二阶泰勒展开,更高阶导数运算会使得计算更加复杂等)。在无约束优化方法中,Powell 法是计算效率比较高的优化算法之一,它不需要目标函数的导数,是求解中小规模优化问题的有效方法。变尺度法也是计算效率比较高的优化算法之一,可用来解决高阶目标函数的优化问题(通过不断修正矩阵的迭代过程,从而达到改变函数梯度尺度(即降阶的作用),但存在程序实现比较复杂、存储空间比较大等缺点。)单纯形法具有不需要目标函数导数信息、程序实现简单、计算效率比较高等优点。

求解约束优化问题的约束优化算法一般是以非常成熟的无约束优化算法、线性规划和二次规划类优化算法为基础发展起来的。一般可将无约束优化算法分为直接法和间接法两类。所谓的直接法就是在优化过程中直接考虑约束条件的优化方法,随机试验法、随机方向搜索法、复合形法都属于直接无约束优化算法。所谓的间接法就是在优化过程中将约束优化问题等效转化为无约束优化问题等相对简单的优化问题,在此基础上再对相对简单的优化问题进行求解。间接法包括如下三类优化方法:

(1) 以线性规划理论为基础,将原约束优化问题转化为线性规划类问题,采用线性规划类算法来求解,主要包括可行方向法、序列线性规划、简约梯度法等。

(2) 以无约束极值理论为基础,将原约束优化问题转化为无约束优化类问题,采用无约束优化算法来求解,主要包括内点罚函数法、外点罚函数法、混合罚函数法等。

(3) 以二次规划理论为基础,将原约束优化问题转化为二次规划类问题,采用二次规划类算法来求解,主要包括序列二次规划法等。

与无约束优化方法一样,各种约束优化方法也是特点各异:Monte Carlo 法具有方法简单、不需要导数信息等优点,但存在求解高维优化问题时计算量大等不足;随机方向搜索法具有优化求解过程收敛快,但存在局部寻优的不足,因而在使用时需采用选择多个不同初始点的策略;复合形法具有程序实现简单等优点,但在解决设计变量和约束条件多的优化问题时优化效率比较低;可行方向法是解决约束优化问题的有效方法之一,适合求解中等规模的优化问题,但存在程序实现复杂等不足;广义简约梯度法具有算法收敛快、计算精度高等优点,但也存在程序实现复杂等不足;罚函数法包括内点法、外点法、混合法等,具有方法实现简单等优点,但存在优化过程不稳定、收敛速度较慢等缺点,适合解决中小规模的优化问题;序列线性规划法收敛较慢,只适用于非线性程度不是很强的优化问题;序列二次规划法是收敛速度较快、优化比较有效的方法之一,比较适合中等规模的优化问

题；遗传算法具有通用性强、不需要导数信息、收敛较快等优点，是近十多年出现的比较有效的优化方法。

1.3.2　优化设计的发展趋势

随着数学理论的发展和计算机技术的不断增强，机械优化设计方法不断突破，设计思路不断开阔。当今的优化正逐步发展到多学科优化设计，结构拓扑优化、智能算法优化设计、结构动态性能优化设计、柔性机械优化、绿色优化、可靠性稳健设计、仿生学、遗传学算法的优化设计、人工智能优化等现代设计理论的引入，大大促进了优化设计方法的更新和完善。机械优化设计给机械工程界带来了巨大的经济效益，随着技术更新和产品竞争的加剧，优化设计的发展前景十分广阔。因此，在加强现代机械设计理论研究的同时，还要进一步加强最优设计数学模型的研究，以便在近代数学、力学和物理学的基础上，使其更能反映客观实际。机械优化设计的研究必须与工程实践、数学及力学理论、计算技术和电子计算机的应用等紧密联系起来，才能具有更广阔的发展前景。同时，在优化技术水平得到提高的同时，国内机械加工工艺水平、加工手段和制造技术也应同步提升才行，否则整体机械水平仍然停滞不前。这不仅要引进加工技术，更重要的是提升加工设备的性能，尤其是数控机床的加工水平。加强与技术发达国家的合作和交流，软、硬件技术共同提升，以期达到机械设计与加工一体化的目标。

参考文献

[1] GALLAGHER R H，ZIENKIEWICZ O C. Optimum Structural Design：Theory and Applications [M]. London：John Wiley & Sons，1973.
[2] 专祥涛. 最优化方法基础[M]. 武汉：武汉大学出版社，2018.
[3] 余俊，廖道训. 最优化方法及其应用[M]. 武汉：华中工学院出版社，1984.
[4] 李学文，闫桂峰，李庆娜. 最优化方法[M]. 北京：北京理工大学出版社，2018.
[5] 余航. 非线性方程组数值解法——梯度法研究[J]. 现代商业，2018，(11)：191-192.

第2章

优化设计算法

2.1 优化设计算法简介

在实际工作中，我们总会遇到以下类似的问题：工程设计参数如何保证在满足设计要求的同时兼顾生产成本；生产计划安排怎样能提高利润并保证产值；城建规划如何既便利群众又保证各行业发展等。类似的问题不胜枚举，它们的特点就是在众多方案中寻找一个满足各方面要求的最优方案，在解决此类问题的时候，建立模型是实现产品优化设计的前提，最优化模型是将实际的生产问题抽象为数学问题，最终可能是一个模型，也可能是多个模型，同时还需要建立模型的约束条件，即人们对目标的期望范围，在建立模型的时候需要尽可能贴近实际需求，一般情况下是将实际问题转化为求解数学模型的最值问题，这是解决优化问题的第一步，也是最重要的一步。

2.1.1 优化模型描述

所谓的优化模型就是对所研究的实际问题进行分析和实验，又以特定的目的为指导方向，建立的一组具有问题变化规律和反映数量关系的数学表达式。

优化模型通常具有三个要素：决策变量、目标函数和约束条件。

决策变量用以设定待定的参数。如果有 n 个变量，那么就表示为 $x_i, i=1,2,3,\cdots,n$。其中用 $\boldsymbol{X}$ 表示由这些实数组成的具有一定排列顺序的数组，即

$$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}} \tag{2-1}$$

并把这一数组看作一个 n 维（列）向量，x_i 则为 $\boldsymbol{X}$ 的第 i 个分量。n 维向量的全体称为 n 维向量空间。分量为实数的 n 维向量的全体称为 n 维实数空间，记为 $\mathbf{R}^n$。在设计模型的时候，没有严格的规则来选择决策变量，而是需要根据实际问题来决定决策变量。

目标函数是用以评价最终目标结果好坏的数学关系式，通常选择最重要的工作

特点来作为设计目标，同时目标函数中的决策变量要能够进行有效计算且有最优解。

约束条件是设计者对决策变量的限制性要求，是客观存在的物质条件限制。约束条件分为几何约束和性能约束，其中几何约束是决策变量的变化范围，而性能约束是基于特定性能需求所推导出的一类约束条件。

由优化模型的概念可以给出优化数学模型的一般形式：

$$\min f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} a_i(\boldsymbol{x}) = 0, & i \in A = \{1, 2, 3, \cdots, l\} \\ a_i(\boldsymbol{x}) > 0, & i \in B = \{l+1, \cdots, l+m\} \end{cases} \tag{2-2}$$

其中，$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 称为决策变量；$f(\boldsymbol{x})$称为目标函数；后两个式子称为约束条件，前者为等式约束，后者为不等式约束，两种约束条件均存在时称为混合约束；min 和 s. t. 分别是英文单词 minimum（极小化）和 subject to（受限于）的缩写。通常以上所述的函数要求连续可微。

根据优化模型的三要素，我们对优化模型进行如下分类：

（1）根据是否存在约束条件，分为无约束模型和有约束模型。

无约束模型即从各种方案中取得最适合该问题的解，它具有以下形式：

已知

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \end{cases} \tag{2-3}$$

求解该函数的最小值。

以图 2-1 为例，在对定义域不做限制的情况下，求解函数 $f(x)$的最小值，显示出现一个全局最小及局部最小。而实际过程中由于是把问题抽象为凸函数形式，对于凸函数而言局部最小即为全局最小，又受限于算法本身，通常只能获取局部最小值作为最优解。

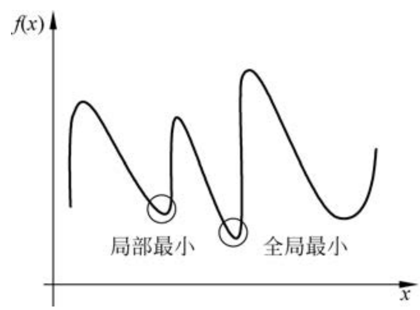

图 2-1　局部最优解

有约束模型即前文所述的等式约束、不等式约束及混合型约束。

等式约束：
$$\begin{cases} \min f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s. t.}\, h_i(\boldsymbol{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, l \end{cases} \tag{2-4}$$

不等式约束：
$$\begin{cases} \min f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s. t.}\, g_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m \end{cases} \tag{2-5}$$

混合约束：
$$\begin{cases} \min f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s. t.}\, h_i(\boldsymbol{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, l \\ \qquad g_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m \end{cases} \tag{2-6}$$

(2) 实际过程中在对目标函数进行最优解的数值求解过程中,决策变量一般会满足一定的约束条件。又以目标函数分类,可以分类为线性规划及非线性规划。

其中,线性规划需要 $f(\boldsymbol{x})$、$g(\boldsymbol{x})$、$h(\boldsymbol{x})$均为线性函数;如果 $f(\boldsymbol{x})$、$g(\boldsymbol{x})$、$h(\boldsymbol{x})$不全为线性函数时,则称为非线性规划。此外,如果 $f(\boldsymbol{x})$为二次函数,而 $g(\boldsymbol{x})$、$h(\boldsymbol{x})$均为线性函数时,则称为二次规划,也称为非线性规划。

(3) 以决策变量的取值为分类依据,可以分为混合整数规划及 0-1 规划。

当决策变量 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 的部分分量被限制为整数时,其对应的优化模型称为混合整数规划;当 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 的各分量被限制为 0 和 1 时,那么对应的优化模型称为 0-1 规划。

2.1.2 优化设计算法分类

优化设计算法是专门用于求解优化模型的方法,这是优化算法与优化模型的本质区别。按照求解模型的策略大致可以分为以下几类:

1. 精确算法[1]

精确算法是指能够求解出最优解的算法,它包括线性规划、动态规划和分支定界法等运筹学中的传统算法。它解决实际问题的做法通常是,先快速求得一个可行解,再将其代入数学模型中,最终获得最优解。这种算法适用于规模小的问题,通常在实际工程中不实用。

2. 启发式算法[2]

启发式算法是一种基于具体问题的求解方法,它通过以往的经验及实验来分析求解,没有固定的、系统的步骤去求解,最终获得近似的局部解。启发式算法包含构造型算法、局部搜索型算法、松弛算法等。

3. 元启发式算法[3]

元启发式算法是一类基于启发式算法的改进方法,与启发式算法的不同之处在于,它是通用的策略方法,不针对具体问题,从而应用更广泛。元启发式算法会提出一些要求,然后使得启发式算法按照这些要求去实现。它包含模拟退火、遗传算法、蚁群算法、粒子群优化算法、人工鱼群算法等。

2.1.3 最优解的评定

不同的问题有不同的算法可供选择,某些特定的问题也有专门的算法,在建立模型时需要将计算误差和计算时间考虑在内。经确算法和启发式算法都是迭代算法,其中,经确算法是以一个可行解为初始值进行迭代,启发式算法等是以一组解为初始值;经确算法要用到导数及偏导数信息,启发式算法等只用到目标函数信

息；经确算法计算量相对较小，启发式算法等适应性更强；经确算法一般只能进行局部深度搜索，启发式算法等可以进行广度搜索。

所有的算法都不是完美无瑕的，评价算法的好坏标准主要有：

（1）算法的收敛性及收敛速度。算法的收敛性表现于迭代计算产生的迭代点集的收敛性，如果算法产生的迭代点集收敛到最优解，但是速度太慢，在期望的时间内得不到满意的解也称不上好的算法，因此收敛性和收敛速度需要同时考虑。

（2）算法的时间复杂度。它是指算法解决问题的时间与问题规模之间的关系。当算法耗时不随问题规模的变化而变化时就可以称为优秀算法，通常时间复杂度与计算规模之间存在一定的关系式，即多项式的和非多项式的。非多项式的计算往往因耗时长而得不到最优解。

（3）算法的适用性。

（4）算法的解的质量等。

全局优化一般是 NP-complete 问题，不同的算法都有可能给出各自的最优解，不同的问题对各个标准的要求也不尽相同，需要根据实际问题和要求采用不同的算法。

2.2 线性规划方法

2.2.1 线性规划方法简介

线性规划是最优化方法中比较成熟的一支，它具有较为成熟的理论和算法，在实际问题中应用广泛，且对于某些非线性规划问题的解法可起到间接的作用。该方法于 1939 年由苏联数学家康托洛维奇首先提出，再于 1947 年由美国数学家丹齐克提出其单纯形方法，并由查恩斯等补充完善，使得线性规划在生产计划、运输及军事等上得到广泛应用。

线性规划数学模型的一般形式为

$$\begin{cases} \max/\min z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \\ \text{s.t. } b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \cdots + b_{1n} x_n \leqslant / = / \geqslant c_1 \\ \quad\ \ b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + \cdots + b_{2n} x_n \leqslant / = / \geqslant c_2 \\ \quad\ \ \vdots \\ \quad\ \ b_{m1} x_1 + b_{m2} x_2 + \cdots + b_{mn} x_n \leqslant / = / \geqslant c_m \end{cases} \tag{2-7}$$

其中，$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 为决策变量；$a_1, \cdots, b_1, \cdots, c_1, \cdots, c_m$ 等为系数。满足约束条件的一组决策变量的值称为一个可行解；线性规划所有可行解的集合称为可行解集或可行域；使得目标函数取得最大或最小值的可行解称为最优解。

式(2-7)可以用矩阵表示为

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \\ \text{s.t. } \boldsymbol{B}\boldsymbol{X} \leqslant \boldsymbol{C} \\ \qquad \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{2-8}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{A} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{X} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{C} = [c_1, c_2, \cdots, c_m]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{2-9}$$

其中,$\boldsymbol{A}$ 是 n 维的价值变量$[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{X}$ 是 n 维决策变量$[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 的约束系数矩阵 $\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}$ 是 m 维的需求向量$[c_1,c_2,\cdots,c_m]^{\mathrm{T}}$,且 $\boldsymbol{C}\geqslant\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{D}$ 为线性规划问题的基矩阵,而其包含的向量为基向量(其对应的变量称为基变量),其余的非基向量(对应为非基变量)。

我们取定基矩阵 $\boldsymbol{D}$,又令非基变量为 0,可以获得约束条件的解为 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,这种方法得到的解为与基矩阵对应的基本可行解。

线性规划问题还需要满足以下 4 个特征:

(1) 需要由一组决策变量来表达一个方案,且变量的取值通常为非负值。

(2) 这组决策变量可以表示为具有线性函数形式的目标函数。

(3) 存在若干约束条件,且其需要由线性表达式组成。

(4) 目标函数能够实现极大化或极小化。

在求解简单的两个变量的一般线性规划问题时,我们可以使用直观的图解法,但是在求解超过三个变量时就很难使用图解法。美国数学家丹齐克于 1947 年最早提出了一种巧妙的方法来解决这个问题,他采用方程组的解与集合中的点的对应关系来处理多维问题。这就需要将不等式统一处理为等式约束方程组,也就是目标函数为极小、所有变量都是非负变量、所有约束右端均为正,这种统一的方程组称为线性规划数学模型中的标准型。它具有以下形式:

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ \text{s.t. } b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1 \\ \qquad b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots + b_{mn}x_n = c_m \\ \qquad x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0\end{cases} \tag{2-10}$$