



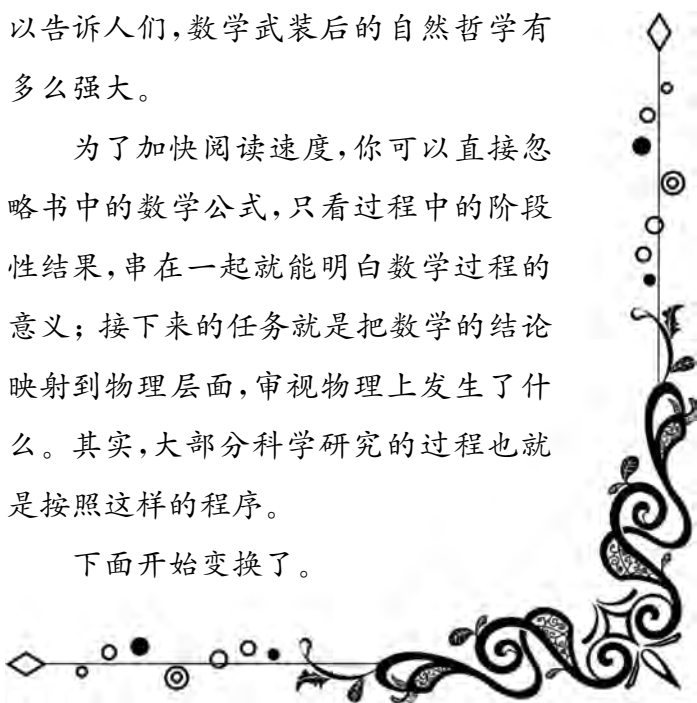
## 第三章

# 神奇数学魔术 精彩傅氏变换

“傅氏变换”全称为“傅里叶变换”，这是一个具有典型代表意义的例子，纯数学的知识，却像魔术一样神奇。它可以告诉人们，数学武装后的自然哲学有多么强大。

为了加快阅读速度，你可以直接忽略书中的数学公式，只看过程中的阶段性结果，串在一起就能明白数学过程的意义；接下来的任务就是把数学的结论映射到物理层面，审视物理上发生了什么。其实，大部分科学研究的过程也就是按照这样的程序。

下面开始变换了。



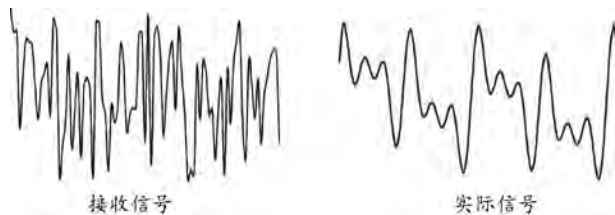
## 一首数学的诗：傅里叶变换

任何一首诗，都可以由一定数量的恰当的词汇组合而成

傅里叶变换是一个纯数学问题，我会尽量介绍得简明易懂。

辩证唯物主义哲学家恩格斯将数学家傅里叶<sup>①</sup>与哲学家黑格尔<sup>②</sup>相提并论，“傅里叶是一首数学的诗，黑格尔是一首辩证法的诗”（恩格斯《自然辩证法》）。如果从柏拉图主义的角度来看，傅里叶变换这个数学工具将现实世界与理念世界的存在相互连接了起来。也就是说，虽然你已经知道某一个存在，但你并不知道这个存在背后所隐藏的另一一些真实的存在到底是什么样子；现在，通过一个数学的工具——傅里叶变换，可以帮助你揭示出那个隐藏的存在。

在介绍傅里叶变换之前，请大家看看下面这幅图。左边是接收信号，杂乱无章，像是一种随机的、无规律的噪声。右边是实际信号，干净、有规律。这两个信号之间，看上去没有任何关系，即便有关系，至少我们肉眼看不出来。



傅里叶变换具有这样的能力，它能在杂乱无章的接收信号中发现隐藏的实际信号，并将它提取出来。

### 傅里叶变换的基本概念

我们来看看诗一般的傅里叶变换，到底是怎么一回事。

傅里叶变换是一个数学演算过程，感兴趣的话可以了解一下它的过程，也可以跳过以下的文字，直接看傅里叶变换的结论。

傅里叶说：“任何连续周期信号都可以由一组适当的三角函数组合而成”，这句话看起来不好理解。我们不妨用硬币支付来类比，深入浅出地解释傅里叶变换。

如果给你所有面值的硬币（例如，1元、3元、5元、7元、9元、11元、……），并且硬币的数量足够多，你是否可以组合出任意数额的付款？当然没问题，并且都可以豪横地套用傅里叶的那句话：“任何数额的付款可以由一组适当面值的硬币组合而成”。

① 傅里叶(Fourier, Jean Baptiste Joseph, 1768—1830), 法国数学家。

② 黑格尔(Georg Wilhelm Friedrich Hegel, 1770—1831), 德国哲学家。

傅里叶的意思就是这样：“一组适当的三角函数”(e<sup>jmω<sub>0</sub>t</sup>),可以“组合”“任何连续周期信号”(f(t))。怎么“组合”呢?相互加起来就行了。即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(m) e^{jm\omega_0 t}$$

其中,  $m\omega_0$  表示的是三角函数的频率,  $m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \dots$ 。

当  $m\omega_0$  很小(接近无穷小)时,上式的级数形式可以改写为积分形式:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

我们用表格列举一个具体的实例,表明付款与信号组合之间的相似性。

连续周期信号	f(t)						
三角函数	e <sup>j0ω<sub>0</sub>t</sup>	e <sup>j1ω<sub>0</sub>t</sup>	e <sup>j3ω<sub>0</sub>t</sup>	e <sup>j5ω<sub>0</sub>t</sup>	e <sup>j7ω<sub>0</sub>t</sup>	e <sup>j9ω<sub>0</sub>t</sup>	e <sup>j11ω<sub>0</sub>t</sup>
F(m)	0	1	2	1	4	2	1
付款额度/元	33.00						
硬币面值/元	0.00	1.00	3.00	5.00	7.00	9.00	11.00
硬币个数/个	0	1	0	1	1	1	1

我们用付款额度类比连续周期信号,  $F(m)$  相当于硬币个数。既然用不同面值的硬币数量能够组合出某个付款额度,那么不同频率的三角函数也可以组合出某一连续周期信号。

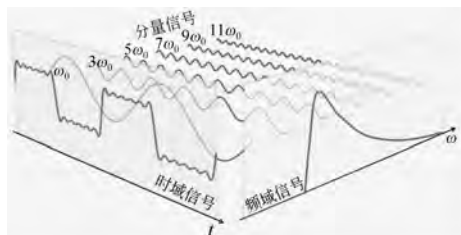
现在的问题是,每一种频率的三角函数,取值多少,也就是  $F(\omega)$  取多大? 我们不可能用穷举法来慢慢地试吧。不着急,傅里叶给了计算方法:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

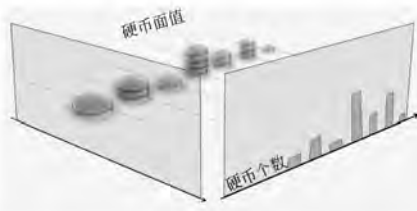
这个公式就称为傅里叶变换公式。

同样的原理,如果已知信号的频率信号  $F(\omega)$ ,也可以恢复出这个信号的时域信号  $f(t)$ ,这个过程称为傅里叶逆变换:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



傅里叶变换



支付面额举例

从前面介绍的过程,我们知道了,任意一个连续周期信号,可以用不同频率的三角函数来组合: ①每一个频率的三角函数(又称作“频率分量”)是否需要; ②需要的强度是多少,这就是傅里叶变换的任务——求解不同频率分量的强度值  $F(\omega)$ 。换言之,通过傅里叶变



换,可以计算出一个连续周期信号的频率分量,而这才是傅里叶变换在物理层面上最价值之所在。时域上的连续周期信号(“时域信号”),它在频域上有多少频率分量,每一个频率分量(“分量信号”)的功率多大,都可以通过傅里叶变换得到,即频域信号。

同样地,也可以通过傅里叶反变换把频域信号变换为时域信号。

上述的两个公式只是简单的数学表达,傅里叶变换的推导过程要比其复杂得多。不过,其复杂过程不是我们关注的重点,只需要了解其本质就可以了。我们再通过一个实例来理解:

例如,有频率分量 1、频率分量 2、频率分量 3、频率分量 4、频率分量 5,它们的频率分别为  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_3$ 、 $\omega_4$ 、 $\omega_5$ ,功率分别为 2、1、2、4、1。这 5 个分量构成的时域信号为  $f(t)$ 。傅里叶变换之后,它的频域信号  $F(\omega)$ 就可以看出,有 5 个频率点,可以得到每个频率点的功率分别为 2、1、2、4、1。

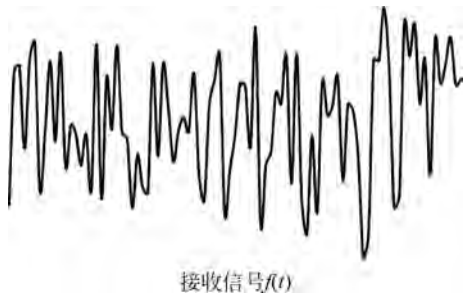
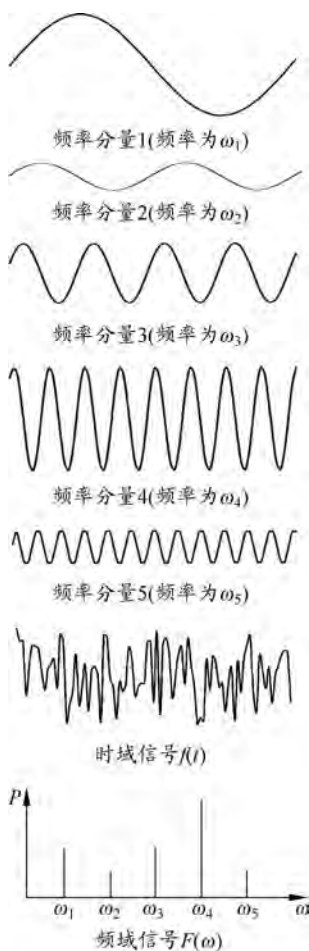
请注意接下来的描述,这是一个结论性的表述(你只需要记住这个结论就可以了,前面的那些公式和解释可以忽略)。

通过傅里叶变换,由时域信号  $f(t)$ 可以得到频域信号  $F(\omega)$ ,在频域上可以观察出信号的频率特征;通过傅里叶反变换,由频域信号  $F(\omega)$ 可以恢复时域信号  $f(t)$ 。

傅里叶变换是一种纯数学的验算,它有什么用处呢? 我们可以通过几个应用实例来了解。

### 信号去噪

在无线通信领域中,干扰和噪声是不可避免的,因为信号的发射端与接收端可能有很长的距离,信号的强度随着通信距离的增加而逐渐减弱,同时噪声与干扰随着距离的增加而快速增大。你可以想象一下这样的场景,运动场上坐满了人,每个人都在贡献着自己的声音:聊天、打电话、背诵诗词、哼小曲、拍掌做游戏、打搅蛋赢了之后歇斯底里的欢笑等。可想而知,运动场是多么的嘈杂。现在你要和你的朋友讲话,如果他在你的身边,勉强可以相互听见对方的声音。现在,你的同学距离你远一点、再远一点……,你就完全听不到他的声音了,



接收信号  $f(t)$

更远一些当然更不行啦。我们的无线通信过程就是这样的处境,四周都是噪声,而可怜的信号就要穿越这些噪声,从发射端传给接收端。接收到的信号就是这副模样,一片噪声——“嗡嗡嗡”的声音。

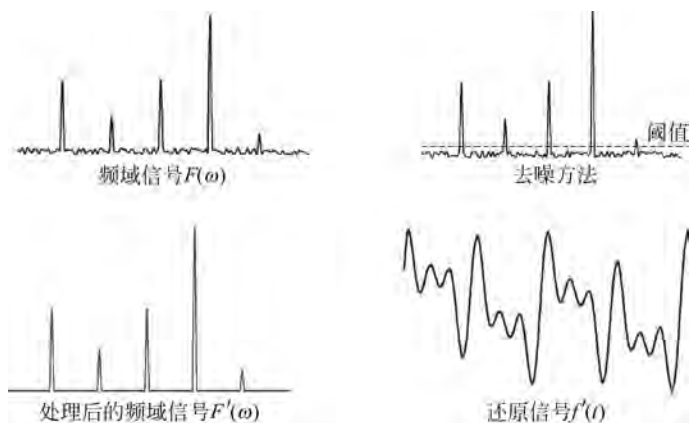
而这些讨厌的噪声和干扰,从来不顾及别人的面子,永远自顾自地随心所欲。我们在通话呢,能不能安静一点? 安静一点! 安静一点啦!!

谁都不理你,你接收到的依旧是这样嘈杂的“嗡嗡嗡”的声音。

怎么办?

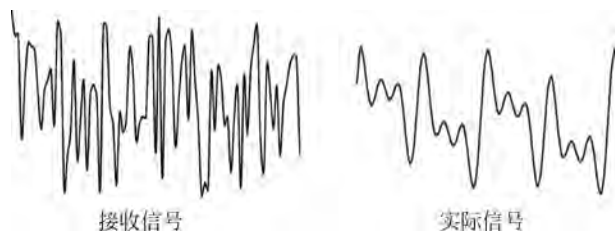
不着急,我把傅里叶介绍给你,他有办法。

傅里叶首先对这个接收信号做傅里叶变换,然后在频域上观察信号的特征。频域信号如图中的左图。我们看到的频域信号要有规律一些,有 5 个突出的峰,再加上一些小的波动。



其实,这 5 个位置的峰就是信号所在的位置,其他那些布满于整个频域的波动就是噪声。在频域上观察,不难发现,在任意的频率上,噪声的功率总是小于信号的功率。既然知道了噪声的性质,就可以找到“去噪方法”。例如,我们在频域上设置一个功率阈值,功率大于阈值的保留原信号功率,小于阈值的除掉这个功率(置 0)。这样,我们就得到了“处理后的频域信号  $F'(\omega)$ ”,这就干净多了。

接下来,使用傅里叶反变换,把频域信号  $F'(\omega)$  再变换到时域上去,便得到了“还原信号  $f'(t)$ ”。这时的还原信号就是单纯的原始信号,噪声完全消除了。



再回到本节开篇的那个问题,这幅图的接收信号,杂乱无章;实际信号,干净、有规律。这两个信号之间,其实存在着相互的联系,但是,我们肉眼看不出来,通过傅里叶变换,我们知道了,实际信号上叠加了强大噪声,就成了杂乱无章的接收信号。这个实际信号犹如一只漂流瓶,漂浮在噪声的无垠大海上,我们把它从波涛之中寻找了出来,寻找它的那只小船就是“傅里叶号”。

## 同一首诗：可以抒发不同的情怀

“除却巫山不是云”不只是写景，也可以用来抒情或叙事

傅里叶的伟大之处不仅仅在于发现了傅里叶变换的数学方法，而且为科学研究提供了两条可行的道路，为人们研究自然哲学和数学指引了可行的方向。

(1) 物理量可以在两个不同的域(维度空间)中观察，在某个维度空间它是无规则的，把它映射到另一个维度空间，它的特征表现或许是不一样的。

(2) 如果把数学与自然现象紧密联系起来，可以在这种联系中发展数学。这就从自然科学的角度证明了柏拉图主义的哲学判断是合理的，即宇宙中的一切只有用数学描述才是精确的、本原的。

事实上，傅里叶开创的这两条科研道路，在后来的科学发展中都得到了验证，我们考察傅里叶之后的近现代科学中的新发现，例如麦克斯韦方程<sup>①</sup>、流体动力学理论<sup>②</sup>、相对论<sup>③</sup>、卡尔曼滤波<sup>④</sup>、盲信号分离<sup>⑤</sup>、压缩感知<sup>⑥</sup>、深度学习<sup>⑦</sup>等，这些数学工具，无一不是从数学的角度描述自然现象，并且有些直接就是数学家面向自然现象的研究成果，或者数学家与自然科学家相互合作的成就。尽管许多科学家或数学家不一定是有意地按照傅里叶的道路行走的，但是，在同一条道路上走成功的人多了，就确认了这条道路是完全行得通的，而傅里叶是开拓这条道路的先锋。

我们还是围绕傅里叶变换再举两个更为直观的例子，看看数学之于物理的价值。

### 图像处理

首先我们看一幅图片，显然这是一幅很糟糕的图片，是隔着半透明网格拍摄的照片，网格将后方的场景遮挡得很严重，已经几乎不能观看了，只能隐隐约约地看出，后面是一个花园的场景。

① 麦克斯韦方程由麦克斯韦于1865年提出，是电磁学与经典电动力学中的开山之发现。

② 流体动力学理论于19世纪中叶到20世纪中叶逐步形成，包括斯托克斯定理、汤姆逊定理、亥姆霍兹定理等。

③ 相对论由爱因斯坦分别于1905年、1915年提出，是关于时空和引力的基本理论，是量子力学的数学基础和两大支柱之一。

④ 卡尔曼滤波由卡尔曼(Rudolf E. Kalman, 1930—2016)提出，1958—1964年他在Research Institute for Advanced Studies(RIAS)做数学研究期间取得了此项成果。

⑤ 盲信号分离由Herault和Jutten在1985年提出，是指从多个观测到的混合信号中分析出没有观测的原始信号。

⑥ 压缩感知由E. Candes、T. Tao、D. Donoho于2006年联合提出，引起学术界广泛关注，在信息论、图像处理、地球科学、光学、微波成像、模式识别、无线通信、大气、地质等领域均有应用，并被《美国科技评论》评为2007年度十大科技进展。

⑦ 深度学习是一种人工神经网络的机器学习概念，2006年，Hinton等提出受限玻耳兹曼机(RBM)网络权值及偏差的CD-K算法以后，RBM就成为增加神经网络深度的有力工具，引发使用广泛的DBN等深度网络的出现。

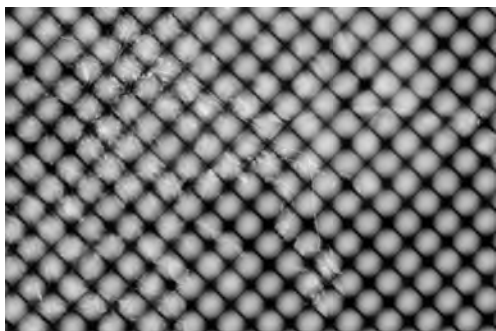
让我们试试看,傅里叶变换能否做些什么。

我们分成三步走:

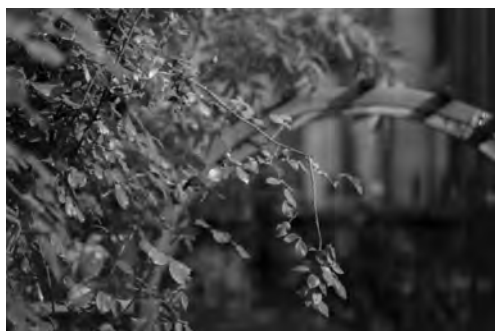
- (1) 对原始信号(即带网格的图片)做傅里叶变换,分析变换域(频域)上的特性;
- (2) 在变换域做适当处理;
- (3) 做傅里叶反变换,将处理后的变换域信号逆变换回到原始域。

经过上述数学层面的三步操作,我们就得到了这样一幅图片,一幅花园的美丽画面展现在我们的面前。原先的网格消失了!

那么,这三步变换,到底发生了什么呢?我们分步骤地分解来看一看。



透过网格拍摄的照片,场景被网格完全遮挡

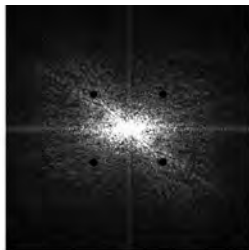
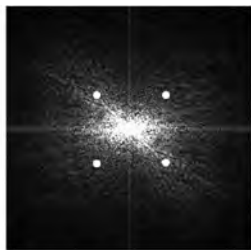


经过傅里叶变换处理后的图像



(1) 第一步,对原始信号(即带网格的图片)做傅里叶变换,就得到了图(a)的结果,分析变换域(频域)上的特性不难发现,图中存在4个明亮的小圆点,这4个很突兀的小亮点,就是原图像中网格在变换域的表现。

(2) 第二步,在变换域做适当处理。我们把这4个明亮的点,其灰度值设置为0,这样成了图(b)的样子,原先4个亮点的位置就变成了4个小黑点。



(a) 原图片在频域的变换结果 (b) 做适当处理后的频域结果

(3) 第三步,做傅里叶反变换。对图(b)的频域信号做逆变换,就可以得到一幅干净的图像,很完美地消除了网格引起的缺陷。

## 红外光谱分析

“红外光谱分析”这个概念的解释,首先要从光学的波长开始。

### 波长与光谱

我们依靠光线的照明才能看到这个世界。阳光是没有颜色的,我们称之为“白光”。红

色的灯笼发出的光,是红色的;蓝色的灯珠发出的光,是蓝色的。不同颜色的光,可以用一个参数来定量地描述它,这个参数叫作“波长”。



彩虹包含无数的色彩,从紫色到红色

我们看到的阳光简称“可见光”,阳光是由不同颜色的光组成的,或者说由不同波长的光组成,这些光的波长为  $380\sim 780\text{nm}$ 。 $1\text{mm}=1000000\text{nm}$ 。 $780\text{nm}$  大约是多长呢?女性头发的直径为  $60000\sim 90000\text{nm}$ ,也就是说,1根头发的直径范围内,可以容纳大约 100 个波长 ( $780\text{nm}$ )。

除了可见光之外,还有两种光是人类的眼睛看不见的,但是它们是客观存在的:紫外光和红外光。紫外光的波长小于  $380\text{nm}$ ,红外光的波长大于  $780\text{nm}$ 。尽管人类的肉眼看不见它们,但是有仪器可以测量到,所以它们是真实存在的。

紫外(UV)	可见光			近红外(NIR)	红外(IR)	远红外(FIR)
200	380		780	2500	25000	200000

单位:nm

现在我们再来看看材料“光谱”是什么意思。

这幅向日葵的照片,阳光从它的背后投射过来,透过向日葵的花瓣之后,黄色的花瓣显得特别明亮,这是我们眼睛的生理视觉的映像。为什么我们看到的花瓣是黄色的呢?

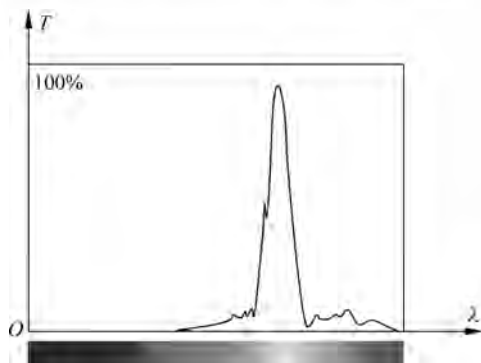
从物理意义上讲,阳光穿过花瓣之后,只有黄色的光透过了花瓣,其他颜色的光全部被花瓣吸收了。所以,我们看到的花瓣是黄色的,不同颜色(波长)的光,透过花瓣时,花瓣对光的透过程度不同,我们可以用一条曲线表示。

首先设定一个坐标,纵坐标是透过率,横坐标是波长。可以看出,这条曲线在黄光的位置透过率特别高,我们称之为“峰”。

我们把这条曲线叫作“光谱曲线”,它反映的是物质对于不同光波长的吸收程度。物体的光谱曲线,可以通过测量得到。如果需要测量的光谱曲线,其波长范围在红外光的波段,我们称之为“红外光谱”。

### 红外光谱分析

红外光谱分析由三部分构成:光学干涉仪、数据采集模块和数据处理系统,其中数据处理系统就是采用傅里叶变换的算法完成的。为了理解傅里叶变换在红外光谱分析中的作用,

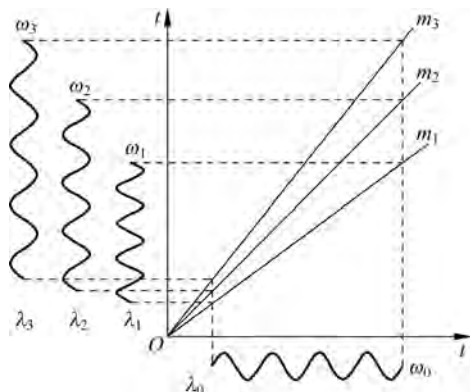
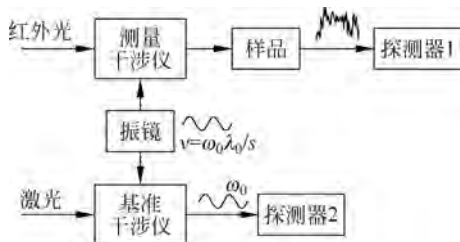


向日葵花瓣的可见光光谱曲线

需要对光学干涉仪、数据采集模块两部分做简单介绍。

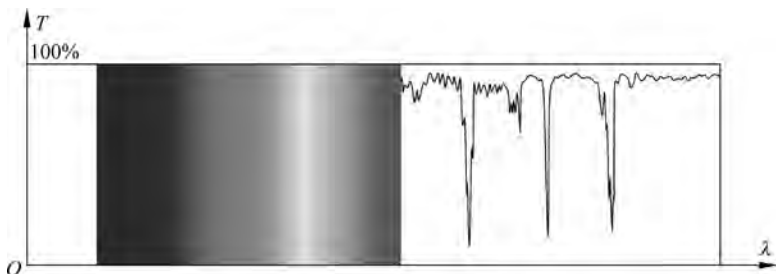
干涉仪有两路，一路是测量干涉仪，另一路是基准干涉仪，两者之间共用一个振镜。在振镜的作用下，两路干涉仪分别输出两路光强随时间变化的信号，其中基准干涉仪的输出光强是标准的正弦波，测量干涉仪的输出光强与样品（被测量的材料）的光谱特性有关。

红外光经过测量干涉仪之后，光波的特性发生了变化，这个变化与红外光中不同波长的光有关系。如果我们设置一个参数“ $m$  数”，并且， $m = \lambda_i / \lambda_0$ ，则红外光中波长为  $\lambda_i$  的光波分量，其调制频率  $\omega_i = m_i \times \omega_0$ 。利用振镜的调制作用，我们将红外光中的不同波长的光按照调制频率区分了出来。



当这些调制后的红外光穿过样品时，样品对不同波长的光具有不同的透过率，但是，由于所有的波长的光混叠在一起了，所以我们还是无法看出样品的光谱特性。

接下来，就该傅里叶变换出场了——我们对透过样品的时域上的光进行傅里叶变换，就可以分解出每一波长下的能量值，从而获得样品的光谱曲线。



## 傅里叶：荒野中孤独斩棘的侠客

不愿放下那份执念，径自寻觅心中的倚天长剑，策马扬鞭、绝尘而去

他做过官，官至总督；当过兵，远征埃及；皈依教会，差点做了神父；研究学问，径自成了院士。他是教师、政治犯、秘密警察、埃及总督、行政长官、拿破仑的朋友、科学院的院士。

他成果卓著，热传导分析的研究工作改变了科学家思考这类问题的方式，成功开启了固体热传导的定量化研究方向。

他为人正直，对许多年轻的研究者给予无私的支持和真挚的鼓励，从而得到他们的忠诚爱戴，并成为他们的至交好友。

他为了梦想而努力，咬住目标而追求。

他坚信数学是解决实际问题的最卓越的工具，按照自己的理念坚持不懈，哪怕清贫一生。主张数学紧密联系一切自然现象，并在这种联系中发展数学。

傅里叶找到了内心的期待，为后人留下千古绝唱。

### 波谲云诡

1830年5月16日，法国巴黎的气温已经转暖。63岁的傅里叶孑然一身，在埃及工作期间落下的心脏动脉瘤越来越严重，时常胸闷、呼吸困难。12天前病情恶化，他爬楼梯时，强烈的咳嗽致使他失足从楼梯摔下来。他的病情加重，全身发冷，无人照应。他关上所有的门窗，穿上厚厚的衣服，打开壁炉，慢慢地感觉舒服多了，壁炉的温暖通过空气辐射溢满整个房间，渐渐地周围暖和起来。

海上的迷雾在消散，渐渐地，光亮起来、透明起来。

7月初的地中海南岸，气温转暖。一轮朝阳从新月沃地的西海岸升起，阳光穿过弥漫的晨雾、懒洋洋地洒在亚历山大港内成排的战舰上。

一望无际的中海，昔日的繁华不再，随之消散而去的，是战争的硝烟。欧洲列强争夺的战场已经从环地中海转移至欧洲内陆和北欧地区，自新大陆发现、新航线建立以来，欧洲各国围绕着三角贸易通道和东方利益的争夺，开始进入白热化阶段。率先开展工业化革命的英国占尽先机，在全球范围内快速扩张、原始资本积累迅速膨胀。英吉利海峡，满载财富的舰队源源不断地从东方驶回英国。英国的黄金船队在法国西海岸来回穿梭，每天成吨的金银财宝不断从东方运回英国。海峡东岸的法国望着这一片繁荣景象，嫉从心中起、怒从胸中生。法国和英国，这对在14世纪爆发过百年战争的老冤家，围绕着殖民地的财富，展开了多次激烈的大战。英法两国的争夺，目标都集中在富饶的东方。

18世纪中期，英法引爆了持续7年的战争，最终10个欧洲列强卷入其中。战争的结果是法国被迫在《巴黎和约》上签字，将加拿大割让给英国，并撤出整个印度，成就了英国的海外殖民霸主地位，开始了它的日不落帝国的传奇。

要想取得战略性突破,开辟更便捷的航道是最佳的选择方案,拿破仑正在实行的挺进埃及的行动,正是他的宏伟而绝密的计划——开凿苏伊士运河。

## 挺进埃及

与英国海军驻扎地中海的霍雷肖·纳尔逊少将隐蔽周旋过后,拿破仑的近400艘舰船巧妙地由亚历山大港登陆,3.5万大军潮水般涌进埃及。接下来面对的是埃及的马穆鲁克的武装,一场场大型的杀戮即将展开,拿破仑胸有成竹。

“不仅仅是占领。这是一次‘文化之旅’,我们的目的是彻底了解埃及,考察埃及的文化、熟悉埃及的风俗、理清埃及的生物、了解埃及的历史、挖掘埃及的资源。”拿破仑扫视着眼前的几位学者,并转向他的左侧,“还有一项重要的任务,贝尔蒂埃将军,你介绍一下。”

贝尔蒂埃<sup>①</sup>习惯性地捋了一下墨绿色军装的袖口,“你们的任务之一是测量河口地形,研究开凿运河的可能性。18世纪,科学家莱布尼茨提出开凿苏伊士运河的设想,总司令认为这是非常有战略价值的建议。运河连通地中海与红海,直抵东方。一旦成功,我们的远东航线将比英国缩短7000千米,伟大的法兰西帝国将摆脱英国对好望角航道的控制,获得远东的海上运输优势,牢牢掌握远东贸易的垄断权!”

“公元前1874年,埃及法老森乌赛特三世提出开凿苏伊士运河。3700年前啊!多么睿智而宏大的构想。埃及这个古老的国度,值得我们深挖它的文明。在座的各位学者,你们的任务很重。”拿破仑转身面向着一位30出头的金发小伙子,“蒙日教授,这是您推荐的小伙子,他叫什么名字?”

没等蒙日教授开口,小伙子紧张地站起来,扯开嗓子喊道:“让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅里叶,先生!”

“好,傅里叶,……,很好!”拿破仑若有所思,心中闪念,蒙日是自己的知己,他推荐的应当是不错的人选。他略带微笑地说,“加斯帕尔,你推荐的年轻人很精干啊!”

拿破仑站起身来,极目远眺,朝霞下远方的金字塔若隐若现,呈现出诱人的黄金般的色彩。“先生们,随我同行的是一支专家随军团,你们是165位学者和科学家的代表,要带领大家开展广泛的研究,速战速决。”拿破仑停顿了一下,抬头指向远方,提高了音量,“先生们,在金字塔的尖顶上,40个世纪正看着你们!”

1798年,法国大革命之后,拿破仑掌握军权,埃及成为法国挑战英国世界霸主地位的主要棋子。拿破仑率领远征军挺进埃及,随大军而行的有一支特殊的队伍——“埃及科学和艺术法国考察团”,傅里叶担任拿破仑的科学顾问,积极参加拿破仑的军事行动。

经过“金字塔之战”,埃及军队像韭菜一样被收割掉,守将穆拉德贝退往西奈半岛,拿破仑长驱直入,没有遇到任何反抗,于7月22日征服了埃及都城开罗,把司令部设置在穆拉德贝位于尼罗河河岸的行宫里。

在法国军队向埃及纵深推进的同时,考察团也在紧锣密鼓地开展各项工作。拿破仑命令设立埃及研究院,由著名科学家、法国科学院院士蒙日任院长,拿破仑自己任副院长。傅里叶担任研究院秘书,并从事许多外交活动。研究院分数学、物理、政治经济、文学艺术四个部,并附有设备先进的实验室和藏书众多的图书馆,还定期出版一份学术刊物。傅里叶在研

<sup>①</sup> 贝尔蒂埃(路易斯·亚历山大·贝尔蒂埃,Louis Alexandre Berthier),法国元帅。

究院的职责是收集、整理所有的科学和艺术发现，同时继续从事自己感兴趣的数学研究。

在大军进驻开罗一周之前，一支小分队发现一块刻有工整文字的黑色石碑。石碑被送到开罗的埃及研究院，供科学家们研究分析。

“罗塞塔石碑？这个命名好！”端坐在椅子上的克莱贝尔，头上缠着包扎，斜眼看着远处角落里静静矗立的残破石碑。一个月前，他在亚历山大港战役中头部受伤，脸色略显苍白，但是依旧显得那么威风凛凛。

“是的，据门努瓦指挥官报告，这是他们在罗塞塔的郊外挖出来的。”将近四个月时间的接触，傅里叶和几位军官已经混得很熟了，说话已不再那么拘谨和严肃。

“听说你参加过大革命？还坐过牢？”克莱贝尔突然转移话题，其实，他今天来研究院找傅里叶，主要目的就是想了解一下傅里叶的过去。因为他已经知道，他将与傅里叶长期共事。

“是的，吉恩。93年<sup>①</sup>，我参加了我们老家奥塞尔的革命委员会，主要负责地方事务。因为替一位受害者申辩而被捕入狱，被送到奥尔良监狱。”

“哦，93年，我印象深刻。那一年美因茨防御战，我受伤被俘，获释后马索将军把我升为准将。”克莱贝尔表现得特别有兴致，继续着他们的闲聊，“你是怎么参加革命的？”

“说来话长了，将军。”傅里叶有些犹豫，试探着回答。

“没事，科学家的过去，我很感兴趣。”

“是这样的，吉恩。”傅里叶呷一口掺了柠檬的甘草水，8月的开罗，酷暑难当，傅里叶喜欢这样的降暑饮品。

“80年我进入欧塞尔的皇家军事学校学习，起初我对文学有着极大的兴趣。后来发现，我其实对数学特别感兴趣。86年毕业的时候，我的老师有意让我留下工作，可是我更想成为炮兵或工程兵。”傅里叶说话间，脑海里浮现出当年读书时的场景，他收集蜡烛屁股的蜡油，积攒起来晚上点着学习数学，没日没夜地阅读，在1年的时间里，读完了裴蜀的六卷《数学教程》。

“参军也是很好的啊，而且，你的数学和文学才能在炮兵和工程兵中都能用得上。没想到你还有从军的经历，你的年龄不大啊？”

“没有。他们拒绝了我，因为我的家庭原因。我的父亲是一名裁缝。”想起此事，傅里叶还是有些愤愤不平，尽管已经过去10年了。

“真是岂有此理，我们的革命就是要打破人分三级的腐朽社会结构。人本来生而平等，何来地位贵贱之分。裁缝难道注定卑微，连儿女都无出头之日！”出身建筑师家庭的克莱贝尔倔强直，他切身体会过这种社会结构的无奈。“我和你一样，从慕尼黑军校毕业后，我加入奥地利军队，我发现我的平民出身很难在奥军中获得晋升，他们同样注重门阀。所以，83年我从奥军中退役了。”

“是的，更不平等的事情还在后面，吉恩。”

克莱贝尔睁大眼睛，认真地聆听着。

“所以我很生气，第二年离开了学校，进了圣贝努伊特<sup>②</sup>修道院，准备在这里边工作边继

<sup>①</sup> 指“1793年”。对话中的时间表述，均采用此格式。

<sup>②</sup> 圣贝努伊特(St. Benoît-sur-Loire)，卢瓦尔河畔的圣贝努伊特修道院。

续数学研习。两年后,我离开修道院前往巴黎,希望到巴黎寻得更优越的环境继续我的研究。很巧的是,刚好皇家科学院有一篇关于代数公式的论文我特别感兴趣,我就找到科学院数理委员会,想留下来做科研。你知道他们怎么说吗?吉恩。”

“应当会考察你吧?”

“不是,我和你一样都想错了。他们认为我出身卑微而拒绝了我。”

克莱贝尔完全没有想到,简直不可思议。“真是岂有此理,太令人气愤了,做学问也要讲究门阀!这个可恶的等级社会,人性完全扭曲了!”

“那一年是87年吧,我索性到巴黎的一座修道院任职。两年后,即将被委任为神父的时候,大革命爆发了。我又离开修道院回到了我的母校,在那里谋了一个数学教师的职位。”

“你好像在回避大革命啊,让。”

“是的,吉恩。起初我只想有一个安静的环境做我的研究。可是,那时候的革命如火如荼,我难免不受到感染,也慢慢地对政治感起了兴趣。我开始梦想着从皇权和王权的管制中解放出来,因为显然我也是它的受害者。”

傅里叶抬头望了一眼窗外的景色,棕榈枝繁叶茂,在撒哈拉沙漠吹来的热风中,无精打采地轻轻摇动着宽大的叶子。傅里叶无奈地说,“出狱后,我又一次被捕入狱,差一点被处以极刑。”

“啊?!”

“93年我出狱后,再次回到家乡继续教书。第二年7月再次被捕,宣判斩首!”

“无论是雅各宾派专政、还是吉伦特派统治,都是法国的恐怖统治时期,暴力镇压大革命力量。”克莱贝尔有点疑惑,但很快有所明白,“明白了,发生了热月政变,雅各宾派政府首脑罗伯斯庇尔被处死了,你也就安全了”。

“是的,年底我被释放。”傅里叶停顿了一会儿,接着问克莱贝尔:“说说你的故事吧,吉恩。”

“嗯,好啊。谢谢你介绍你的过去……哦,想起来了,我今天来是想告诉你,波拿巴总司令很器重你,他对你的工作很满意。而且,你我将要留在埃及,相互配合开展工作。你明白我的意思吗?让。”

“哦,是吗,我明白,而且我也料到是你了。和你共事,是我的荣幸。”傅里叶长长地舒了口气,“吉恩,是这样,我计划在埃及建立一些教育机构,在数学、自然哲学、考古等方面加强人才培养,这对我们今后在埃及的社会工作有益。”

“是一个好主意,我们来谈谈未来的工作吧。”

## 荣归故里

傅里叶和克莱贝尔都没有想到,在他们聊天的当天,1798年8月1日,英国海军少将霍雷肖·纳尔逊带领英国舰队突然袭击尼罗河河口,几乎摧毁了法国的全部舰队,只有两只舰船冲进茫茫的地中海才侥幸逃生。

送走克莱贝尔之后,傅里叶还没有从回忆中回过神来,往日的故事在他的脑海中飞快地划过。

出狱之后的傅里叶进入巴黎师范学校的教师培训机构学习,虽为期甚短,傅里叶的数学

才华却给人以深刻印象。接受培训期间,他学习了很多著名教授的课程,包括数学家、物理学家拉格朗日,数学家、物理学家拉普拉斯,数学家、化学家蒙日。

完成课程学习后,他留校任教,但不久到新成立的巴黎中央公共工程学院<sup>①</sup>工作,担任拉格朗日和蒙日的教学助理。这一年他还讽刺性地被当作罗伯斯庇尔的支持者而被捕,经同事营救获释。但不管怎么说,傅里叶总算有了理想的环境,可以安心地做学问。他要研究固体中的热传导问题,同时,几次入狱的傅里叶,对政治有了本能的敏感,他也密切关注着法国的政治局势变化。

1794年,法庭公开审判化学家、生物学家拉瓦锡,认为他犯有税务欺诈罪,判处极刑。很多人都无法接受这个结果,著名数学家拉格朗日痛心地说:“你们可以一眨眼就把他的头砍下来,但他那样的头脑一百年之内都不会再长出来。”然而,狂热的大多数人根本不在意少数人的理智,甚至有人公然喊出了“共和国不需要科学家”的狂言,这对傅里叶刺激很大。

傅里叶很佩服拉瓦锡为科学献身的大无畏精神。据说,拉瓦锡甚至在临终之前还要做最后一次实验,拉瓦锡的助手请求刽子手帮忙,砍下拉瓦锡的头颅之后,计数拉瓦锡的眼睛眨了几下。最终据刽子手所说,拉瓦锡不停地眨眼11次,由此证明人的头颅离开躯体之后还会有意识残留。

法国革命的浪潮给法国带来亢奋和混乱的同时,也极大地震撼了周围国家的政权,他们开始围剿法国,企图把共和国扼杀在摇篮里,至少将影响压缩在法国境内。浊浪滔天之时,力挽狂澜的政治明星应运而生,他就是拿破仑。1796年3月,督政府任命26岁的拿破仑为法兰西共和国意大利方面军总司令。拿破仑远征意大利,取得重大胜利,迫使对方签订了停战条约。拿破仑成为法兰西共和国的人民英雄,他的威信越来越高。

.....

转眼之间,1年过去了。

埃及的局势基本得到控制。尼罗河河口之战,法国海军丧失殆尽,与本土的联络中断。但是,登陆埃及的法国军队作战勇猛,屡战屡胜,从未失手。在埃及的各项工作有条不紊地推进,一切都很顺利。寻找古代列国开凿运河遗迹的工作也终于有了结果,发现了一条古运河的遗迹,这说明在地中海与红海之间开凿运河是可行的。

拿破仑信心大增,召集科学家和将军们在司令部开会,准备前往苏伊士地峡,实地勘察。

穆拉德贝行宫坐落在尼罗河西岸,被成片的大树包围,遮蔽得严严实实,现在是拿破仑的司令部。司令部东面的尼罗河,南起赤道、向北奔流,泥沙俱下地冲到地中海,连绵7000千米,是世界上最长的河流。碧蓝的湖面泛着微波,河岸边绿色灌木茂盛丛生,绿洲后方远处的沙丘连绵不断,裸露的金黄色土壤似乎在默默地告诉你6000多年的厚厚的文明记忆。

眼前的景色,让傅里叶百感交集。与故土迥异的非洲风情他已有所习惯,一年多来,在埃及的工作终于有了重大进展,令人欣慰。

傅里叶没有想到的是,他参加的这次会议,是拿破仑在埃及的最后一次会议。会议的气氛很凝重。

“各项工作都很好,你们不愧是法兰西的精英,请继续努力。接下来,克莱贝尔将军将为你继续创造良好的工作环境。”拿破仑声音低沉,表情凝重地认真倾听着军政报告,这不该

<sup>①</sup> 随后更名为巴黎综合理工大学,École Polytechnique。

是面对重大好消息应有的神情。

拿破仑瞟了一眼桌上的几份报纸，目光慢慢地扫视着每一位正襟危坐的军官，“就在刚刚，我得到最新版《法兰克福报》，一年多来，国内局势变化极大，不容乐观。”

“保王党人东山再起，内战一触即发；反法联盟再次纠集，蠢蠢欲动、屡屡犯我边境。更严重的是，意大利丢了，军队在莱茵地区一败再败！”拿破仑紧紧地握起拳头，“一群笨蛋！我的一切胜利果实都丢了！”

会议室瞬间沸腾起来，将军们咬牙切齿，专家们长吁短叹。傅里叶注意着拿破仑的一举一动，从来没有见过拿破仑如此愤怒。拿破仑放任着会议室的嘈杂，双眼前仿佛烈焰喷发，随时能灼烧眼前的报纸。

拿破仑猛然抬头，低声而有力地命令，“贝尔蒂埃、冈托姆，两位将军随我来。其他人，散会！”

1799年8月22日，拿破仑带领四五百名官兵，趁着夜色的掩护，登上护卫舰米隆号，贴着埃及北岸航行，然后看准时机转舵向北，急速驶向撒丁岛以南，避开英军的严密监控，秘密回国。

傅里叶随大部队留在埃及，继续不间断他的数学、物理方面的研究。同时，他积极收集整理埃及的各方面的资料，形成了著作初稿，其中包括插图、地图、学术文章以及详细的索引等。

1801年，傅里叶回到法国，继续他在巴黎综合理工大学的教授职位。因拿破仑赏识他的行政才能，任命他为伊泽尔地区首府格勒诺布尔的行政长官。傅里叶虽然并不情愿，但又不肯拒绝。

1802年，拿破仑授权大规模出版随军学者们收集到的关于埃及的资料和考察成果，于是，著名的《埃及记述》<sup>①</sup>问世。这是一部不朽的多卷巨著，包括傅里叶所整理的资料在内，傅里叶为这套丛书写了一篇关于古埃及文化的长长的序。该书出版后备受欢迎，在后拿破仑时代的波旁复辟王朝时期又发行了第二版。

## 功成名就

傅里叶原本只是想做他的研究，安心地把他的热传导的学问做得扎实一些。但是命运总是这样的不可捉摸，他的人生行途之中，常常在不经意的转弯处，突然就遇见了完全不同的生命画风。就这样，在学问的海洋里不断地与时代的大潮相遇，不得不暂停一切去驾驭政治的浪涌。宦海驰骋，傅里叶力有余而心不甘，他最大的兴趣还是追逐自己的学术理想，从政期间，傅里叶继续埃及学和热力学的研究。1804年，他开始了热传导实验的研究。

1807年年底，傅里叶在巴黎科学院发表论文《固体热的传播》，推导出著名的热传导方程，提出解函数可以由三角函数构成的级数形式表示，并推论任意函数都可以展开成三角函数的无穷级数，由此建立了傅里叶级数（即三角级数）、傅里叶分析等理论。从现代数学的眼光来看，傅里叶变换是一种特殊的积分变换，它能将满足一定条件的某个函数表示成正弦基函数的线性组合或者积分。在不同的研究领域，傅里叶变换具有多种不同的变体形式，如连续傅里叶变换和离散傅里叶变换。

傅里叶变换的基本思想首先由傅里叶提出，以其名字来命名以示纪念。他的贡献还有：

<sup>①</sup> 法语：Description de l'Égypte，又译《埃及志》。

最早使用定积分符号,改进了代数方程符号法则的证法和实根个数的判别法等。

1808年,由于政绩卓著、声名远扬,傅里叶被拿破仑授予男爵称号。

1814年,久经沙场的拿破仑被第六次反法同盟军战败,被迫签署退让诏书,放逐厄尔巴岛。波旁王朝复辟,对于傅里叶来说,法国政治形势一夜间翻天覆地,他被迫同拉普拉斯一道投靠路易十八。

1815年,年近50岁的傅里叶辞去爵位和官职,返回巴黎以图全身心投入学术研究,用余生坚守自己最初的梦想。但是,世态炎凉,政治名声的落潮带来的困惑何止是失业和贫困,这时的傅里叶处于一生中最为艰难的时期。

傅里叶昔日的同事和学生对他十分关心,为他奔走,最终谋得塞纳河统计局主管职位。这份职位的事情不多,但收入足以维持生计。生活有了保障,傅里叶得以继续从事他的学术研究。

1816年,傅里叶被提名为法国科学院的成员,他的任职得到了拉普拉斯的支持,却受到泊松的反对。一波三折之后,傅里叶最终还是被选为法国科学院院士,其声誉随之迅速上升。

1822年,他被选为科学院的终身秘书,这是极有权力的职位。同年,在他的代表作《热的分析理论》中解决了热在非均匀加热的固体中分布传播问题,成为分析学在物理中应用的最早例证之一,对19世纪的理论物理学的发展具有深远的影响。他用微分公式的形式描述二维物体中的热传导,这个成果成为后来的傅里叶级数的理论基础。

19世纪20年代,傅里叶从事“温室效应”的研究,7年后提出观点认为地球的大气就像保温层一样保持地球的热量。当年,他被选为法兰西学院院士,被英国皇家学会选为外籍会员。

1830年,当选为瑞士皇家科学院外籍会员。

## 雁过留声

回想一生,学术生涯随着政治的波浪而起伏,时而掀上浪尖、时而跌到低谷。

傅里叶内心澎湃、兴奋异常。他又回到了他熟悉而又遥远的非洲,回到开罗的埃及研究院,置身于明亮的大厅中央。他年轻的时光和最精彩的青春在这里度过,在刀光剑影中寻求真理、在沙漠绿洲中探索远古。时光如此短暂而又精彩、生命如此跌宕而又绚丽。

傅里叶激动得甚至有些喘不过气来,他想呼吸、想呐喊。大厅的门窗猛然被风吹开,滚滚的热浪夹带着巴旦杏烤熟的香味扑面而来。白日当空,炎热的阳光灼烧着傅里叶的皮肤,他紧闭双眼,期待着烈日对疾病的驱赶。周围一片通红,一生研究热传导的傅里叶,在热能的海洋中升腾、升腾,直达天际……

傅里叶,他的名字刻写在埃菲尔铁塔的东南角,铭记在世界科学的史籍中。

这一连串的姓名,让我们想起一位叫傅里叶的人。他一生为人正直,无私地支持和真挚地鼓励年轻人的成长:

奥斯特(Hans Christian Oersted),丹麦物理学家,电流磁效应的发现者。

狄利克雷(Dirichlet),德国数学家,解析数论的创始人之一。

阿贝尔(Niels Henrik Abel),挪威数学家,近代数学发展的先驱者。

斯图姆(Charles-Francois Sturm),法国数学家,射影与几何光学建树卓著。

.....

“树的方向由风决定,人的方向由自己决定。”傅里叶取得了非常巨大的成就,他提出的理论迄今还在助力着科技的发展。

这一连串的术语,以他的名字命名,以示纪念!每当我们用到它们,总是会想起有一位名叫傅里叶的人:

傅里叶变换(Fourier transform);

傅里叶理论(Fourier's theorem);

傅里叶-摩兹金消去法(Fourier-Motzkin elimination);

傅里叶代数(Fourier algebra);

傅里叶除法(Fourier division);

傅里叶热传导定律(Fourier's law of heat conduction);

傅里叶系数(Fourier number);

傅里叶光学(Fourier optics);

傅里叶变换光谱学(Fourier transform spectroscopy)。

(本节中傅里叶小传的内容,系以史料为基础的艺术化叙述)