新高中数学同步全刷

选择性必修第三册

陈飞　主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书隶属于“真题全刷”系列，专为高二学生打造，可与人民教育出版社2019年新改版高中数学A版选择性必修第三册教材配合使用，为全面系统夯实高二学生基础知识，提升解题能力而编写。每一道例题代表一种题型，针对不同基础的学生，设有“练其形”和“悟其神”两个层次。全书共分3个章节：计数原理、随机变量及其分布、成对数据的统计分析。每个章节题型丰富，知识全面。通过对例题的深入讲解，真正做到举一反三、触类旁通，提炼解题方法，拓展学生思维。

本书不仅是高二学生攻克数学题型的必备同步辅导书，还可供一线教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

新高中数学同步全刷：选择性必修. 第三册/陈飞主编. —北京：清华大学出版社，2023.5
ISBN 978-7-302-63475-1

Ⅰ. ①新…　Ⅱ. ①陈…　Ⅲ. ①中学数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ. ①G634.603

中国国家版本馆CIP数据核字(2023)第080582号

责任编辑：汪　操
封面设计：鞠一村
责任校对：王淑云
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编：**100084
社 总 机：010-83470000　　**邮　　购：**010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市龙大印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：210mm×285mm　　**印　张：**17.5　　**字　　数：**454千字
版　　次：2023年6月第1版　　**印　　次：**2023年6月第1次印刷
定　　价：69.00元(全两册)

产品编号：092266-01

编委会

主编

陈　飞

副主编

谢松兴　方立洋

编委

何　伟　周　进　黄兆海　郑荣夏
陈兴勇　张永锋　徐小钧　牛志忠

前　　言

这是一本极具个性和特色的高中数学同步知识和解题方法的刷题教辅书！
它是来自于长期在教学一线并从事高中数学教学多年的教师的心血之作！
它站在实用的立场，瞄准高考，几乎一网打尽高中数学解题方法和题型！

随着新课程改革的落实，全国各省市也正在陆续推进新教材的使用。“新高中数学同步全刷”系列对应的教材是人民教育出版社2019年新改版高中数学A版教材。精选各类经典考试题目，精解精析，突出核心数学素养及数学能力培养，体现新课改要求，实现学生巩固基础知识与提高解题能力之目的。本系列不仅是高一、高二学生攻克题型的范本，还是一线教师备课教学的题参。愿它能成为你攻克题型的法宝，助你找到解题的精髓，带给你一些惊喜。

“新高中数学同步全刷”的目的非常纯粹，即弄懂一道例题，攻克一类题，成为解题高手。由“例题”发散“变式”，理顺“一个题”与“多个题”的关系，寻找“一类题”在思维方法和解题技巧上的“共性”，通吃“千张纸、万道题”，实现知识“内化”，促成能力“迁移”。让你的学习省时省力，事半功倍。一位名师能引领你走进科学的殿堂，一本好书能改变你一生的命运，拥有它，你会领略到学习的艺术，它会成为你的良师益友，会照亮你前进的道路，提升你高考总成绩；拥有它，你将一生受用无穷。

“新高中数学同步全刷”的主要特点如下：

1．题型全面，题源精良

对新教材高中数学同步题型，无死角全方位归纳，杜绝超纲、超难题目，摈弃题型老、材料旧的陈题，提倡原创，鼓励改编，融入了多选题，打造“全新同步”。

2．方法精炼，总结到位

方法点拨一语中的，问题归类讲解给出“撒手锏”，得一题而会一类题，力求小题秒杀，大题通杀。提高数学解题能力，提升数学素养。

3．夯实基础，全面提升

练其形：注重基础，强调基础知识的识记和运用；悟其神：强调能力，注重解题能力的培养和提高。既注重知识的全面性、系统性，又突出重难点，注重迁移、应用，真正做到举一反三，触类旁通。

4．题配视频，细致入微

每一道例题都配有免费视频讲解，对例题的解题思路剖析构建，归纳总结出解决同一种类型题目的方法和技巧，并且对二级结论进行了推导和演绎。通过观看视频讲解，可以让你形成自己的解题思想和方法，让学习变得更加高效和有趣。

一种题型，启解题之奥妙；一道好题，成高考之好运；一本好书，圆大学之美梦。

我们以精益求精的质量、独具匠心的创意，希望能让学生在短时间内提高数学的分析、解题技能，缩短解题时间，减轻学习负担，提高学习成绩。

本书的完成有赖于一支高度负责的团队，各位编委都花了大量时间精心编写各自分工的内容。然而，编者虽倾心倾力，但终究水平有限，书中若有不妥之处，敬请各位读者不吝指正。由衷地感谢本书的责任编辑汪操，他的辛勤努力和卓有成效的工作，才使本书得以顺利面世。感谢广大师生的肯定和认可，你们是我工作前行的动力。感恩生命中给予我指导的老师们，感恩今生所有的相遇！

最后，感谢您选择了这本书，它能让您学知识、做好题、练方法、提能力、拔成绩，最终赢得高考！

编　者

2023 年 3 月于北京

目　　录

第6章　计数原理

杨辉三角与二项式系数的性质

$(a+b)^0$							1						
$(a+b)^1$						1		1					
$(a+b)^2$					1		2		1				
$(a+b)^3$				1		3		3		1			
$(a+b)^4$			1		4		6		4		1		
$(a+b)^5$		1		5		10		10		5		1	
$(a+b)^6$	1		6		15		20		15		6		1

(1) 每一行都是对称的，且两端的数都是 1。

(2) 从第三行起，不在两端的任意一个数，都等于上一行中与这个数相邻的两数之和。事实上，设表中任一不为 1 的数为 C_{n+1}^{k}，那么它上一行中与这个数相邻的两个数分别为 C_n^{k-1} 和 C_n^k。由组合数的性质有 $C_n^0=1, C_n^n=1, C_{n+1}^k=C_n^{k-1}+C_n^k$。

(3) 对于给定的 n 来说，其二项式系数满足中间大、两边小的特点。利用二项式系数的对称性可知二项式系数 $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^{n-2}, C_n^{n-1}, C_n^n$ 是先逐渐变大，再逐渐变小的，当 n 是偶数时，中间一项的二项式系数最大；当 n 是奇数时，中间两项的二项式系数相等且最大。

(4) 二项展开式的二项式系数的和等于 2^n，即 $(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$。

6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

核心笔记

1. 两个计数原理的联系与区别

	分类加法计数原理	分步乘法计数原理
联系	分类加法计数原理和分步乘法计数原理解决的都是关于完成一件事情的不同方法的种数问题	
区别	(1) 完成一件事共有 n 类方法，关键词是“分类”； (2) 各类方法都是互斥的、并列的、相互独立的； (3) 每类方法都能完成这件事	(1) 完成一件事共分 n 个步骤，关键词是“分步”； (2) 每步得到的只是中间结果，任何一步都不能独立完成这件事，缺少任何一步也不能完成这件事，只有每个步骤都完成了，才能完成这件事； (3) 各步之间是互相关联的、互相依存的

2. 利用两个基本原理解决具体问题时的方法技巧

利用两个基本原理解决具体问题，关键环节是分类或者分步。类与步的关系是辩证的，有些问题需要先分类，再在每一类里分步；有些问题需要先分步，再在每一步里分类。到底采用何种顺序分类与分步，要看类的趋势和步的趋势谁大谁小。下面用流程图6.1、图6.2直观描述。

(1) 类中有步情形

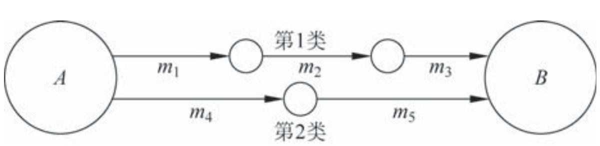

图 6.1

将从 $A\sim B$ 算作完成一件事，简单地记为 $A\to B$。完成 $A\to B$ 这件事有两类办法，在第1类办法中有3步，在第2类办法中有2步，每步的方法数见箭头线下面的 $m_i(i=1,2,3,4,5)$。

完成 $A\to B$ 这件事，共有的方法数为 $m_1m_2m_3+m_4m_5$。

(2) 步中有类情形

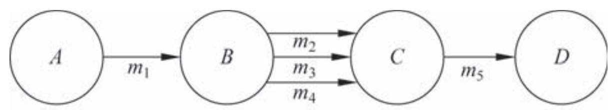

图 6.2

将从 $A\sim D$ 算作完成一件事，简单地记为 $A\to D$。完成 $A\to D$ 这件事需要经历三步，即 $A\to B$，$B\to C$，$C\to D$。其中 $B\to C$ 这步又分为三类，这就是步中有类。箭头线下面的 $m_i(i=1,2,3,4,5)$ 表示相应步的方法数。

完成 $A\to D$ 这件事，共有的方法数为 $m_1(m_2+m_3+m_4)m_5$。

核心例题1 分类加法计数原理

( )满足 $a,b\in\{-1,0,1,2\}$，且关于 x 的方程 $ax^2+2x+b=0$ 有实数解的有序数对 (a,b) 的个数为(　　)。

A. 14　　B. 13　　C. 12　　D. 10

【答案】B

【解析】① 当 $a=0$ 时，$x=-\dfrac{b}{2}$，$b=-1,0,1,2$，有4种可能。

② 当 $a\neq 0$ 时，由已知得 $\Delta=2^2-4ab\geqslant 0$，即 $ab\leqslant 1$。

若 $a=-1$，则 $b=-1,0,1,2$，有 4 种可能；若 $a=1$，则 $b=-1,0,1$，有 3 种可能；若 $a=2$，则 $b=-1,0$，有 2 种可能。

所以由分类加法计数原理得，满足条件的有序数对 (a,b) 的个数为 $4+4+3+2=13$，故选 B。

解题必备

对分类加法计数原理的理解注意点

1. 明确问题中所指的“完成一件事”是指什么，怎样才算是完成这件事，然后根据问题的特点确定一个分类标准，在这个标准下再进行分类。
2. “完成一件事有 n 类不同方案”是指完成这件事的所有方法可分为 n 类，即任何一类中的任何一种方法都可以完成任务，而不需要再用到其他方法；在第 1 类方法中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类方法中有 m_2 种不同的方法，…，在第 n 类方法中有 m_n 种不同的方法。那么完成这件事共有 $M=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法。

简单地说，就是应用分类加法计数原理时要做到“不重不漏”。

题型训练 · 练其形

1.1（ ）一个三层书架，分别放置语文书 12 本、数学书 14 本、英语书 11 本，从中任取一本，则不同的取法有________种。（以数字作答）

1.2（ ）故宫博物院五一期间同时举办“戏曲文化展”“明代御窑瓷器展”“历代青绿山水画展”“赵孟頫书画展”四个展览。某同学决定在五一当天的上、下午各参观其中的一个，且至少参观一个画展，则不同的参观方案共有（　　）种。

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

1.3（ ）如图 6.3 所示，小圆圈表示网络的结点，结点之间的线段表示它们有网线相连，连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量。现从结点 A 向结点 B 传递信息，信息可以分开从不同的路线同时传递，则单位时间内传递的最大信息量为（　　）。

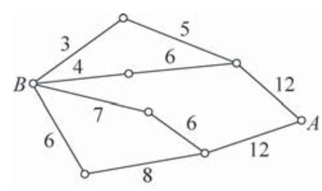

图 6.3

A. 26　　B. 24　　C. 20　　D. 19

题型训练 · 悟其神

1.4（ ）如图 6.4 所示，在 A，B 间有四个焊接点 1，2，3，4，若焊接点脱落将会导致断路，进而造成电路不通，则焊接点脱落导致电路不通的情况有（　　）种。

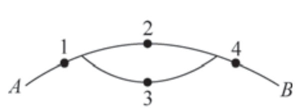

图 6.4

A. 9　　B. 11　　C. 13　　D. 15

1.5 甲、乙、丙三个人踢毽子，互相传递，每人每次只能踢一下，由甲开始踢，经过 4 次传递后，毽子又被踢回给甲，则不同的传递方式共有（　　）种。

A. 4　　B. 6　　C. 10　　D. 16

1.6 如图 6.5 所示，将钢琴上的 12 个键依次记为 $a_1, a_2, \cdots, a_{12}$。设 $1 \leqslant i < j \leqslant 12$，若 $k-j=3$ 且 $j-i=4$，则称 a_i, a_j, a_k 为原位大三和弦；若 $k-j=4$ 且 $j-i=3$，则称 a_i, a_j, a_k 为原位小三和弦。用这 12 个键可以构成的原位大三和弦与原位小三和弦的个数之和为（　　）。

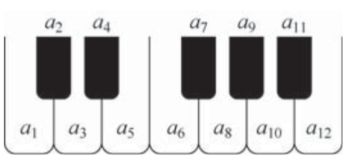

图　6.5

A. 5　　B. 8　　C. 10　　D. 15

核心例题 2　分步乘法计数原理

在某学校举行的“文学名著阅读月”活动中，甲、乙、丙、丁、戊五名同学相约去学校图书室借阅四大名著《红楼梦》《三国演义》《水浒传》《西游记》（每种名著至少有 5 本），若每人只借阅一本名著，则不同的借阅方案种数为（　　）。

A. 4^5　　B. 5^4　　C. C_5^4　　D. A_5^4

【答案】 A

【解析】 根据题意可得甲、乙、丙、丁、戊五名同学借阅 4 种图书，每人有 4 种解法，则五个人有 $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ 种借阅方案，故选 A。

解题必备

对分步乘法计数原理的理解注意点

1. 明确问题中所指的“完成一件事”是指什么，怎样才算是完成这件事，然后根据问题的特点确定分步标准，标准不同，分步的步骤也会不同。
2. “完成一件事需要 n 个步骤”是指完成这件事的任何一种方法，都要分成 n 个步骤，在每一个步骤中任取一种方法，然后相继完成所有这些步骤就能完成这件事。做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法，…，做第 n 步有 m_n 种不同的方法。那么完成这件事共有 $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$ 种不同的方法。

简单地说，就是应用分步乘法计数原理时要做到“步骤完整”。

题型训练 · 练其形

2.1 某商场共有 4 个门，购物者若从任意一个门进，从任意一个门出，则不同走法的种数为________。

2.2 为响应国家“节约粮食”的号召，某同学决定在某食堂提供的 2 种主食、3 种素菜、2 种大荤、4 种小荤中选取一种主食、一种素菜、一种荤菜作为今日伙食，并在用餐时积极践行“光盘行动”，则不同的选取方法有（　　）种。

A. 48　B. 36　　C. 24　　D. 12

痛而不言是一种智慧。人生在世，往往会因这样或那样的伤害心痛不已。对坚强的人来说，累累伤痕是生命赐予最好礼物。朋友间的戏谑、遭人误解后的无奈、过多的言辞申辩反而会让人觉得华而不实，莫不如就留下一抹微笑。（推荐人：@陈丽朵（广西））

2.3 ()乘积$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)$展开后共有________项相加。

题型训练·悟其神

2.4 ()从 2,3,5,7,8 这五个数中,每次取出两个不同的数分别记为 a,b,共可得到 $\lg a-\lg b$ 的不同值的个数是(　　)。

A. 9　B. 10　C. 18　D. 20

2.5 ()某班新年联欢会原定的 6 个节目已排成节目单,开演前又增加了 3 个新节目,如果将这 3 个节目插入原节目单中,那么不同的插法种数为(　　)。

A. 504　B. 210　C. 336　D. 120

2.6 ()现有 1 角、2 角、5 角、1 元、2 元、5 元、10 元、20 元、50 元人民币各一张,100 元人民币 2 张,从中至少取一张,共可组成不同的币值种为(　　)。

A. 1024　B. 1023　C. 1536　D. 1535

核心例题 3　两个原理的综合应用

()现有十二生肖的吉祥物各一个,三位同学依次选一个作为礼物,甲同学喜欢牛和马,乙同学喜欢牛、狗和羊,丙同学每个吉祥物都喜欢,如果三位同学对选取的礼物都满意,则选法有(　　)种。

A. 50　B. 60　C. 90　D. 180

【答案】 A

【解析】 ① 若甲同学选择牛,则乙同学有 2 种选择,丙同学有 10 种选择,选法种数为 $2\times10=20$。

② 若甲同学选择马,则乙同学有 3 种选择,丙同学有 10 种选择,选法种数为 $3\times10=30$。

综上所述,总共有 $20+30=50$ 种选法,故选 A。

解题必备

解决较为复杂的计数问题,一般要将两个计数原理综合应用。使用时要做到目的明确、层次分明、先后有序,还需特别注意以下三点:

1. 合理分类,准确分步:处理计数问题应扣紧两个原理,根据具体问题首先弄清楚是“分类”还是“分步”,要搞清楚“分类”或者“分步”的具体标准。分类时需要满足两个条件:(1)类与类之间要互斥(保证不重复);(2)总数要完备(保证不遗漏),也就是要确定一个合理的分类标准。分步时应按照事件发生的连贯过程进行分析,必须做到步与步之间互相独立,互不干扰,并确保连续性。
2. 特殊优先,一般在后:解含有特殊元素、特殊位置的计数问题时,一般应优先安排特殊元素,优先确定特殊位置,再考虑其他元素与其他位置,体现出解题过程中的主次思想。
3. 正难则反原则(间接法):若从正面考虑时困难较多,可采用对立事件方法去解答。

题型训练·练其形

3.1 (,多选题)现有不同的红球 4 个、黄球 5 个、绿球 6 个，则下列说法正确的是(　　)。

A. 从中任选 1 个球，有 15 种不同的选法

B. 若每种颜色选出 1 个球，有 120 种不同的选法

C. 若要选出不同颜色的 2 个球，有 31 种不同的选法

D. 若要不放回地依次选出 2 个球，有 210 种不同的选法

3.2 (,多选题)某学校高一年级数学课外活动小组中有男生 7 人、女生 3 人，则下列说法正确的是(　　)。

A. 从中选 2 人，1 人做正组长，1 人做副组长，共有 100 种不同的选法

B. 从中选 2 人参加数学竞赛，其中男、女生各 1 人，共有 21 种不同的选法

C. 从中选 1 人参加数学竞赛，共有 10 种不同的选法

D. 若报名参加学校的足球队、羽毛球队，每人限报其中的 1 个队，共有 100 种不同的报名方法

3.3 ()高二年级的三个班去甲、乙、丙、丁四个工厂参观学习，去哪个工厂可以自由选择，甲工厂必须有班级要去，则不同的参观方案有(　　)种。

A. 16　B. 18　C. 37　D. 48

题型训练·悟其神

3.4 ()已知直线 $ax+by+c=0$ 的斜率大于零，其系数 a,b,c 是取自集合 $\{-2,-1,0,1,2\}$ 中的 3 个不同元素，那么这样的不重合直线的条数是(　　)条。

A. 11　B. 12　C. 13　D. 14

3.5 ()过三棱柱中任意两个顶点连线作直线，在所有这些直线连线中构成异面直线的对数为(　　)对。

A. 18　B. 30　C. 36　D. 54

3.6 ()设集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$，选择 I 的两个非空子集 A 和 B，要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数，则不同的选择方法共有(　　)种。

A. 50　B. 49　C. 48　D. 47

达标全刷

1. ()某一数学问题可用综合法和分析法两种方法证明，有 5 位同学只会用综合法证明，有 3 位同学只会用分析法证明，现任选 1 名同学证明这个问题，不同的选法种数有(　　)。

A. 8　B. 15　C. 18　D. 30

2. ()为促进中学生综合素质全面发展，某校开设 5 个社团，甲、乙、丙三名同学每人只报名参加 1 个社团，则不同的报名方式共有(　　)种。

A. 60　B. 120　C. 125　D. 243

3. (　)设集合 A 由 n 个元素构成，即 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则 A 所有子集的个数为________。

4. (　)形如“20211202”的数字叫“回文数”，即从左到右读和从右到左读都一样的正整数，则 8 位的回文数共有(　　)个。

A. 90　　B. 900　　C. 9000　　D. 90000

5. (　)已知集合 $M=\{1,-2,3\}$，$N=\{-4,5,6,-7\}$，若从这两个集合中各取一个元素作为点的横坐标或纵坐标，则可得平面直角坐标系中第一、二象限内不同点的个数是(　　)。

A. 18　　B. 16　　C. 14　　D. 10

6. (　)从 0，1，2，3，4，5 这六个数字中，任取两个不同数字相加，其和为偶数的不同取法的种数有(　　)。

A. 30　　B. 20　　C. 10　　D. 6

7. (　)将编号 1，2，3，4 的小球放入编号为 1，2，3 的盒子中，要求不允许有空盒子，且球与盒子的号不能相同，则不同的放球方法有(　　)种。

A. 16　　B. 12　　C. 9　　D. 6

8. (　)某学校有东、南、西、北四个校门，学校对进入四个校门做出如下规定：学生只能从东门或西门进入校园，教师只能从南门或北门进入校园。现有 2 名教师和 3 名学生要进入校园(不分先后顺序)，请问进入校园的方式共有(　　)种。

A. 6　　B. 12　　C. 24　　D. 32

9. (　)古代“五行”学认为：“物质分金、木、土、水、火五种属性，金克木，木克土，土克水，水克火，火克金。”将五种不同属性的物质任意排成一列，但排列中属性相克的两种物质不相邻，则这样的排列方法有(　　)种。

A. 5　　B. 10　　C. 20　　D. 120

10. (　)如图 6.6 所示，一只蚂蚁从正四面体 $A\text{-}BCD$ 的顶点 A 出发，沿着正四面体 $A\text{-}BCD$ 的棱爬行，每秒爬一条棱，每次爬行的方向是随机的，则蚂蚁第 1 秒后到点 B，第 4 秒后又回到 A 点的不同爬行路线有(　　)条。

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

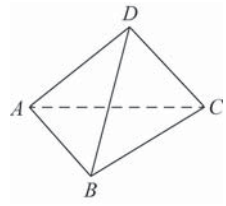

图　6.6

6.2　排列与组合

核心笔记

1. 排列与排列数

(1) 排列：从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n)$个元素，按照一定的顺序排成一列，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

(2) 排列数：从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同排列的个数，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，记作 A_n^m。

(3) 排列数公式：$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ $(n,m\in\mathbf{N}^*$，且 $m\leqslant n)$。

注：规定 $0!=1$。

2. 组合与组合数

(1) 组合：从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n)$ 个元素合成一组，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

(2) 组合数：从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同组合的个数，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，记作 C_n^m。

(3) 组合数公式：$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\times2\times\cdots\times m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ $(n\in\mathbf{N}^*,m\in\mathbf{N}$，且 $m\leqslant n)$。

注：规定 $C_n^0=1$。

(4) 组合数的两个性质

①$C_n^m=C_n^{n-m}$；　②$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$。

3. 求解排列、组合问题的思路

排组分清，加乘明确；有序排列，无序组合；分类相加，分步相乘。

具体地说，解排列、组合的应用题，通常有以下途径：

(1) 以元素为主体，即先满足特殊元素的要求，再考虑其他元素。

(2) 以位置为主体，即先满足特殊位置的要求，再考虑其他位置。

(3) 先不考虑附加条件，计算出排列或组合数，再减去不符合要求的排列或组合数。

4. 解答排列、组合问题的角度：

解答排列、组合应用题要从“分析”“分辨”“分类”“分步”的角度入手。

(1)“分析”就是找出题目的条件、结论，哪些是“元素”，哪些是“位置”。

(2)“分辨”就是辨别是排列还是组合，对某些元素的位置有、无限制等。

(3)“分类”就是将较复杂的应用题中的元素分成互相排斥的几类，然后逐类解决。

(4)“分步”就是把问题化成几个互相联系的步骤，而每一步都是简单的排列、组合问题，然后逐步解决。

5. 有条件的排列问题大致分四种类型：

(1) 某元素不在某个位置上问题。

① 可从位置考虑用其他元素占上该位置。

② 可考虑该元素的去向(要注意是否是全排列问题)。

③ 可间接计算，即从排列总数中减去不符合条件的排列个数。

(2) 某些元素相邻，可将这些元素排好看作一个元素(即捆绑法)，然后与其他元素排列。

(3) 某些元素互不相邻,可将其他剩余元素排列,然后用这些元素进行插空(即插空法)。

(4) 某些元素顺序一定,可在所有排列位置中取若干个位置,先排上剩余的其他元素,这些元素也就一种排法。

6. 有条件的组合问题

可能遇到含某个(些)元素与不含某个(些)元素问题,也可能遇到"至多"或"至少"等组合问题的计算,此类问题要注意分类处理或间接计算,切记不要因为"先取再后取"产生顺序造成计算错误。

核心例题 1 排列数

( )下列各式中,不等于 $n!$ 的是( )。

A. A_n^n　　B. $\frac{1}{n+1}A_{n+1}^{n+1}$

C. A_{n+1}^n　　D. nA_{n-1}^{n-1}

【答案】C

【解析】

选项 A:$A_n^n=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times2\times1=n!$。

选项 B:$\frac{1}{n+1}A_{n+1}^{n+1}=\frac{1}{n+1}(n+1)n\cdot(n-1)\times\cdots\times2\times1=n(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$。

选项 C:$A_{n+1}^n=n(n+1)(n-1)\times\cdots\times3\times2=(n+1)!$。

选项 D:$nA_{n-1}^{n-1}=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times2\times1=n!$。

综上所述,故选 C。

解题必备

1. 排列数公式及其推导

排列数公式:$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$。

推导:从 n 个不同的元素中任取 m 个元素的排列数可以分成 m 个步骤来做。

第一步,从 n 个元素中选出一个放入第一个位置,有 n 种方法。

第二步,从剩下的 $n-1$ 个元素中选出一个放入第二个位置,有 $n-1$ 种方法。

第三步,从剩下的 $n-2$ 个元素中选出一个放入第三个位置,有 $n-2$ 种方法。

⋮

第 m 步,把剩下的 $n-m+1$ 个元素选出一个放入第 m 个位置,有 $n-m+1$ 种方法。

(注:之所以第 m 步有 $n-m+1$ 个候选元素,同学们可以用以前学过的间隔问题自己计算一下)

由乘法原理得共有 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$种方法。

2. 阶乘表示式

(1) 全排列

n 个不同元素全部取出的一个排列,叫作 n 个不同元素的一个全排列。

全排列 $A_n^n=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$。

(2) 阶乘的概念

把正整数 $1\sim n$ 的连乘积,叫作 n 的阶乘,用 $n!$ 表示,即 $A_n^n=n!$。

一个人至少拥有一个梦想,才会有理由去坚持,你可以有一段糟糕的经历,但绝不能放纵自己过一个烂透的人生。(推荐人:@冯诗阳(陕西))

规定：$0!=1$。

(3) 排列数公式的阶乘式

$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=[n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(n-m)\cdots 2\times1]/[(n-m)\cdots2\times1]=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，所以 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$。

题型训练·练其形

1.1 ( )$A_5^3=$(　　)。

A. 10　B. 15　C. 60　D. 20

1.2 ( )已知 $A_n^2=132$，则 $n=$(　　)。

A. 11　B. 12　C. 13　D. 14

1.3 ( )若 $A_{2n}^3=10A_n^3$，则 $n=$(　　)。

A. 1　B. 8　C. 9　D. 10

题型训练·悟其神

1.4 (，多选题)满足不等式 $A_{n-1}^2-n<7$ 的 n 的值为(　　)。

A. 5　B. 4　C. 3　D. 2

1.5 (，多选题)下列各式中与排列数 A_n^m 相等的是(　　)。

A. $\dfrac{n!}{(n-m)!}$

B. $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)$

C. $\dfrac{nA_{n-1}^m}{n-m+1}$

D. $A_n^1A_{n-1}^{m-1}$

1.6 ( )若 $M=A_1^1+A_2^2+A_3^3+\cdots+A_{2008}^{2008}$，则 M 的个位数字是(　　)。

A. 3　B. 8　C. 0　D. 5

核心例题 2 组合数

(，多选题)对于 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 关于下列排列组合数，结论正确的是(　　)。

A. $C_n^m=C_n^{n-m}$　B. $C_{n+1}^m=C_n^{m-1}+C_n^m$

C. $A_n^m=C_n^mA_m^m$　D. $A_{n+1}^{m+1}=(m+1)A_n^m$

【答案】 ABC

【解析】 A 选项：由组合数的性质知 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 成立，A 正确。

B 选项：$C_n^{m-1}+C_n^m=\dfrac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}+\dfrac{n!}{m!(n-m)!}=\dfrac{m\cdot n!}{m!(n-m+1)!}+\dfrac{(n-m+1)\cdot n!}{m!(n-m+1)!}=\dfrac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}=C_{n+1}^m$，B 正确。

C 选项：因为 $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}$，所以 $A_n^m=C_n^mA_m^m$ 成立，C 正确。

D 选项：因为 $\dfrac{A_{n+1}^{m+1}}{A_n^m}=\dfrac{(n+1)!}{(n-m)!}\cdot\dfrac{(n-m)!}{n!}=n+1\neq(m+1)$，即 $A_{n+1}^{m+1}=(m+1)A_n^m$ 不成立，D 不正确。

综上所述，故选 ABC。

解题必备

1. 组合数的公式及推导

求从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数 A_n^m，可以按以下两步来考虑：

第一步，先求出从这 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数 C_n^m；第二步，求每一个组合中 m 个元素的全排列数 A_m^m。

根据分步计数原理，得到 $A_n^m=C_n^m A_m^m$。因此

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!},$$

这里 $n,m\in\mathbf{N}_+$，且 $m\leqslant n$，这个公式叫作组合数公式。因为 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，所以组合数公式还可表示为 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$。

2. 组合数的性质原理解释

(1) 性质 1：$C_n^m=C_n^{n-m}$

性质 1 表明从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合，与剩下的 $n-m$ 个元素的组合是一一对应关系。

(2) 性质 2：$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$

性质 2 表明从 $n+1$ 个不同元素中任取 m 个元素的组合，可以分为两类：第 1 类，取出的 m 个元素中不含某个元素 a 的组合，只需在除去元素 a 的其余 n 个元素中任取 m 个即可，有 C_n^m 个组合；第 2 类，取出的 m 个元素中含有某个元素 a 的组合，只需在除去 a 的其余 n 个元素中任取 $m-1$ 个后再取出元素 a 即可，有 C_n^{m-1} 个组合。

题型训练 · 练其形

2.1 (🌶)已知 $C_n^2=10$，则 n 的值为(　　)。

A. 10　B. 5　C. 3　D. 2

2.2 (🌶🌶，多选题)若 $C_{20}^{2x-1}=C_{20}^{x+3}$，则 x 的值可能为(　　)。

A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

2.3 (🌶🌶)$C_4^4+C_5^4+C_6^4+C_7^4+C_8^4+C_9^4=$(　　)。

A. C_{10}^4　B. C_{10}^5　C. C_{10}^6　D. A_{10}^4

题型训练 · 悟其神

2.4 (🌶🌶🌶)已知 $\dfrac{1}{C_5^m}-\dfrac{1}{C_6^m}=\dfrac{7}{10C_7^m}$，则 $C_8^m=$________。

2.5 (🌶🌶🌶，多选题)下列各式的运算结果中，等于 $n!$ 的有(　　)。

A. A_n^{n-1}　B. $m!A_n^m$

C. $\dfrac{1}{n+1}A_{n+1}^{n+1}$　D. $(n-m)!C_n^m$

2.6 (🌶🌶🌶，多选题)下列等式正确的有(　　)。

A. $A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$

B. $nC_n^m=mC_{n-1}^{m-1}$

C. $C_3^3+C_4^3+C_5^3+\cdots+C_{2021}^3=C_{2022}^{2018}$

D. $(n+2)(n+1)A_n^m=A_{n+2}^{m+2}$

核心例题 3　捆绑法

(🌶🌶)一排 9 个座位坐了 3 个三口之家，

人生好比一场特殊的赛跑，对于不同的人来说，即便在同一起跑线，也可以有不同的方向，因为终点并非一个。只要找准自己的目标，脚踏实地走每一步，就可以一路欣然向前，我们最终都会找到自己的最佳位置！（推荐人：@冯欣怡（广东））

若每家人坐在一起，则不同的坐法种数为(　　)。

A. $3\times3!$　　B. $3\times(3!)^3$

C. $(3!)^4$　　D. $9!$

【答案】C

【解析】将三个家庭看成三个大元素进行全排列共有 A_3^3 种，每个家庭再进行排列共有 $A_3^3A_3^3A_3^3=(3!)^3$ 种，则共有 $A_3^3A_3^3A_3^3A_3^3=(3!)^4$ 种，故选 C。

解题必备

解决“相邻”问题用“捆绑法”，就是将 n 个不同的元素排列成一排，其中某 k 个元素排在相邻位置上，求不同的排法种数的步骤：

1. 先将这 k 个元素“捆绑”在一起，看成一个整体。
2. 把这个整体当作一个元素与其他元素一起排列，其排列方法有 A_{n-k+1}^{n-k+1} 种。
3. 然后“松绑”，即将“捆绑”在一起的元素内部进行排列，其排列方法有 A_k^k 种。
4. 根据分步乘法计数原理，符合条件的排法有 $A_{n-k+1}^{n-k+1}A_k^k$ 种。

题型训练·练其形

3.1 随着北京冬奥会的开幕，吉祥物“冰墩墩”火遍国内外，现有 3 个完全相同的“冰墩墩”，甲、乙、丙、丁 4 位运动员要与这 3 个“冰墩墩”站成一排拍照留念，则有且只有 2 个“冰墩墩”相邻的排队方法数为(　　)。

A. 240　B. 480　C. 1440　D. 2880

3.2 有 8 本不相同的书，其中数学书 3 本、外文书 2 本、其他书 3 本，若将这些书排列放在书架上，则数学书恰好排在一起，外文书也恰好排在一起的排法共有________种。(用数字作答)

3.3 某班的 5 名同学代表班级参加学校组织的知识竞赛，在竞赛过程中，每人依次回答问题，为更好地发挥 5 人的整体水平，其中 A 同学只能在第一个或最后一个答题，B 和 C 同学则必须相邻顺序答题，则不同的答题顺序编排方法的种数为________。(用数字作答)

题型训练·悟其神

3.4 若 A,B,C,D,E,F 六个不同元素排成一列，要求 A 不排在两端，且 B,C 相邻，则不同的排法有________种。(用数字作答)

3.5 中国古代中的“礼、乐、射、御、书、数”合称“六艺”。某校国学社团开展“六艺”课程讲座活动，每艺安排一节，连排六节，一天课程讲座排课有如下要求：“数”必须排在前三节，且“射”和“御”两门课程相邻排课，则“六艺”课程讲座不同排课顺序共有(　　)种。

A. 120　B. 156　C. 188　D. 240

3.6 高三某班要排出一天中语文、数学、英语各 2 节，自习课 1 节的课程表，其中上午 5 节、下午 2 节，若要求 2 节语文

有些时候，把鸡汤和道理放在一边，先迈出一步，然后在实践中不断地总结、修正。只有这样我们才不会成为那个懂得很多会的却不多，最后几乎没有任何改变、一事无成的人。(推荐人：@关智月(新疆))

课必须相邻且 2 节数学课也必须相邻(注意:上午第五节和下午第一节不算相邻),则不同的排法种数为(　　)。

A. 84　B. 54　C. 42　D. 18

核心例题 4　插空法

(🌶🌶🌶)电影院一排 10 个位置,甲、乙、丙三人去看电影,要求他们坐在同一排,那么他们每人左右两边都有空位且甲坐在中间的坐法的种数为(　　)。

A. 40　B. 36　C. 32　D. 20

【答案】 A

【解析】 除甲、乙、丙三人的座位外,还有 7 个座位,座位之间共可形成六个空,三人从 6 个空中选三个位置坐上去有 C_6^3 种坐法,又甲坐在中间,所以乙、丙有 A_2^2 种方法,所以他们每人左右两边都有空位且甲坐在中间的坐法有 $C_6^3A_2^2=40$ 种,故选 A。

解题必备

解决不相邻问题的方法为"插空法",即将 n 个不同的元素排成一排,其中 k 个元素互不相邻 $(k\leqslant n-k+1)$,求不同排法种数的步骤:

1. 先将不作不相邻要求的元素共 $n-k$ 个排成一排,其排列方法有 A_{n-k}^{n-k} 种。
2. 然后将要求两两不相邻的 k 个元素插入 $n-k+1$ 个空隙中,相当于从 $n-k+1$ 个空隙中选出 k 个,分别分配给两两不相邻的 k 个元素,其排列方法有 A_{n-k+1}^{k} 种。
3. 根据分步乘法计数原理,符合条件的排法有 $A_{n-k}^{n-k}A_{n-k+1}^{k}$ 种。

题型训练 · 练其形

4.1 (🌶🌶)要排一份有 5 个独唱节目和 3 个舞蹈节目的节目单,如果舞蹈节目不排在开头,并且任意两个舞蹈节目不排在一起,则不同的排法种数为(　　)。

A. $A_6^3A_8^5$　　B. $A_5^5A_3^3$

C. $A_5^5A_5^3$　　D. $A_5^5A_8^3$

4.2 (🌶🌶🌶)马路上亮着一排编号为 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 的 10 盏路灯。为节约用电,现要求把其中的两盏灯关掉,但不能同时关掉相邻的两盏,也不能关掉两端的路灯,则满足条件的关灯方法种数为(　　)。

A. 12　B. 18　C. 21　D. 24

4.3 (🌶🌶🌶)A,B,C,D,E,F 六人并排站成一排,A,B 必须站在一起,且 C,D 不能相邻,那么不同的排法共有________种。(结果用数字表示)

题型训练 · 悟其神

4.4 (🌶🌶🌶)同宿舍六位同学在食堂排队取餐,其中 A,B,C 三人两两不相邻,A 和 D 是双胞胎,必须相邻,则符合排队要求的方法数为(　　)种。

A. 288　B. 144　C. 96　D. 72

4.5 (🌶🌶🌶)现有 10 名学生排成一排,其中 4 名男生、6 名女生,若有且只有 3 名男生相邻排在一起,则不同的排法共有

(　　)种。

A. $A_6^2A_7^2$　　B. $A_4^3A_7^2$

C. $A_3^3A_6^2A_7^2$　　D. $A_4^3A_6^6A_7^2$

4.6 (●●●)有 8 位学生春游，其中小学生 2 名、初中生 3 名、高中生 3 名。现将他们排成一列，要求 2 名小学生相邻、3 名初中生相邻、3 名高中生中任意两名都不相邻，则不同的排法种数为(　　)。

A. 288　B. 144　C. 72　D. 36

核心例题 5　隔板法

(●●●)将 7 个相同的球放入 4 个不同的盒子中，则每个盒子都有球的放法种数为(　　)。

A. 22　B. 25　C. 20　D. 48

【答案】 C

【解析】 将 7 个相同的球放入 4 个不同的盒子中，即把 7 个相同的球分成 4 组，因为每个盒子都有球，所以每个盒子至少有一个球，不妨将 7 个球摆成一排，中间形成 6 个空，只需在这 6 个空插入 3 个隔板将它们隔开，即分成 4 组，不同插入方法共有 $C_6^3=20$ 种。

所以每个盒子都有球的放法种数为 20，故选 C。

解题必备

解决“n 个相同元素有序分成 m 组”的问题，一般采用“隔板法”解决，具体求解方法如下：

1. 当每组至少包含一个元素时，则可将这 n 个元素排成一列，中间共有$(n-1)$个空，使用$(m-1)$个“隔板”进入空当处，则可将这 n 个元素划分为 m 个区域，即不同分组方法有 C_{n-1}^{m-1} 种。
2. 任意分组可出现某些组包含元素个数为 0 的情况，则先给每组添加一个名额，使其满足每组至少一个的条件，再在$(n+m)$个相同元素的中间$(n+m-1)$个空格中加入$(m-1)$个“隔板”，则可将这 n 个元素划分为 m 个区域，即不同分组方法有 C_{n+m-1}^{m-1} 种。

注：隔板法必须同时具备以下三个条件：①所有元素必须相同；②所有元素必须分完；③每组至少有一个元素。

题型训练 · 练其形

5.1 (●●●)把 9 个完全相同的口罩分给 6 名同学，每人至少一个，不同的分法有(　　)种。

A. 41　B. 56　C. 156　D. 252

5.2 (●●●)将 10 本完全相同的科普知识书，全部分给甲、乙、丙 3 人，每人至少得 2 本，则不同的分法数为(　　)种。

A. 720　B. 420　C. 120　D. 15

5.3 (●●●)不定方程 $x+y+z=12$ 的非负整数解的个数为(　　)。

A. 55　B. 60　C. 91　D. 540

题型训练 · 悟其神

5.4 (●●●)将 10 个完全相同的小球放入编

号分别为 1,2,3 的三个盒子中,要求每个盒子中球的个数不小于它的编号,则不同的放法种数为(　　)。

A. 10　B. 12　C. 13　D. 15

5.5 (难度)把座位号为 1,2,3,4,5,6 的六张电影票全部分给甲、乙、丙、丁四个人,每人至少一张,且分给同一人的多张票必须连号,那么不同的分法种数为(　　)。

A. 96　B. 240　C. 280　D. 480

5.6 (难度)从 1,2,3,…,20 中选取四元数组(a_1,a_2,a_3,a_4),满足 $a_2-a_1\geqslant 3$,$a_3-a_2\geqslant 4$,$a_4-a_3\geqslant 5$,则这样的四元数组(a_1,a_2,a_3,a_4)的个数是(　　)。

A. C_9^4　B. C_{10}^4　C. C_{11}^4　D. C_{12}^4

核心例题 6　直接法

(难度)把标号为 1,2,3,4 的四个小球分别放入标号为 1,2,3,4 的四个盒子,每个盒子只放一个小球,则 1 号球和 2 号球都不放入 1 号盒子的方法共有(　　)种。

A. 18　B. 12　C. 9　D. 6

【答案】 B

【解析】 由于 1 号盒子不能放 1 号球和 2 号球,则 1 号盒子有 3 号球、4 号球 2 种方法,所以剩下 3 个盒子各放一个球有 A_3^3 种方法,一共有 $2A_3^3=12$ 种方法。故选 B。

解题必备

求解有限制条件排列问题,直接法主要有两个角度:

1. 分步法:选定一个适当的标准,将事件分成几个步骤来完成,分别计算出各步骤的排列数,再由分步乘法计数原理得出总数。
2. 分类法:选定一个适当的分类标准,将要完成的事件分成几个类型,分别计算每个类型中的排列数,再由分类加法计数原理得出总数。

题型训练 · 练其形

6.1 (难度)三人互相传球,由甲开始发球,并作为第一次传球,经过 5 次传球后,球仍回到甲手中,则不同的传球方式共有(　　)种。

A. 5　B. 10　C. 8　D. 16

6.2 (难度)将甲、乙、丙、丁四位辅导老师分配到 A,B,C,D 四个班级,每个班级一位老师,且甲不能分配到 A 班,丁不能分配到 B 班,则共有分配方案的种数为(　　)。

A. 10　B. 12　C. 14　D. 24

6.3 (难度)从 0,1,2,3,4,5 这六个数字中,任取两个不同数字构成平面直角坐标系内点的横、纵坐标,其中不在 y 轴上的点有(　　)个。

A. 36　B. 30　C. 25　D. 20

题型训练 · 悟其神

6.4 ()已知参加某项活动的六名成员排成一排合影留念，且甲乙两人均在丙的同侧，则不同的排法共有(　　)种。

A. 240　B. 360　C. 480　D. 600

6.5 ()若从 1，2，3，…，9 这 9 个整数中取出 4 个不同的数排成一排，依次记为 a，b，c，d，则使得 $abc+d$ 为奇数的不同排列方法有(　　)种。

A. 1224　B. 1800　C. 1560　D. 840

6.6 ()如图 6.7 所示为一棋盘，规则如下：棋子从甲格出发，每次可逆时针或顺时针走一格，则第九步时到达丁格的走法有(　　)种。

A. 168

B. 169

C. 170

D. 171

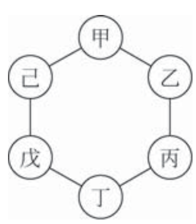

图　6.7

核心例题 7　间接法

()某电视台邀请了 6 位同学的父母共 12 人，请 12 位家长中的 4 位介绍对子女的教育情况，如果这 4 位中恰有一对是夫妻，则不同选择的方法有 ________ 种。

【答案】 240

【解析】 本题解决的方案可以是先挑选出一对夫妻，然后再挑选出两个不是夫妻的即可。

第一步：先挑出一对夫妻：C_6^1；第二步：在剩下的 10 个人中选出两个不是夫妻的，使用间接法：C_{10}^2-5。

所以选择的方法总数 $N=C_6^1(C_{10}^2-5)=240$。

解题必备

组合问题的常见题型

1. “含”与“不含”的问题：“含”，则先将这些元素取出，再由另外元素补足；“不含”，则先将这些元素剔除，再从剩下的元素中选取。
2. “至少”与“最多”的问题：当正面问题分的类较多，而反面问题分的类较少时，不妨改变思维方向，即从结论或条件的反面进行思考，这种方法就称为“间接法”。

题型训练 · 练其形

7.1 ()从 5 名男生和 5 名女生中选 3 人组队参加某集体项目的比赛，其中至少有一名女生入选的组队方案数为(　　)。

A. 100　B. 110　C. 120　D. 180

7.2 ()从 5 名男医生、4 名女医生中选 3 名医生组成一个医疗小分队，要求其中男、女医生都有，则不同的组队方案共有(　　)种。

A. 70　B. 80　C. 100　D. 140

7.3 ()在正方体的 8 个顶点中，以任意 4 个顶点为顶点的三棱锥，共有(　　)个。

A. 52　B. 54　C. 58　D. 62

题型训练·悟其神

7.4 ()从 6 男 2 女共 8 名学生中选出队长 1 人、副队长 1 人、普通队员 2 人组成 4 人服务队，要求服务队中至少有 1 名女生，共有________种不同的选法。(用数字作答)

7.5 ()为展现人民海军 70 年来的辉煌历程和取得的巨大成就，我国在山东青岛及附近海空举行盛大的阅兵仪式。我国第一艘航空母舰“辽宁舰”作战群将参加军演，要求 2 艘攻击型核潜艇一前一后，3 艘驱逐舰和 3 艘护卫舰分列左右，每侧 3 艘，同侧不能都是同种舰艇，则舰艇分配方案的方法种数为(　　)。

A. 1296　B. 648　C. 324　D. 72

7.6 ()现有 16 张不同的卡片，其中红色、黄色、蓝色、绿色卡片各 4 张，从中任取 3 张，要求这 3 张卡片不能是同一颜色，且绿色卡片至多 1 张，则不同的取法种数为(　　)。

A. 484　B. 472　C. 252　D. 232

核心例题 8　排队问题

()6 名同学排成一排照相，要求同学甲既不站在最左边又不站在最右边，共有________种不同站法。(用数字作答)

【答案】 480

【解析】 **方法一**(位置分析法)：先从其他 5 人中安排 2 人站在最左边和最右边，再安排余下 4 人的位置，分为两步：

第 1 步，从除甲外的 5 人中选 2 人站在最左边和最右边，有 A_5^2 种站法；第 2 步，余下 4 人(含甲)站在剩下的 4 个位置上，有 A_4^4 种站法。

由分步乘法计数原理可知，共有 $A_5^2A_4^4=480$ 种不同的站法。

方法二(元素分析法)：先安排甲的位置(既不站在最左边又不站在最右边)，再安排其他 5 人的位置，分为两步：

第 1 步，将甲排在除最左边、最右边外的任意位置上，有 A_4^1 种站法；第 2 步，余下 5 人站在剩下的 5 个位置上，有 A_5^5 种站法。

由分步乘法计数原理可知，共有 $A_4^1A_5^5=480$ 种不同的站法。

方法三(间接法)：6 人无限制条件排队有 A_6^6 种站法，甲站在最左边或最右边时 6 人排队有 $2A_5^5$ 种站法，因此符合条件的不同站法共有 $A_6^6-2A_5^5=480$ 种。

解题必备

定位、定元的排列问题，一般都是对某个或某些元素加以限制，被限制的元素通常称为特殊元素，被限制的位置称为特殊位置。这一类问题通常以三种途径考虑：

1. 以元素为主考虑：这时一般先解决特殊元素的排法问题，即先满足特殊元素，再安排其他元素。

2. 以位置为主考虑：这时一般先解决特殊位置的排法问题，即先满足特殊位置，再考虑其他位置。
3. 用间接法解题：先不考虑限制条件，计算出排列总数，再减去不符合要求的排列数。

题型训练·练其形

8.1 ( )6 个人排成一行，其中甲、乙两人不相邻的不同排法共有________种。

8.2 ( )5 个人排成一列，其中甲不排在末位，且甲、乙两人不能相邻，则满足条件的所有排列有(　　)种。

A. 18　B. 36　C. 48　D. 54

8.3 ( )从甲、乙等 5 个人中选出 3 人排成一列，则甲不在排头的排法种数为________。

题型训练·悟其神

8.4 ( )7 个人站成一排准备照一张合影，其中甲、乙要求相邻，丙、丁要求分开，则不同的排法有(　　)种。

A. 400　B. 720　C. 960　D. 1200

8.5 ( )某中学话剧社的 6 个演员站成一排照相，高一、高二和高三年级均有 2 个演员，则高一与高二两个年级中仅有一个年级的同学相邻的站法种数为(　　)。

A. 48　B. 144　C. 288　D. 576

8.6 ( )已知身穿红、黄两种颜色衣服的各有两人，身穿蓝颜色衣服的有一人，现将这五人排成一行，要求穿相同颜色衣服的人不能相邻，则不同的排法共有(　　)种。

A. 48　B. 72　C. 78　D. 84

核心例题 9　组数问题

( )由 0,1,2,3,4,5 这 6 个数字可以组成五位没有重复数字的奇数个数为(　　)个。

A. 288　B. 360　C. 480　D. 600

【答案】 A

【解析】 根据题意，末位数字可以为 1,3,5，有 A_3^1 种取法。首位数字不能为 0，有 A_4^1 种取法。再选 3 个数字，排在中间，有 A_4^3 种排法，则五位奇数共有 $A_3^1A_4^1A_4^3=288$，故选 A。

解题必备

1. 对于组数问题，一般按特殊位置（一般是末位和首位）由谁占领分类，分类中再按特殊位置（或者特殊元素）优先的方法分步完成。如果正面分类较多，可采用间接法从反面求解。
2. 解决组数问题，应特别注意其限制条件，有些条件是隐藏的，要善于挖掘。排数时，要注意特殊元素、特殊位置优先的原则。
3. 解决数字问题时，应注意题干中的限制条件，恰当地进行分类和分步，尤其注意特殊元素“0”的处理。

题型训练·练其形

9.1 (难度)由 0,1,2,3,5 组成的无重复数字的五位偶数共有(　　)个。

A. 36　B. 42　C. 48　D. 120

9.2 (难度)用数字 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 组成没有重复的数字,且至多有一个数字是偶数的四位数,这样的四位数的个数为(　　)个。

A. 1260　B. 1320　C. 1200　D. 1140

9.3 (难度)将数字 1,1,2,2,3,3,4,4 排成四行两列,要求每行的数字互不相同,每列的数字也互不相同,则不同的排列方法共有(　　)种。

A. 216　B. 72　C. 266　D. 274

题型训练·悟其神

9.4 (难度)用 0,1,2,3,4,5 这六个数字,组成数字不重复且大于 3000,小于 5421 的四位数有(　　)个。

A. 175　B. 174　C. 180　D. 185

9.5 (难度)由 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 组成没有重复数字的五位数,且是奇数,其中恰有两个数字是偶数,则这样的五位数的个数为(　　)个。

A. 7200　B. 6480　C. 4320　D. 5040

9.6 (难度)现有 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 共十个数字。

(1) 可以组成多少个无重复数字的三位数?

(2) 组成无重复数字的三位数中,315 是从小到大排列的第几个数?

(3) 可以组成多少个无重复数字的四位偶数?

(4) 选出一个偶数和三个奇数,组成无重复数字的四位数,这样的四位数共有多少个?

(5) 如果一个数各个数位上的数字从左到右按由大到小的顺序排列,则称此正整数为"渐减数",那么由这十个数字组成的所有"渐减数"共有多少个?

核心例题 10　分组与分配问题

(难度)学校安排 5 名学生到 3 家公司实习,要求每个公司至少有 1 名学生,则有________种不同的排法。

【答案】 150

【解析】 根据题意,分 2 步进行分析:

① 先将 5 名学生分成 3 组,若分成 1,1,3 的三组,有 $\dfrac{C_5^1C_4^1C_3^3}{A_2^2}=10$ 种分组方法;若分成 1,2,2 的三组,有 $\dfrac{C_5^1C_4^2C_2^2}{A_2^2}=15$ 种分组方法,则共有 $10+15=25$ 种分组方法。

② 再将分好的三组全排列,对应三个公司,有 $A_3^3=6$ 种情况,则有 $25\times6=150$ 种不同

的安排方式。

解题必备

分组、分配问题

分组问题和分配问题是有区别的，组与组之间即使元素个数相同，也是不可区分的。后者即使两组元素个数相同，但仍然是可区分的。对于这类问题必须遵循先分组后排列，若分组后有 m 组的个数是相同的，则分法 $A=\frac{\text{取法}}{m!}$。

有关分组问题的几种情况及其解决方案，分组问题有平均分组、不平均分组两种情况：

1. 均匀不编号分组：将 n 个不同元素均匀分成不编号的 m 组，解题时要注意分组后，不管它们的顺序如何，都是一种情况，所以分组后一定要除以 A_m^m，其分法种数为 $\frac{A}{A_m^m}$（其中 $A=C_n^{m_1}C_{n-m_1}^{m_2}C_{n-m_1-m_2}^{m_2}\cdots C_{n-m_1-m_2-\cdots-m_m}^{m_m}$）。

2. 非均匀不编号分组：将 n 个不同元素分成 m 组，每组元素数目均不相同，且不考虑各组间的顺序，分法种数为 $A=C_n^{m_1}C_{n-m_1}^{m_2}C_{n-m_1-m_2}^{m_2}\cdots C_{n-m_1-m_2-\cdots-m_m}^{m_m}$（其中 $m_1,m_2,\cdots,m_m$ 中任何两个元素都不相等）。

题型训练·练其形

10.1（🌶🌶🌶）4 名同学去社区参加文明实践活动，根据需要，要安排这 4 名同学去甲、乙两个文明实践站，每个实践站至少去 1 名同学，则不同的安排方法共有（　　）种。

A. 20　B. 14　C. 12　D. 10

10.2（🌶🌶🌶）某学校组织学生开展“百行体验”社会实践活动。现高三年级某班有 6 名学生需要去敬老院、社区医院、儿童福利院三个机构开展活动，要求每个机构去 2 名学生，且学生甲不去敬老院，则不同的安排共有（　　）种。

A. 60　B. 360　C. 15　D. 100

10.3（🌶🌶🌶）某学校为了做好学生返校工作组织了 6 个志愿服务小组，分配到 4 个大门进行行李搬运志愿服务，若每个大门至少分配 1 个志愿服务小组，每个志愿服务小组只能在 1 个大门进行服务，则不同的分配方法种数为（　　）。

A. 65　B. 125　C. 780　D. 1560

题型训练·悟其神

10.4（🌶🌶🌶🌶）甲、乙、丙、丁、戊共 5 名同学进行劳动技术比赛，决出第 1 名到第 5 名的名次。甲和乙去询问成绩，回答者对甲说：“很遗憾，你和乙都没有得到冠军。”对乙说：“你当然不会是最差的。”从这两个回答分析，5 人的名次排列方式共有（　　）种。

A. 54　B. 72　C. 96　D. 120

10.5（🌶🌶🌶🌶，多选题）某医院派出甲、乙、丙、丁 4 名医生到 A,B,C 三家企业开展防