

有限元基本理论

1.1 有限元法发展综述

在工程技术领域内,经常会遇到两类典型问题。第一类问题可以归结为有限个已知单元体的组合,例如,材料力学中的连续梁、建筑结构框架和桁架结构,我们把这类系统称为离散系统。尽管离散系统是可解的,但是求解此类离散系统是复杂的。第二类问题通常可以建立它们应遵循的基本方程(即微分方程)和相应的边界条件,例如弹性力学问题、热传导问题和电磁场问题等,由于建立基本方程所研究的对象通常是无限小的单元,因此我们把这类系统称为连续系统。尽管已经建立了连续系统的基本方程,但由于边界条件的限制,通常只能得到少数简单问题的精确解答。对于许多实际的工程问题,还无法给出精确的解答。为解决这个困难,工程师和数学家们提出了许多近似方法。

在寻找连续系统求解方法的过程中,工程师和数学家从两个不同的路线得到了相同的结果,即有限元法。有限元法的形成可以追溯到 20 世纪 50 年代,来源于固体力学中矩阵结构法的发展和工程师对结构相似性的直觉判断。从固体力学的角度来看,桁架结构等标准离散系统与人为地分割成有限个分区后的连续系统在结构上存在相似性。

1.1.1 有限元法的孕育过程及诞生和发展

电子计算机的出现和发展使有限元法在许多实际问题中的应用变为现实,并具有广阔的前景。有限元的应用范围也相当广泛,它涉及工程结构、传热、流体运动、电磁等连续介质的力学分析,并在气象、地球物理、医学等领域得到应用和发展。

在 17 世纪,牛顿和莱布尼茨发明了积分法,证明了该运算具有整体对局部的可加性。18 世纪,著名数学家高斯提出了加权余值法及线性代数方程组的解法。另一位数学家拉格朗日提出泛函分析。泛函分析是将偏微分方程改写为积分表达式的另一途径。19 世纪末 20 世纪初,数学家瑞雷和里兹首先提出可对全定义域运用位移函数来表达其上的未知函数。数学家伽辽金在 1915 年提出了选择位移函数中形函数的伽辽金法,被广泛地用于有限元。数学家库朗德在 1943 年第一次提出了可在定义域内分片使用位移函数来表达其上的未知函数,这实际上就是有限元的做法。

20世纪50年代,飞机设计师们发现无法用传统的力学方法分析飞机的应力、应变等问题。波音公司的一个技术小组首先将连续体的机翼离散为三角形板块的集合来进行应力分析,经过一番波折后获得成功。同样是在50年代,大型电子计算机被投入了解算大型代数方程组的工作,这为实现有限元技术准备好了物质条件。1960年,美国加州大学伯克利分校的R. W. 克拉夫(R. W. Clough)教授在论文中提出了“有限单元”这样的名词。值得骄傲的是,我国南京大学冯康教授在此前后独立地在论文中也提出了“有限单元”一词。此后,这种叫法被大家接受,有限元技术从此正式诞生。

1990年10月,美国波音公司开始在计算机上对新型客机B-777进行“无纸设计”,仅用了三年半时间,于1994年4月第一架B-777就试飞成功,这是制造技术史上划时代的成就,其中在结构设计和评判中就大量采用有限元分析方法。

在有限元分析的发展初期,由于其基本思想和原理的“简单”和“朴素”,以至于许多学术权威都对其学术价值有所鄙视,国际著名刊物《应用力学学报》(*Journal of Applied Mechanics*)多年来都拒绝刊登有关有限元分析的文章。然而现在,有限元分析已经成为数值计算的主流,不但国际上存在如Workbench等数种通用有限元分析软件,而且涉及有限元分析的刊物也有几十种之多。

1.1.2 有限元法的基本思想

有限元法的基本思想是将结构离散化,用有限个简单的单元来表示复杂的对象,单元之间通过有限个节点相互连接,然后根据平衡和变形协调条件综合求解。由于单元的数目是有限的,节点的数目也是有限的,所以称之为有限元法(finite element method, FEM)。有限元法是迄今为止最为有效的数值计算方法之一,它对科学与工程提供巨大支撑。

有限元法最早应用于结构力学,后来随着计算机的发展慢慢用于流体力学的数值模拟。在有限元法中,把计算域离散剖分为有限个互不重叠且相互连接的单元,在每个单元内选择基函数,用单元基函数的线性组合来逼近单元中的真解,整个计算域上总体的基函数可以看作由每个单元基函数组成,整个计算域内的解则可以看作由所有单元上的近似解构成。根据所采用的权函数和插值函数的不同,有限元法也分为多种计算格式。从权函数的选择来划分,有配置法、矩量法、最小二乘法 and 伽辽金法;从计算单元网格的形状来划分,有三角形网格、四边形网格和多边形网格;从插值函数的精度来划分,又分为线性插值函数和高次插值函数等。插值函数一般由不同次幂的多项式组成,也有的采用三角函数或指数函数组成的乘积表示,但最常用的是多项式插值函数。有限元插值函数分为两大类:一类只要求插值多项式本身在插值点取已知值,称为拉格朗日(Lagrange)多项式插值;另一种不仅要求插值多项式本身,还要求它的导数值在插值点取已知值,称为埃尔米特(Hermite)多项式插值。对于二维三角形和四边形单元,常采用的插值函数包括有拉格朗日插值的直角坐标系中的线性插值函数及二阶或更高阶插值函数、面积坐标系中的线性插值函数及二阶或更高阶插值函数等。

1.1.3 有限元的应用及发展趋势

国际上在20世纪50年代末60年代初就投入了大量的人力和物力开发具有强大功能

的有限元分析软件,其中最为著名的是由美国国家宇航局(National Aeronautics and Space Administration, NASA)在 1965 年委托美国计算科学公司和贝尔航空系统公司开发的 Nastran 有限元分析系统。该系统目前是世界上规模最大、功能最强的有限元分析系统。同时,世界各地的研究机构和大学也开发了一批规模较小但使用灵活、价格较低的专用或通用有限元分析软件,主要有德国的 Aska,英国的 Pafec,法国的 Systus,以及美国的 Abaqus、Adina、Ansys、Bersafe、Bosor、Cosmos、Elas、Marc 和 Sturdyne 等公司的产品。目前国际上有限元分析(finite element analysis, FEA)方法和软件发展呈现出以下趋势特征:

1) 从单纯的结构力学计算发展到求解许多物理场问题

有限元分析方法最早是从结构化矩阵分析发展而来的,实践证明这是一种非常有效的数值分析方法。从理论上也已经证明,只要用于离散求解对象的单元足够小,所得的解就可足够逼近于精确值。所以近年来有限元法已发展到流体力学、温度场、电传导、磁场、渗流和声场等问题的求解计算,最近又发展到求解几个交叉学科的问题。

2) 由求解线性工程问题发展到分析非线性问题

随着科学技术的发展,线性理论已经远远不能满足设计的要求。针对塑料、橡胶和复合材料等各种新材料的出现,仅靠线性计算理论不足以解决遇到的问题,只有采用非线性有限元算法才能解决。众所周知,非线性的数值计算是很复杂的,它涉及很多专门的数学问题和运算技巧,很难为一般工程技术人员掌握。为此,近年来国外一些公司花费了大量的人力和物力开发诸如 Marc、Abaqus 和 Adina 等专门求解非线性问题的有限元分析软件,并广泛应用于工程实践,这些软件的共同特点是具有高效的非线性求解器以及丰富和实用的非线性材料库。

3) 增强可视化的前置建模和后置数据处理功能

早期有限元分析软件的研究重点在于推导新的高效率求解方法和高精度的单元。随着数值分析方法的逐步完善,尤其是计算机运算速度的极大提高,整个计算系统用于求解运算的时间越来越短,而数据准备的充足和运算结果的精度问题却日益突出。因此,目前几乎所有的商业化有限元程序系统都有功能很强的前置建模和后置数据处理模块。在强调“可视化”的今天,很多程序都建立了对用户非常友好的图形用户接口(graphics user interface, GUI),使用户能以可视图形方式直观、快速地进行网格自动划分,生成有限元分析所需数据,并按要求将大量的计算结果整理成变形图、等值分布云图,以便于极值搜索和所需数据的列表输出。

4) 与 CAD 软件的无缝集成

当今有限元分析系统的另一特点是与通用 CAD 软件的集成使用,即在用 CAD 软件完成部件和零件的造型设计后自动生成有限元网格并进行计算,如果分析的结果不符合设计要求则重新进行造型和计算,直到满意为止,从而极大地提高了设计水平和效率。所以,当今所有的商业化有限元系统商都开发了和著名的 CAD 软件(例如 Pro/ENGINEER、Unigraphics、SolidEdge、SolidWorks、I-DEAS、Bentley 和 AutoCAD 等)的接口。

5) 在 Wintel 平台上的发展

PC 机的出现使计算机的应用发生了根本性的变化,使工程师渴望在办公桌上完成复杂工程分析的梦想成为现实。但是早期的 PC 机采用 16 位 CPU 和 DOS 操作系统,内存中的公共数据块受到限制,因此当时计算模型的规模不能超过 1 万阶方程。Microsoft

Windows 操作系统和 32 位的 Intel Pentium 处理器的推出为将 PC 机用于有限元分析提供了必需的软件和硬件支撑平台。因此,当前国际上著名的有限元程序研究和机构都纷纷将他们的软件移植到 Wintel 平台上。将在大中型计算机和 EWS 上开发的有限元程序移植到 PC 机上时,常常需要采用 Hummingbird 公司的一个仿真软件 Exceed。这样做的结果是比较麻烦,而且不能充分利用 PC 机的软硬件资源。所以,最近有些公司,例如 IDEAS、ADINA 和 R&D 开始在 Windows 平台上开发有限元程序,称作“本机 Windows”版本,同时还有在 PC 机上的 Linux 操作系统环境中开发的有限元程序包。

6) ANSYS 版本历史演进

1963 年,ANSYS 的创办人约翰·斯旺森(John Swanson)博士写了一些程序来计算加载温度和压力的结构应力和变位。几年下来,在 Wilson 博士原有的有限元素法热传导程序基础上,扩充了不少三维分析的程序,包括板壳、非线性、塑性、潜变、动态全程等。1970 年,商用软件 ANSYS 宣告诞生。1979 年左右,ANSYS 3.0 版开始可以在 VAX11-780 迷你计算机上执行。此时 ANSYS 已经由定格输入模式演化到指令模式,并可以在 Tektronix 4010 及 4014 单色向量绘图屏幕上显示图形。稍微像样一点的模型,通常要花 20~30min 来显示隐线图形。节点和元素都必须一笔一笔建立,完全没有办法汇入外部几何模型。用户大量使用 NGEN、EGEN、RPnnn 等指令来建构模型,当时已有简单的几何前处理器 PREP7。

1984 年,ANSYS 4.0 也开始支持 PC。当时使用的芯片是 Intel 286,使用指令互动的模式,可以在屏幕上绘出简单的节点和元素。在 PC 上的第 1 版 ANSYS,前置处理、后置处理及求解都在不同的程序上执行。1993 年推出 5.0 版,随后 1994 年的 5.1 版已经有 Motif 格式的图形界面,并一直到 6.0 版都维持类似的形态。1996 年,ANSYS 推出 5.3 版,此版是 ANSYS 第一次支持 LS-DYNA 软件。2001 年 ANSYS 推出了 CADfixfor ANSYS 5.6.2/5.7,以解决由外部汇入不同几何模型文件的问题,接着先后并购了 CADOES、A 及 ICEM CFD Engineering。同年 12 月,ANSYS 6.0 版开始发售。此版的离散(sparse)求解模块有显著的改进,不但速度加快,而且内存空间需求大为减小。2002 年 4 月,ANSYS 推出 6.1 版,为大家所熟悉的 Motif 格式图形界面被新的版面取代(用户仍可使用旧界面),此新的界面是由 Tcl/Tk 发展出来的。此版也支持 Intel Itanium 64 位芯片及 Windows XP 的组合。2002 年 10 月,ANSYS 推出 7.0 版,此版的离散求解模块有更进一步的改进,一般而言效率比 6.0 版提高 20%~30%,在接触分析方面也有一些重大的改进和加强。7.0 版也加入了智能 Workbench 环境(AI Workbench Environment),这是 ANSYS 合并 ICEM CFD 公司后,采用其技术来改进 ANSYS 的一个重要里程碑。

2006 年 2 月 16 日,ANSYS 公司宣布收购了全球著名的 CAE 仿真软件供应商和技术服务商 Fluent 公司。2019 年 9 月 18 日,ANSYS 公司宣布收购了显性动力学和其他先进有限元分析技术的主要提供商 LSTC 公司。ANSYS 公司 2020 年 7 月 15 日发布了 ANSYS 2020。ANSYS 软件发展到今天,已经具有结构分析、热分析、显示动力学分析、电磁场分析、流体动力学分析、多物理场耦合分析、优化等众多功能,广泛应用在以下诸多领域:建筑、勘察、地质、水利、交通、电力、测绘、国土、环境、林业、冶金等。

1.2 有限元分析基本理论

有限元将一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题进行求解。如果将区域划分成很细的网格,也即单元的尺寸变得越来越小,或随着单元自由度的增加及插值函数精度的提高,解的近似程度将不断被改进。如果单元是满足收敛要求的,近似解最后可收敛于精确解。

有限元法的基本思路是将一个求解区域分割成有限个不重叠且按一定方式相互连接在一起的子域(单元),利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数。单元内的场函数通常由未知场函数或其导数在单元各个节点的数值和其插值函数来近似表示,这样,未知场函数或其导数在各个节点上的数值即成为未知量(自由度)。根据单元在边界处相互之间的连续性,将各单元的关系式集成方程组,求出这些未知量,并通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值,就可得到全求解域上的近似解。

1.2.1 有限元分析的基本概念和计算步骤

下面首先以求解连续梁为例,引出结构有限元分析的一些基本概念和计算步骤。

如图 1-1 所示,连续梁承受集中力矩作用。将结构离散为 3 个节点、2 个单元。结构中的节点编号为 1、2、3;单元编号为①、②。

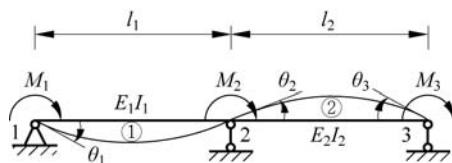


图 1-1 受集中力矩作用的连续梁

1. 单元分析

在有限元分析过程中,第一步是进行结构离散,并对离散单元进行分析,分析的目的是得到单元节点的力与位移的关系。单元分析的方法有直接法和能量法,以下采用直接法进行分析。

从连续梁中取出一个典型单元 e , 左边为节点 i , 右边为节点 j 。将节点选择在支承点处,单元两端只产生转角位移 θ_i^e, θ_j^e , 顺时针转动为正。独立的单元杆端内力为弯矩 m_i, m_j , 顺时针为正。

记: $\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix}^e$ 为单元 e 的节点位移向量; $\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} m_i \\ m_j \end{bmatrix}^e$ 为单元 e 的杆端力向量。

根据结构力学位移法可得如下平衡方程:

$$\begin{cases} m_i^e = k_{11}^e \theta_i^e + k_{12}^e \theta_j^e \\ m_j^e = k_{21}^e \theta_i^e + k_{22}^e \theta_j^e \end{cases} \quad (1-1)$$

式中, $k_{11}^e = k_{22}^e = 4i_e$, $k_{21}^e = k_{12}^e = 2i_e$, $i_e = \frac{EI}{l}$, EI 、 l 分别为单元 e 的抗弯刚度和长度。

k_{ij}^e ($i, j=1, 2$) 的物理意义为节点 j 处发生单位转角引起的 i 处的力矩, 将式(1-1)写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} m_i \\ m_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix}^e \quad (1-2)$$

或

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (1-3)$$

式(1-2)、式(1-3)称为梁单元 e 的刚度方程。式中, \mathbf{K}^e 称为梁单元 e 的刚度矩阵, 只要知道梁单元的 EI 、 l 就可计算出单元刚度矩阵。

以上分析实现了单元分析的目的, 即得到单元刚度方程和单元刚度矩阵。

2. 整体分析

有限元分析的第二步是将离散的单元集成整体, 组集过程可见图 1-2。在组集过程中, 必须满足以下条件:

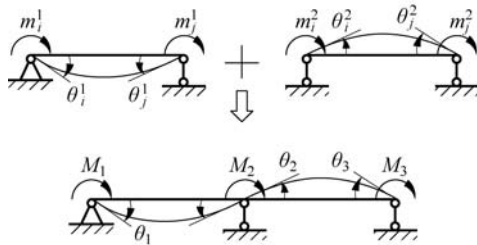


图 1-2 离散的单元集成整体

(1) 变形协调

$$\begin{cases} \theta_i^1 = \theta_1 \\ \theta_j^1 = \theta_i^2 = \theta_2 \\ \theta_j^2 = \theta_3 \end{cases} \quad (1-4)$$

(2) 节点平衡

$$\begin{cases} \sum M_1 = 0, & M_1 - m_i^1 = 0 \\ \sum M_2 = 0, & M_2 - m_i^2 - m_j^1 = 0 \\ \sum M_3 = 0, & M_3 - m_j^2 = 0 \end{cases} \quad (1-5)$$

将式(1-2)代入式(1-5)可得

$$\begin{cases} 4i_1\theta_i^1 + 2i_1\theta_j^1 = M_1 \\ (2i_1\theta_i^1 + 4i_1\theta_j^1) + (4i_2\theta_i^2 + 2i_2\theta_j^2) = M_2 \\ 2i_2\theta_i^2 + 4i_2\theta_j^2 = M_3 \end{cases} \quad (1-6)$$

将式(1-4)代入式(1-6), 整理得

$$\begin{cases} 4i_1\theta_1 + 2i_2\theta_2 = M_1 \\ 2i_1\theta_1 + (4i_1 + 4i_2)\theta_2 + 2i_2\theta_3 = M_2 \\ 2i_2\theta_2 + 4i_2\theta_3 = M_3 \end{cases} \quad (1-7)$$

写成矩阵形式,得

$$\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

式(1-8)称为结构刚度方程,它实际上是结构的节点平衡方程,记为

$$\mathbf{K}\Delta = \mathbf{P} \quad (1-9)$$

式中, \mathbf{K} ——该结构的原始刚度矩阵, $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix}$;

Δ ——该结构的位移向量, $\Delta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$;

\mathbf{P} ——该结构的节点荷载向量, $\mathbf{P} = [M_1 \quad M_2 \quad M_3]^T$ 。

以上分析实现了整体分析,即得到了结构原始刚度矩阵和结构刚度方程。

3. 用直接刚度法形成结构刚度矩阵

前文通过整体分析,建立了节点的平衡方程,即结构的刚度方程,从而得到结构刚度矩阵。但是,要实现电算,不可能对每一具体结构都做一次总体分析,而应该找到一种规律,在确定了节点位移和荷载的排序后,使计算机能够直接由单元刚度矩阵集成结构刚度矩阵,从单元刚度方程得到结构的刚度方程,这一方法称为直接刚度法。下面介绍用直接刚度法直接由单元刚度矩阵集成结构刚度矩阵的过程。

1) 确定结构刚度矩阵的阶数

结构刚度方程中第 i 行,表示该结构第 i 个位移分量上力的平衡方程,因此,如果结构有 N 个独立位移分量,就可列出 N 个独立平衡方程,结构刚度矩阵就是 $N \times N$ 的。本例有 3 个独立的位移分量,故总刚度矩阵必然为 3×3 的,写成

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

2) 确定单元刚度矩阵中元素与结构刚度矩阵中元素的关系

若将单元刚度矩阵下标写成位移分量编号的形式:

单元 1: $i=1, j=2$,

$$\mathbf{k}^1 = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

单元 2: $i=2, j=3$,

$$\mathbf{k}^2 = \begin{bmatrix} k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

则有： $k_{11} = k_{11}^1, k_{12} = k_{12}^1, k_{13} = 0, k_{21} = k_{21}^1, k_{22} = k_{22}^1 + k_{22}^2, k_{23} = k_{23}^2, k_{31} = 0, k_{32} = k_{32}^2, k_{33} = k_{33}^2$ 。

可见，若将单元刚度矩阵中元素下标写成位移分量编号的形式，则结构刚度矩阵中任一刚度元素与单元刚度矩阵中元素有如下关系：

$$k_{ij} = \sum_{e=1}^{ne} k_{ij}^e \quad (1-13)$$

式中， e ——单元号；

ne ——结构单元总数。

因此，用直接刚度法集成总刚，可归纳为以下几步：

(1) 对结构未知量进行编号，确定各未知量在结构刚度方程中的位置(行号)。

(2) 确定结构刚度矩阵的阶数 N 。

(3) 对单元 e 进行循环，寻找 e 单元刚度矩阵中各元素下标对应于整体刚度方程中的未知量编号，并按此编号，根据式(1-13)分别叠加到结构总体刚度矩阵中的对应位置上去。

对单元循环完毕后，结构刚度矩阵就形成了。形成结构刚度矩阵是有限元分析过程中十分重要的环节，为了节约计算机存储空间，加快刚度方程求解速度，我们还必须了解结构刚度矩阵具有如下性质：

(1) 结构刚度矩阵是 $N \times N$ 的方阵， N 为结构的未知量总数。

(2) 结构刚度矩阵是对称阵，即 $k_{ij} = k_{ji}$ ，这一性质由力-位移互等定理决定。

(3) 处于同一单元上的两个未知量称为相关未知量。若两个未知量不相关，则 $k_{ij} = 0$ 。由式(1-13)可知，两个未知量不相关，就没有单元刚度矩阵贡献，因此 $k_{ij} = 0$ ，如本例中 $k_{13} = k_{31} = 0$ 。

(4) 结构刚度矩阵为带状矩阵，其非 0 元素分布在主对角线元素附近。

(5) 结构刚度矩阵是稀疏阵，非 0 元素很少。对于较大规模的结构，结构刚度矩阵中的非 0 元素只占总元素的 10% 左右。

(6) 结构刚度矩阵是非负定矩阵，即对任意不为 0 的 N 维向量 \mathbf{x} 有： $\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \geq 0$ 。

4. 支承条件的引入

通常在结构原始刚度矩阵 \mathbf{K} 建立以后，才引入支承条件。改变本例中节点 3 的边界条件，如图 1-3 所示，在节点 1 和 2 处转角 θ_1, θ_2 是未知量，节点力矩 M_1, M_2 是已知量，节点 3 是固定端， M_3 为未知量，转角 θ_3 是已知量，即 $\theta_3 = 0$ 。

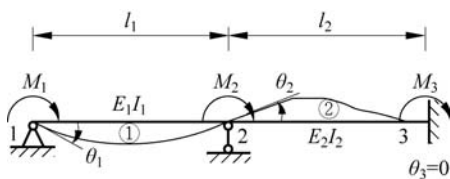


图 1-3 改变节点边界条件的连续梁

计算时，我们分两步来进行：

第一步，暂不引入支承条件和荷载情况，先建立原始刚度方程，即式(1-8)。

第二步，在固定端引入支承条件 $\theta_3 = 0$ ，即将

式(1-8)修改为

$$\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

为了求解 θ_1 、 θ_2 ，可从矩阵方程中取出前面两个方程：

$$\begin{cases} 4i\theta_1 + 2i\theta_2 = M_1 \\ 2i\theta_1 + (4i_1 + 4i_2)\theta_2 = M_2 \end{cases} \quad (1-15)$$

即

$$\begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i_1 + 4i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

式(1-16)就是引入支承条件和荷载情况后得到的位移法基本方程，由此可解出基本未知量 θ_1 、 θ_2 。

将式(1-16)与式(1-8)比较，可以看出，如果在式(1-8)中将 \mathbf{K} 的第3行和第3列划去，同时将右边向量中的相应元素划去，就可直接得出式(1-16)。因此，引入支承条件的问题就归结为划去对应未知量的行与列的问题，这种方法称为划行划列法。

有时，为了能方便计算支反力，我们可以将式(1-8)写成

$$\begin{bmatrix} k_{\alpha\alpha} & k_{\alpha\beta} \\ k_{\beta\alpha} & k_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_\alpha \\ \Delta_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\alpha \\ P_\beta \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

式中， Δ_α ——未知位移量， $\Delta_\alpha = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ ；

Δ_β ——已知位移， $\Delta_\beta = \theta_3$ ；

P_α ——已知荷载向量， $P_\alpha = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$ ；

P_β ——未知荷载向量或支反力， $P_\beta = M_3$ 。

式(1-17)可写成如下两个独立方程组：

$$k_{\alpha\alpha}\Delta_\alpha + k_{\alpha\beta}\Delta_\beta = P_\alpha \quad (1-18)$$

$$k_{\beta\alpha}\Delta_\alpha + k_{\beta\beta}\Delta_\beta = P_\beta \quad (1-19)$$

由于 $\Delta_\beta = \theta_3 = \mathbf{0}$ ，所以式(1-18)等价于式(1-16)。

当 Δ_α 求得后，代入式(1-19)则可求得支反力：

$$P_\beta = k_{\beta\alpha}\Delta_\alpha + \mathbf{0} \quad (1-20)$$

对于本例，即

$$M_3 = k_{\beta\alpha}\Delta_\alpha = [0 \quad 2i_2] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = 2i_2\theta_2 \quad (1-21)$$

由此可见，要计算支反力，必须先将已知位移对应的刚度矩阵元素 $k_{\beta\alpha}$ 提取出来，然后再划行划列。

在程序计算中，希望将引入支座后的矩阵仍保留原来的阶数且未知量排列顺序不变，为此，可将式(1-16)扩大成如下形式：

$$\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-22)$$

即对原始刚度矩阵先提取对应于已知位移向量的刚度元素,以备计算支座反力用,再将原始刚度矩阵中这些元素全部置0,对角线元素置1。荷载向量中对应的元素也置0。这种处理约束的方法称为充0置1法。

5. 非节点荷载的处理

如果在单元内有非节点荷载,就不可能直接建立结构刚度方程,因为结构刚度方程表示的是节点力的平衡方程。如图1-4(a)所示结构具有3个节点,2个单元, M_1 、 M_2 、 M_3 为节点荷载, M' 、 M'' 为非节点荷载。要解决这个问题,需用等效节点荷载代替非节点荷载来分析整体结构受力,处理原则为使等效节点荷载作用下结构的节点位移与实际荷载作用下的结构节点位移相等。具体可按如下步骤处理。

1) 求等效节点荷载

计算非节点荷载的等效节点荷载时可分两步进行。

第一步:在各节点加上约束,阻止节点发生位移,计算结构上所有非节点荷载的效应,如图1-4(b)所示,其中 M_{01} 、 M_{02} 、 M_{03} 为非节点荷载在增加的约束中引起的反力(弯矩)。

单元①、②产生的固端力矩(加脚标0表示固端力矩)为

$$\mathbf{M}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} M_{0i} \\ M_{0j} \end{bmatrix}^{(1)}, \quad (\mathbf{M}_0)^{(2)} = \begin{bmatrix} M_{0i} \\ M_{0j} \end{bmatrix}^{(2)} \quad (1-23)$$

各节点增加的约束中的反力分别为与该节点相关联单元的固端力矩之和:

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \\ M_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{0i}^{(1)} \\ M_{0j}^{(1)} + M_{0i}^{(2)} \\ M_{0j}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

第二步:去掉各节点的约束,相当于在各节点施加外力矩向量 $\mathbf{P} = -\mathbf{M}_0$,再叠加上原有的节点荷载 M_1 、 M_2 、 M_3 ,总的节点荷载如图1-4(c)所示。

显然,把图1-4(b)和(c)两种情况叠加就得到图1-4(a)给出的情况。图1-4(c)中的节点荷载 \mathbf{P} 称为结构非节点荷载的等效节点荷载,而式(1-23)中的单元固端力矩 $\mathbf{M}_0^{(1)}$ 、 $\mathbf{M}_0^{(2)}$ 叫作相应单元荷载的等效节点荷载。

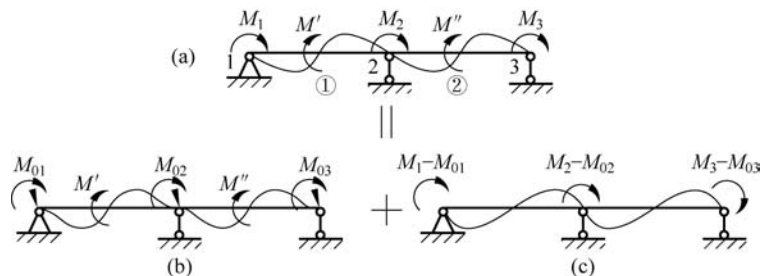


图 1-4 单元内有非节点荷载作用的连续梁