



数学新教育丛书

互联网+

网络画板动态解析高中数学：

解析几何与立体几何

杨志友 杨曾麟 主编

清华大学出版社
北 京

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。
版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

互联网+网络画板动态解析高中数学:解析几何与立体几何/杨志友,杨曾麟主编. —北京:清华大学出版社,2023.1
(数学新教育丛书)
ISBN 978-7-302-62397-7

I. ①互… II. ①杨… ②杨… III. ①中学数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 012962 号

责任编辑:汪 操
封面设计:常雪影
责任校对:王淑云
责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>
地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084
社 总 机:010-83470000 邮 购:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市东方印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:15

版 次:2023 年 3 月第 1 版

定 价:54.00 元

字 数:362 千字

印 次:2023 年 3 月第 1 次印刷

产品编号:093698-01

编 委 会

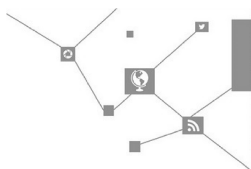
主 编：杨志友 杨曾麟

副主编：方正娥 张世凡

编 委：龙绍华 李连代 李 勇 李 飞

陈 飞 谭真银 李海林 陈良荣

杨 柳 熊 云 邓李平 冉 红



前言

PREFACE

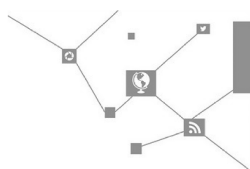
高中数学因其固有的高度抽象性而难教、难学,本书充分运用网络画板辅助教学技术,着力于让静态图形动态化、繁杂表述可视化、抽象思维形象化,使“形”与“数”可以自由转换,让“可见形式”与“抽象形式”能够直接产生联系。为师生交流、生生交流、人机交流搭建平台,为学习和教学提供丰富的资源。

本书旨在帮助广大学生不断培养数学思维,并持续建构数学思维体系。学生通过网络画板“数—形”转换的学习,透过现象看本质,掌握数学的内在规律,形成用数学的眼光观察世界、数学的思维思考世界、数学的语言表达世界的理性思维。本书将信息技术与数学课程深度融合,为读者提供丰富的学习资源,设计生动的教学活动,促进数学教学方式方法的创新。本书在解决实际问题中,创设了合理的信息化学习环境,有利于培养学生的探究兴趣,开阔学生的视野,激发学生的想象力,提高学生的信息素养水平。

本书主要内容为解析几何和立体几何的动态解析,众所周知,解析几何的特点是代数问题几何化、几何问题代数化,让数的精准和图的直观紧密结合在一起,互为所用。立体几何的特点是“立体”,即三维,对学生的空间想象能力要求很高,学生学起来很困难,难在数形不能自由转换,难在从二维平面感知三维图像。基于网络画板的动态解析可以很好解决上述问题,本书以日常教与学中的难点为主要内容,以网络画板为工具,结合编者近30年的一线教学经历,从几万道试题中精选出最具代表性的典型例题和习题,匠心打造每一个动画作品和解析,为广大高中数学教师课堂教学信息化提供有效参考,为广大高中学子攀登数学高峰提供“登山杖”,为广大科研工作者研究数学教学提供灵动视界,是广大高校数学专业师范学生走上工作岗位值得研修的一门课程。

编 者

2022年12月



目 录

CONTENTS

第 1 章 直线与圆	1
1.1 直线的倾斜角与斜率	1
1.2 直线的方程	3
1.3 距离公式	6
1.4 对称问题	11
1.5 圆的方程	13
1.6 直线与圆	17
1.7 圆与圆的位置关系	23
练习	26
第 2 章 圆锥曲线中定点问题	30
2.1 与椭圆有关的定点问题	30
2.2 与抛物线有关的定点问题	35
2.3 与圆有关的定点问题	38
2.4 与双曲线有关的定点问题	43
练习	46
第 3 章 解析几何中的轨迹问题	48
3.1 定义法求轨迹	48
3.2 直接法求轨迹	51
3.3 参数法求轨迹	53
3.4 相关点法(代入法)求轨迹	57
3.5 交轨法求轨迹	60
3.6 点差法求轨迹	63
练习	65
第 4 章 解析几何中的最值问题	67
4.1 向量的数量积的范围问题	67
4.2 离心率的范围	69



4.3	线段比值范围	73
4.4	线段长的最值	76
4.5	面积的最值问题	82
4.6	最值问题综合	85
	练习	89
第5章	立体几何中的截面问题	91
5.1	截面的画法	91
5.2	确定截面形状	97
5.3	与截面有关的计算问题	101
	练习	106
第6章	立体几何中的最值问题	107
6.1	空间角的最值	107
6.2	空间距离的最值问题	110
6.3	面积的最值问题	116
6.4	体积的最值	118
	练习	121
第7章	立体几何中的轨迹问题	123
7.1	定义法	123
7.2	平面几何法	127
7.3	坐标法	131
7.4	交轨法	134
	练习	139
第8章	立体几何中的折叠问题	140
8.1	折叠问题中的点线面位置关系	140
8.2	折叠问题中的线面角	143
8.3	折叠问题中的体积	146
8.4	折叠问题中的二面角	149
	练习	152
第9章	立体几何中探索性问题	155
9.1	平行的探索	155
9.2	位置的探索	161
9.3	角的探索	164
9.4	垂直探索	168
9.5	距离的探索	173



练习	177
第 10 章 外接球内切球问题	180
10.1 球的性质应用	180
10.2 球的截面问题	182
10.3 与外接球有关的体积问题	185
10.4 与外接球有关的面积问题	188
10.5 内切球问题	193
练习	196
练习参考答案	198

第 1 章

直线与圆

直线与圆是解析几何知识的基础,也是进一步研究圆锥曲线的基础,它们渗透到平面解析几何的各个部分,是解决解析几何问题的重要工具之一,也是高考必考内容之一。高考考查的重点是直线与圆的方程、直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系等内容,既有考查基础知识、基本技能和基本数学思想方法的容易题和中等难度题,又有考查综合分析和解决问题能力的较难题和难题。许多试题设计精巧,富有创意,导向性强。



1.1 直线的倾斜角与斜率

例 1 直线 l 经过 $A(2, 1), B(1, m^2) (m \in \mathbf{R})$, 那么直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是_____。

【解析】

直线 l 的斜率存在且 $k = \frac{m^2 - 1}{1 - 2} = 1 - m^2 \leq 1$, 又直线的倾斜角为 α , 则有 $\tan \alpha \leq 1$, 即 $\tan \alpha < 0$ 或 $0 \leq \tan \alpha \leq 1$ 。

根据在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 与 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上的正切函数图像, 可得 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 或 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, 即 α 的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 。



编号: 246942,



扫描二维码,打开课件,如图 1.1.1、图 1.1.2 所示,拖动点 B 或变量 m 的滑杆改变 m 的值,观察直线倾斜角的变化,考察倾斜角的取值范围。

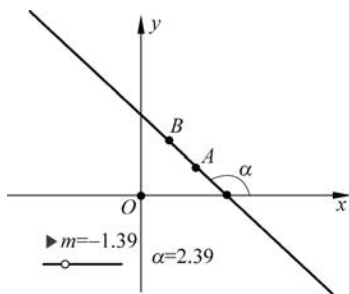


图 1.1.1

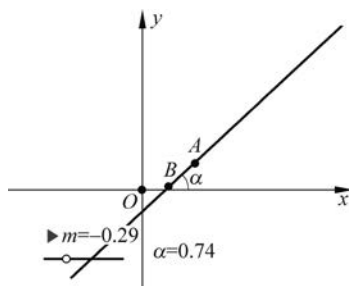


图 1.1.2

评注

直线倾斜角的取值范围是 $[0, \pi)$, 而这个区间不是正切函数的单调区间, 因此根据斜率求倾斜角的范围时, 要分 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 与 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 两种情况讨论。当 $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 斜率 $k \in [0, +\infty)$; 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 斜率不存在; 当 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, 斜率 $k \in (-\infty, 0)$ 。借助正切函数图像观察, 更加直观形象。

例 2 已知 $A(-2, 3)$, $B(3, 2)$, 过点 $P(0, -2)$ 的直线 l 与线段 AB 有公共点, 则直线 l 的斜率的取值范围为_____。

【解析】

方法 1: 如图 1.1.3 所示, 直线 l 与线段 AB 有公共点, 则直线 l 的倾斜角应介于 PA , PB 的倾斜角之间。

当直线的倾斜角小于直角时, $k \geq k_{PB}$; 当直线的倾斜角大于直角时, $k \leq k_{PA}$ 。

所以直线 l 的斜率的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$ 。

方法 2: 设直线 $l: kx - y - 2 = 0$, 则 $A(-2, 3)$, $B(3, 2)$ 在该直线两侧或其中一点在直线上, 所以 $(-2k - 3 - 2)(3k - 2 - 2) \leq 0$ 。

故直线 l 的斜率的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$ 。

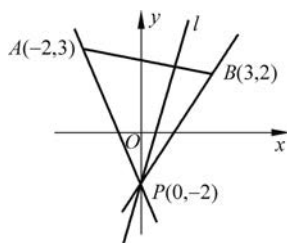


图 1.1.3

动态解析

编号: 246966,



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.1.4 所示; 拖动点 C 在线段 AB 上运动, 改变 l 的位置, 如图 1.1.5 所示, 观察直线倾斜角的变化, 考察倾斜角的取值范围; 点击按钮 **辅助线**, 显示直

线 PA, PB 及其倾斜角,如图 1.1.6 所示;再次拖动点 C 在线段 AB 上运动,领会直线 l 的倾斜角与直线 PA, PB 倾斜角间的关系,如图 1.1.7 所示。

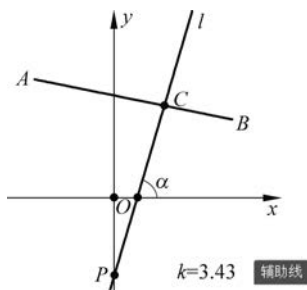


图 1.1.4

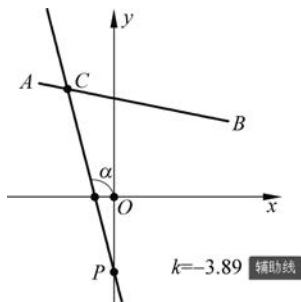


图 1.1.5

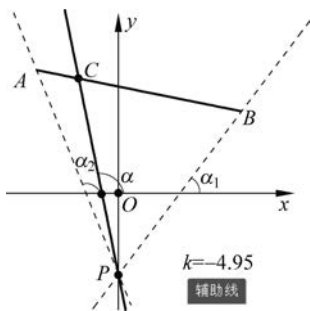


图 1.1.6

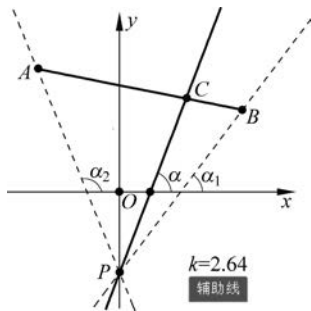


图 1.1.7

评注

求过定点的直线斜率的取值范围,可直接求过端点的直线的斜率,数形结合写出范围,但容易将范围写反。此外,还可以用线性规划中不等式的几何意义,列不等式求解,避免出错。



1.2 直线的方程

例 1 过点 $P(1,2)$ 作直线 l ,若点 $A(2,3), B(4,-5)$ 到它的距离相等,则直线 l 的方程是_____。

【解析】

方法 1: 若 A, B 位于直线 l 的同侧,则直线 $l \parallel AB, k_{AB} = \frac{3+5}{2-4} = \frac{8}{-2} = -4$, 直线 l 为 $4x + y - 6 = 0$ 。

若 A, B 两点位于直线 l 的异侧,则 l 必经过线段 AB 的中点 $(3, -1)$ 。

故直线 l 的方程为 $3x + 2y - 7 = 0$ 。

方法 2: 设直线 l 的方程为 $y - 2 = k(x - 1)$, 即 $kx - y + 2 - k = 0$, 则 $\frac{|2k - 3 + 2 - k|}{\sqrt{k^2 + 1}} =$

$\frac{|4k+5+2-k|}{\sqrt{k^2+1}}$, 化简得 $k-1=3k+7$ 或 $k-1+3k+7=0$, 解得 $k=-4$ 或 $k=-\frac{3}{2}$ 。

故直线 l 的方程为 $4x+y-6=0$ 或 $3x+2y-7=0$ 。

动态解析

编号: 247999,



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.2.1 所示, 图中 M 为直线 l 上一点, d_1, d_2 分别表示点 A, B 到直线 l 的距离; 拖动点 M 运动或变量 k 的滑杆改变 k 的值, 如图 1.2.2~图 1.2.4 所示, 观察点 A, B 到直线 l 的距离 d_1, d_2 的变化, 探究 $d_1=d_2$ 的条件。

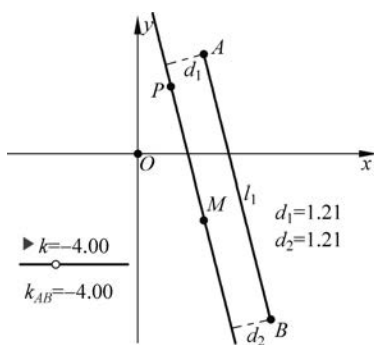


图 1.2.1

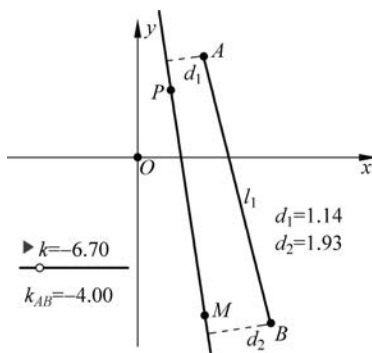


图 1.2.2

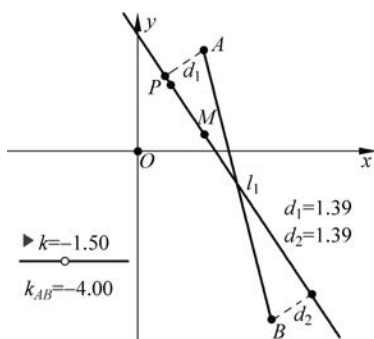


图 1.2.3

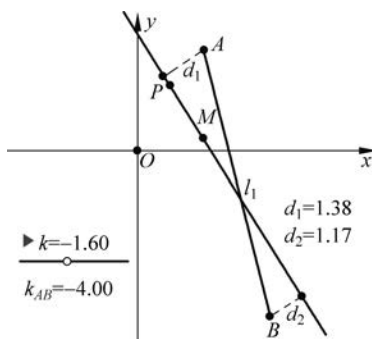


图 1.2.4

评注

点斜式: 已知直线过点 (x_0, y_0) , 斜率为 k , 则直线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 它不包括垂直于 x 轴的直线; 斜截式: 已知直线在 y 轴上的截距 b , 则直线方程为 $y = kx + b$, 它不包括垂直于 x 轴的直线。

例 2 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, P 是 AB 上的点, 求点 P 到 AC, BC 的距离乘积的最大值。

【解析】

如图 1.2.5 所示,以 CB 所在的直线为 x 轴, CA 所在的直线为 y 轴,建立平面直角坐标系。

点 $P(x,y)$ 在直线 AB 上,满足 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 (x > 0, y > 0)$ 。

点 P 到 AC, BC 的距离分别是 $|PN|, |PM|$, 则 $|PN| \cdot |PM| = xy$ 。

因为 $1 = \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{12}}$, 所以 $xy \leq 3$, 当且仅当 $x = \frac{3}{2}, y = 2$ 时取等号。

故点 P 到 AC, BC 的距离乘积的最大值是 3。

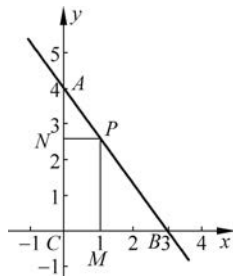


图 1.2.5

动态解析

编号: 248007,



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.2.6 所示; 拖动点 P 在线段 AB 上运动, 如图 1.2.7 所示, 观察 $|PM| \cdot |PN|$ 的变化, 探究 $|PM| \cdot |PN|$ 取得最大值的条件。

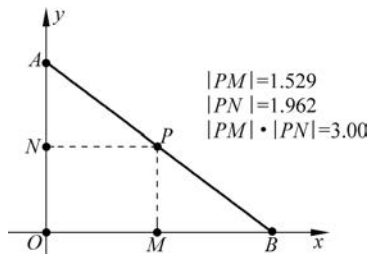


图 1.2.6

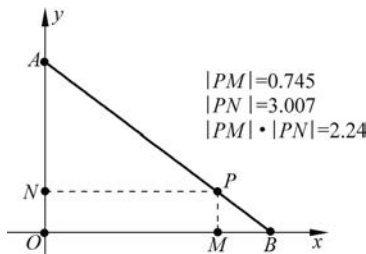


图 1.2.7

评注

截距式: 已知直线在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 a, b , 则直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, 它不包括垂直于坐标轴的直线和过原点的直线。求直线方程时, 若采用截距式, 应注意分类讨论, 判断截距是否为零。如果截距相等或互为相反数或绝对值相等或有倍数关系时, 要考虑截距可能为零。

例 3 过点 $(2, 1)$ 且在两坐标轴截距相等的直线方程是_____。

【解析】

当截距为 0 时, 所求直线方程是 $x - 2y = 0$; 当截距不为 0 时, 斜率为 -1 , 所求直线方程是 $x + y - 3 = 0$ 。

所以所求的直线的方程为 $x - 2y = 0$ 或 $x + y - 3 = 0$ 。

动态解析

编号: 248008,



扫描二维码,打开课件,如图 1.2.8 所示;拖动点 A 在 x 轴上运动,如图 1.2.9 所示,观察直线 l 的横截距、纵截距变化,探究截距相等的条件。

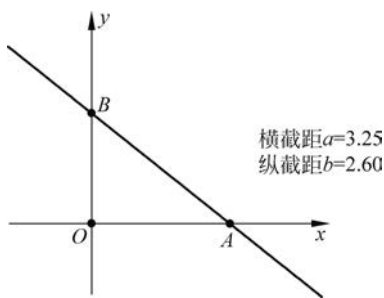


图 1.2.8

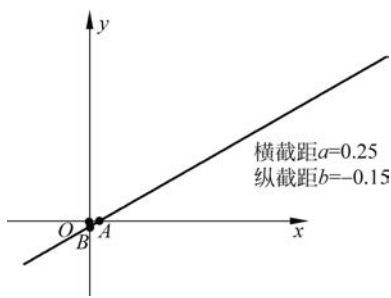


图 1.2.9

评注

横截距是直线和 x 轴交点的横坐标,纵截距是直线与 y 轴交点的纵坐标。注意截距是一个数,可正可负,也可为零,而距离也是一个数,它只能非负。本题最易漏掉截距为 0,即直线过原点的情况。



1.3 距离公式

例 1 求函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ 的最小值。

【解析】

如图 1.3.1 所示, $f(x, y)$ 表示在平面直角坐标系中的动点 $P(x, y)$ 到定点 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$, $D(1, 1)$ 的距离之和。

而 $|PA| + |PD| \geq |AD|$, 当且仅当点 P 在线段 AD 上时等号成立。 $|PB| + |PC| \geq |BC|$, 当且仅当点 P 在线段 BC 上时等号成立。

所以 $|PA| + |PB| + |PC| + |PD| \geq |AD| + |BC| = 2\sqrt{2}$, 当且仅当点 P 为 AD 与 BC 的交点时等号成立。

故 $f(x, y)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$, 此时点 P 的坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。

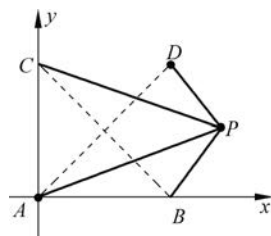


图 1.3.1

动态解析

编号: 255398,



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.3.2 所示, 拖动点 P 运动, 观察 $|PA| + |PD|$, $|PB| + |PC|$ 值的变化, 领会 $|PA| + |PD|$, $|PB| + |PC|$ 及 $|PA| + |PB| + |PC| + |PD|$ 取得最小值的条件, 如图 1.3.3~图 1.3.5 所示。

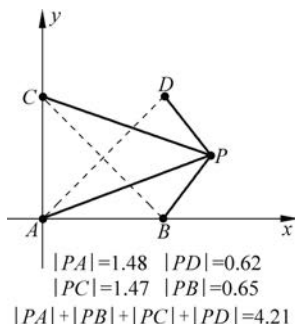


图 1.3.2

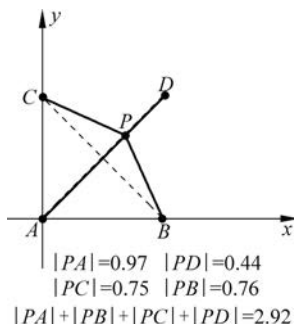


图 1.3.3

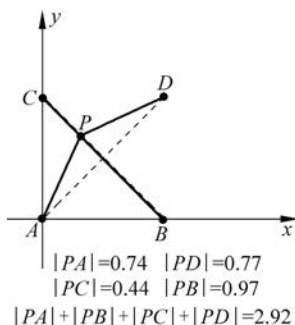


图 1.3.4

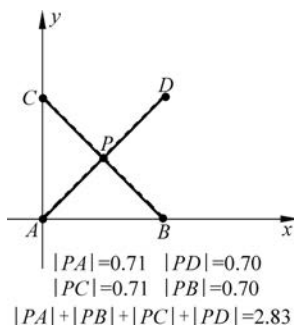


图 1.3.5

评注

此题若用纯代数知识求解, 则比较麻烦, 但联想到利用两点间的距离公式, 就会茅塞顿开。

例 2 若直线 m 被两平行线 $l_1: x-y+1=0$ 与 $l_2: x-y+3=0$ 所截得的线段的长为 $2\sqrt{2}$, 则 m 的倾斜角可以是_____。

【解析】

两平行线间的距离 $d = \frac{|3-1|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$, 易知直线 m 与 l_1 的夹角为 30° , l_2 的倾斜角为

45° , 所以直线 m 的倾斜角等于 $30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$ 或 $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ 。

故 m 的倾斜角可以是 75° 或 15° 。

动态解析

编号: 255367,



扫描二维码,打开课件,如图 1.3.6 所示;拖动点 P 运动,如图 1.3.7~图 1.3.9 所示,探究直线 m 的倾斜角与直线 l_1 的夹角间的关系,领会[解析]中直线 m 的倾斜角等于 $30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$ 或 $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ 。

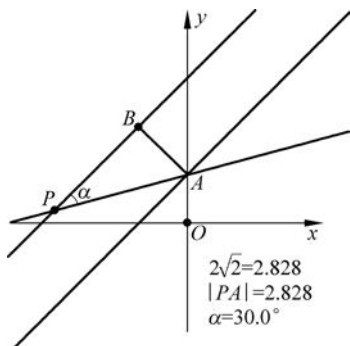


图 1.3.6

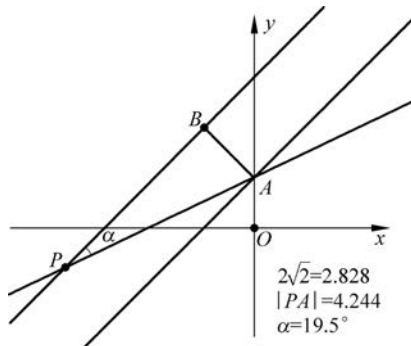


图 1.3.7

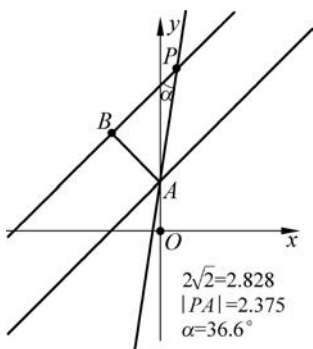


图 1.3.8

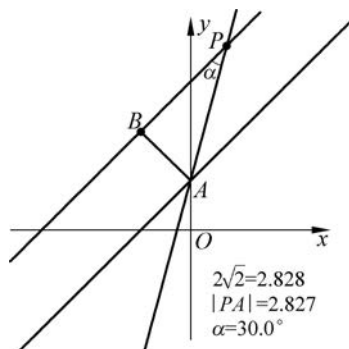


图 1.3.9

> 评注

两平行直线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ 与 $l_2: Ax + By + C_2 = 0 (C_1 \neq C_2)$ 间的距离 $d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, 一般两平行线间距离也可以转化为点到直线的距离。

例 3 在平面直角坐标平面内的点 $P(a, b)$ 到直线 $y = x$ 和 $x + y = 2$ 的距离之和为 $2\sqrt{2}$, 求 $a^2 + b^2$ 的最大值和最小值。

【解析】

分别以直线 $y = x$ 和 $x + y = 2$ 为坐标轴, 那么点 $P(a, b)$ 到直线 $y = x$ 和 $x + y = 2$ 的距离之和为 $2\sqrt{2}$, 即到两个坐标轴距离之和为 $2\sqrt{2}$ 。

容易得到点 P 在一个正方形的边上, 到原点最远是 $3\sqrt{2}$, 最近是 1。

故 $a^2 + b^2$ 的最大值为 18, 最小值为 1。

动态解析

编号: 248605,



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.3.10 所示, 点击按钮 **旋转**, 坐标平面绕原点逆时针旋转 90° , 如图 1.3.11 所示; 点击按钮 **新坐标系**, 建立新坐标系 $x'Oy'$, 如图 1.3.12 所示; 拖动点 P 运动, 考察点 P 到两新坐标轴距离之和; 点击按钮 **显示轨迹**, 拖动点 P 运动, 随着点 P 的运动跟踪其轨迹, 如图 1.3.13 所示。

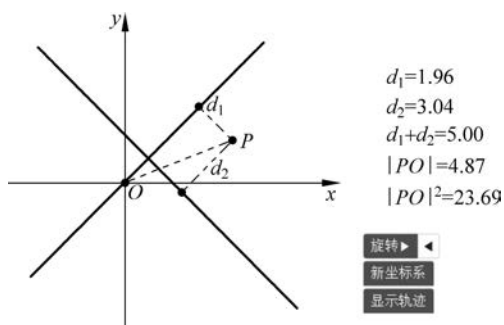


图 1.3.10

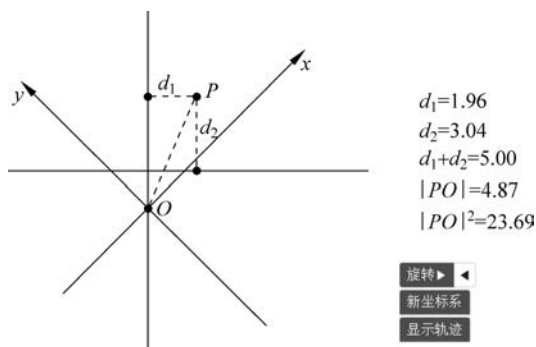


图 1.3.11

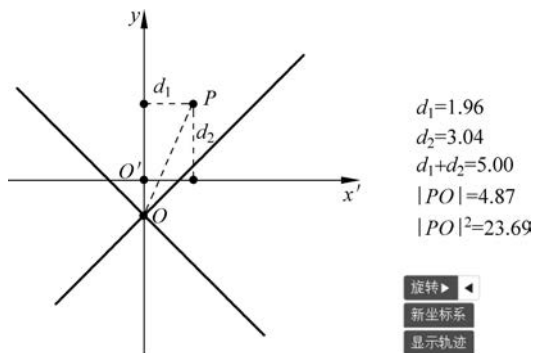


图 1.3.12

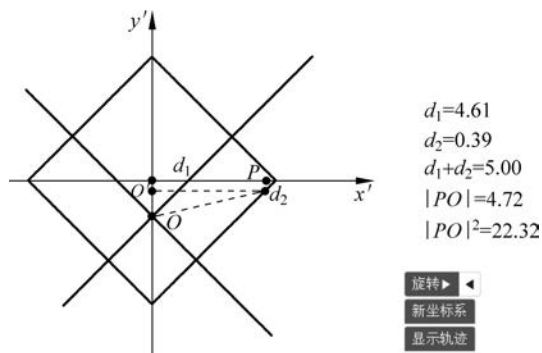


图 1.3.13

评注

利用绝对值的几何意义, 把 $|x| + |y| = 2\sqrt{2}$ 理解为点 (x, y) 到两坐标轴的距离之和为 $2\sqrt{2}$ 。

例 4 曲线 C 上的点到直线 l 的距离的最小值称为曲线 C 到直线 l 的距离, 已知曲线 $C_1: y = x^2 + a$ 到直线 $l: y = x$ 的距离等于曲线 $C_2: x^2 + (y + 4)^2 = 2$ 到直线 $l: y = x$ 的距离, 则实数 $a =$ _____。

【解析】

C_2 的圆心为 $(0, -4)$, 圆心到直线 $l: y=x$ 的距离为 $d = \frac{|0 - (-4)|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, 故曲线 C_2

到直线 $l: y=x$ 的距离为 $d' = d - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ 。

设 $M(x, y)$ 是曲线 C_1 上任一点, 则 $y = x^2 + a$, 点 M 到直线 $l: y=x$ 的距离为 $\frac{|x-y|}{\sqrt{2}} =$

$$\frac{|x - x^2 - a|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - a + \frac{1}{4} \right|}{\sqrt{2}}。$$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 点 M 到直线 $l: y=x$ 的距离最近为 $\frac{\left| -a + \frac{1}{4} \right|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 解得 $a = -\frac{7}{4}$ 或 $a = \frac{9}{4}$ 。

当 $a = -\frac{7}{4}$ 时, 直线与 C_1 相交, 不合题意。

故 $a = \frac{9}{4}$ 。

动态解析

编号: 252332,



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.3.14 所示, 拖动点 A 或变量 a 的滑杆改变 a 的值, 体会曲线 C 与直线 l 距离的意义; 点击按钮 **辅助线**, 显示与直线 l 平行且距离为 $\sqrt{2}$ 的直线, 如图 1.3.15 所示的红色虚直线; 探究红色虚直线与曲线 C 相切的条件, 理解 $a = -\frac{7}{4}$ 时, 不合题意的原因。

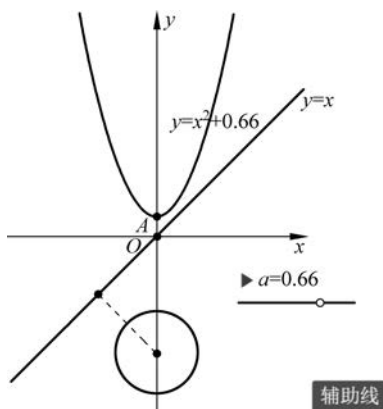


图 1.3.14

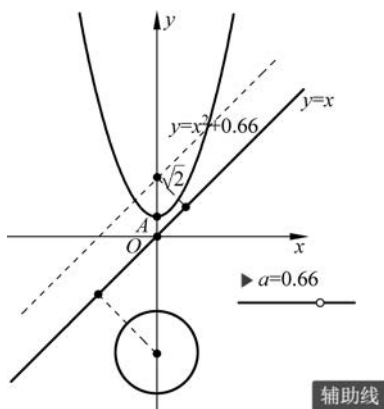


图 1.3.15

评注

点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, 运用点到直线的距离公式时, 直线的方程一定要写成一般式。

1.4 对称问题

例 1 如图 1.4.1 所示, 已知 $A(4, 0), B(0, 4)$, 从点 $P(2, 0)$ 射出的光线经直线 AB 反射后再射到直线 OB 上, 最后经直线 OB 反射后回到 P 点, 则光线所经过的路程为_____。

【解析】

点 P 关于 y 轴的对称点 $P_1(-2, 0)$, 设点 P 关于直线 $AB: x + y - 4 = 0$ 的对称点 $P_2(a, b)$ 。

$$\text{由} \begin{cases} \frac{b-0}{a-2} \cdot (-1) = -1 \\ \frac{a+2}{2} + \frac{b+0}{2} - 4 = 0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}, \text{所以 } |P_1P_2| = 2\sqrt{10}。$$

故光线所经过的路程为 $2\sqrt{10}$ 。

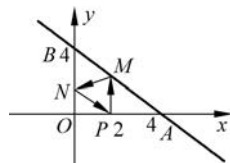


图 1.4.1

动态解析

编号: 250013,



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.4.2 所示, 拖动点 N 在 y 轴上运动, 观察 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 大小变化, 考察 $\alpha = \beta, \gamma = \delta$ 的条件; 点击按钮 **移动点N**, 使点 N 移动到满足条件的位置; 点击按钮 **辅助线**, 显示辅助线, 如图 1.4.3 所示。

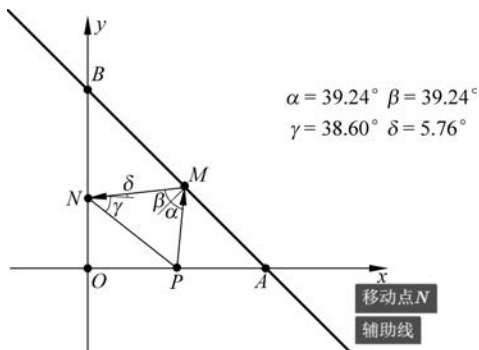


图 1.4.2

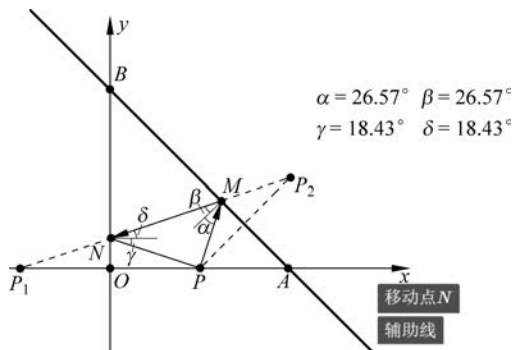


图 1.4.3

评注

与光的反射有关的问题,本质上还是与直线相交的对称问题,求解中利用光的反射性质,转化为对称直线问题。

例 2 已知点 $A(-3,8)$, $B(2,2)$, 点 P 是 x 轴上的点, 求 $|PA| + |PB|$ 的最小值。

【解析】

如图 1.4.4 所示, 在 x 轴上任取一点 P , 作 $B(2,2)$ 关于 x 轴的对称点 $B_1(2,-2)$, 则 $|PB| = |PB_1|$ 。

连接 PB_1 , PA , PB , 连接 AB_1 交 x 轴于 P_1 , 则 $|PA| + |PB| = |PA| + |PB_1| \geq |AB_1|$ 。

当 P 移到与 P_1 重合时, 取到最小值 $|AB_1| = \sqrt{(-3-2)^2 + (8+2)^2} = \sqrt{25+100} = 5\sqrt{5}$ 。

故 $|PA| + |PB|$ 的最小值是 $5\sqrt{5}$ 。

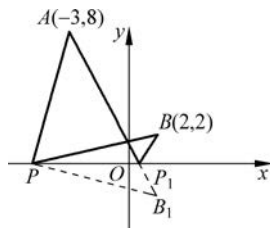


图 1.4.4

动态解析

编号: 250020,



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.4.5 所示, 拖动点 P 在 x 轴上运动, 观察 $|PA|$, $|PB|$ 的变化, 考察 $|PA| + |PB|$ 取最小值时点 P 的位置; 点击按钮 **辅助线**, 显示辅助线, 如图 1.4.6 所示; 点击按钮 **移动点P**, 点 P 移动到 $|PA| + |PB|$ 最小的位置, 如图 1.4.7 所示。

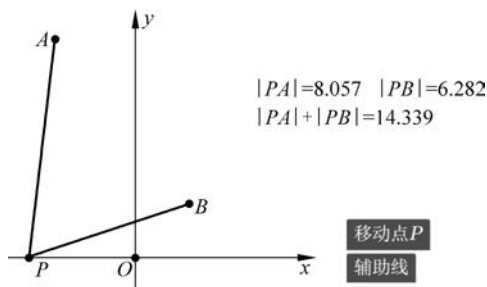


图 1.4.5

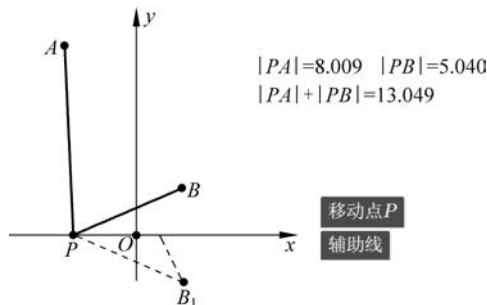


图 1.4.6

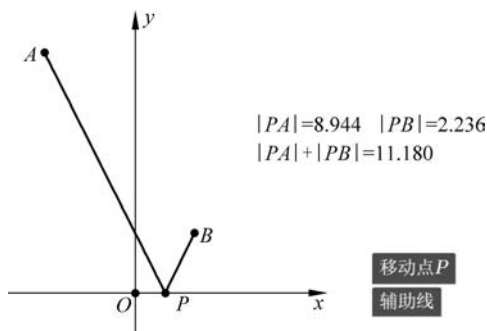


图 1.4.7

评注

利用对称将同侧的点转化为异侧的两点,利用“两点之间,线段最短”求得最值,解决此类问题首先要判定两点在直线“同侧”还是“异侧”,然后利用“异侧和最小,同侧差最大”求解。



1.5 圆的方程

例 1 过点 $P(1,2)$ 总能作出两条直线和圆 $x^2 + y^2 + kx + 2y + k^2 - 15 = 0$ 相切,求实数 k 的取值范围。

【解析】

易知点 $P(1,2)$ 在圆 $x^2 + y^2 + kx + 2y + k^2 - 15 = 0$ 的外部,所以 $1^2 + 2^2 + k \times 1 + 2 \times 2 + k^2 - 15 > 0$,解得 $k < -3$ 或 $k > 2$ 。

由方程 $x^2 + y^2 + kx + 2y + k^2 - 15 = 0$ 表示圆得 $k^2 + 2^2 - 4(k^2 - 15) > 0$,即 $3k^2 < 64$,解得 $-\frac{8\sqrt{3}}{3} < k < \frac{8\sqrt{3}}{3}$ 。

综上,实数 k 的取值范围是 $\left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}, -3\right) \cup \left(2, \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$ 。

动态解析

编号: 251805,



扫描二维码,打开课件,如图 1.5.1 所示;拖动变量 k 的滑杆改变变量 k 的值,如图 1.5.2~图 1.5.4 所示,理解方程 $x^2 + y^2 + kx + 2y + k^2 - 15 = 0$ 表示圆的条件,探究点 P 在圆外时,实数 k 的取值范围。

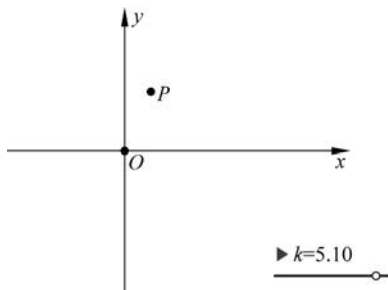


图 1.5.1

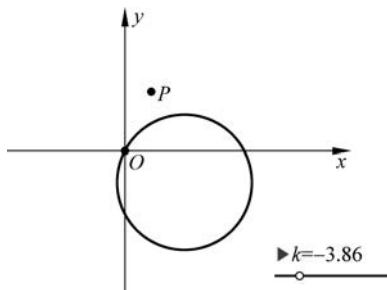


图 1.5.2

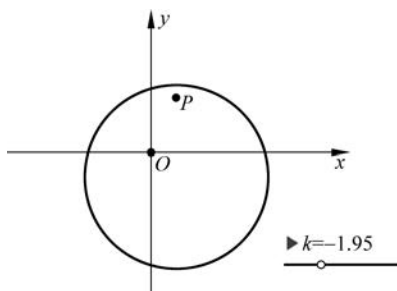


图 1.5.3

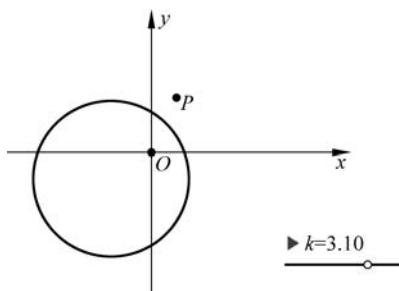


图 1.5.4

评注

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 表示圆的充要条件是 $D^2 + E^2 - 4F > 0$, 圆心为 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$, 半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$; 二元二次方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 表示圆 $\Leftrightarrow A = C \neq 0$, 且 $B = 0, D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

例 2 在平面直角坐标系中, 以点 $(1, 0)$ 为圆心且与直线 $mx - y - 2m - 1 = 0 (m \in \mathbf{R})$ 相切的所有圆中, 求半径最大的圆。

【解析】

方法 1: 设圆的半径为 r , 根据直线与圆相切的关系得 $r = \frac{|m+1|}{\sqrt{1+m^2}} = \sqrt{\frac{m^2+2m+1}{m^2+1}} = \sqrt{1 + \frac{2m}{m^2+1}}$.

当 $m < 0$ 时, $1 + \frac{2m}{m^2+1} < 1$, 故 $1 + \frac{2m}{m^2+1}$ 无最大值; 当 $m = 0$ 时, $r = 1$; 当 $m > 0$ 时, $m^2 + 1 \geq 2m$ (当且仅当 $m = 1$ 时取等号)。

所以 $r \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, 即 $r_{\max} = \sqrt{2}$ 。

故所求圆的方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 2$ 。

方法 2: 设 $A(1, 0)$, 由 $mx - y - 2m - 1 = 0$ 得 $m(x-2) - (y+1) = 0$, 则直线过定点 $P(2, -1)$, 即该方程表示所有过定点 P 的直线系方程。

当直线与 AP 垂直时, 所求圆的半径最大, 此时半径为 $|AP| = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$ 。

故所求圆的方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 2$ 。

动态解析

编号: 255464,



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.5.5 所示, 拖动点 M 或变量 m 的滑杆改变 m 的值, 考察直线的特征, 探究圆的半径即 $|AB|$ 与 $|AP|$ 的大小关系, 如图 1.5.6 所示, 理解方法 2。

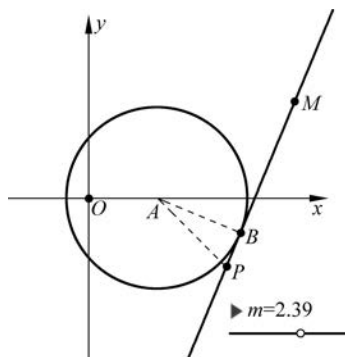


图 1.5.5

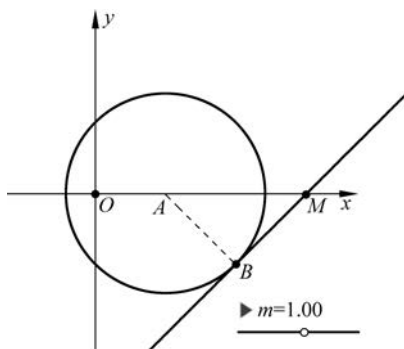


图 1.5.6

例 3 若对于给定的正实数 k , 函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上总存在点 C , 使得以 C 为圆心、1 为半径的圆上有两个不同的点到 O 的距离为 2, 求正实数 k 的取值范围。

【解析】

根据题意得 $|OC| < 1 + 2 = 3$, 设 $C\left(x, \frac{k}{x}\right)$ 。

因为 $|OC| = \sqrt{x^2 + \frac{k^2}{x^2}} \geq \sqrt{2k}$, 所以 $\sqrt{2k} < 3$, 即 $0 < k < \frac{9}{2}$ 。

故正数 k 的取值范围为 $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ 。



编号: 251796,



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.5.7 所示, 拖动变量 k 的滑杆改变变量 k 的值, 再拖动点 C 在 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上运动, 如图 1.5.8、图 1.5.9 所示, 探究两圆有两个公共点的条件。

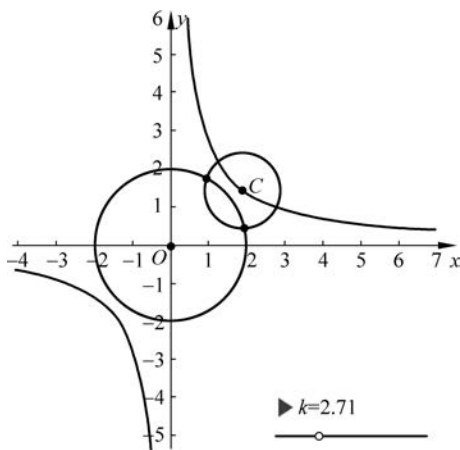


图 1.5.7

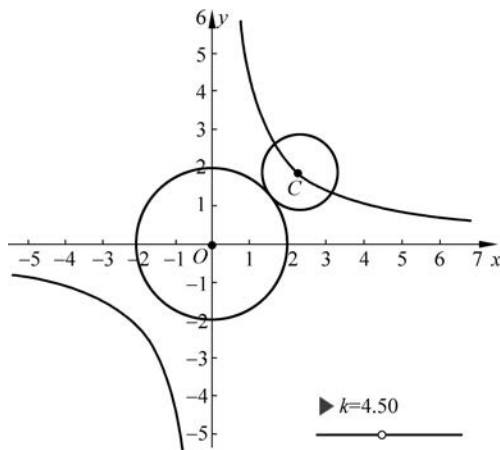


图 1.5.8

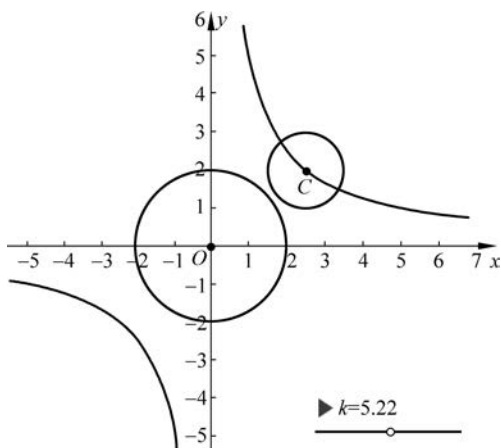


图 1.5.9

评注

圆是到定点距离等于定长的点的集合,即若 $|PO|=r(r>0)$ 或 $x^2+y^2=r^2$,则动点 P 的轨迹是圆。

例 4 在平面直角坐标系中, A,B 分别是 x 轴和 y 轴上的动点,若以 AB 为直径的圆 C 与直线 $2x+y-4=0$ 相切,则圆 C 面积的最小值为()。

A. $\frac{4}{5}\pi$

B. $\frac{3}{4}\pi$

C. $(6-2\sqrt{5})\pi$

D. $\frac{5}{4}\pi$

【解析】

由题意可知以线段 AB 为直径的圆 C 过原点 O ,要使圆 C 的面积最小,只需圆 C 的半径或直径最小。

又圆 C 与直线 $2x+y-4=0$ 相切,由平面几何知识可知圆的直径的最小值为点 O 到直线 $2x+y-4=0$ 的距离,此时 $2r=\frac{4}{\sqrt{5}}$,得 $r=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 。

圆 C 的面积的最小值 $S=\pi r^2=\frac{4}{5}\pi$,故选 A。

动态解析

编号: 255447,



扫描二维码,打开课件,如图 1.5.10 所示;拖动点 C 运动,考察圆半径的变化,如图 1.5.11、图 1.5.12 所示;拖动点 C 到线段 OD 上,如图 1.5.13 所示,探究圆的半径与点 C 在其他位置时半径大小关系。

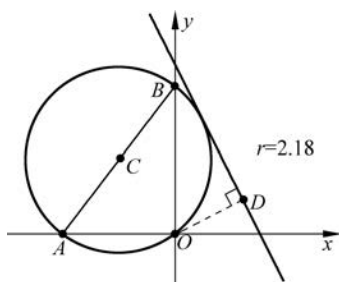


图 1.5.10

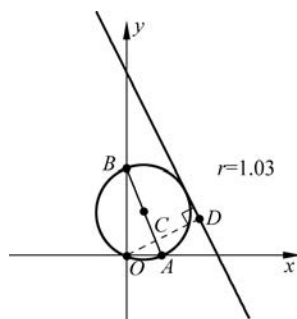


图 1.5.11

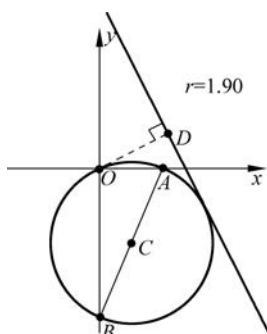


图 1.5.12

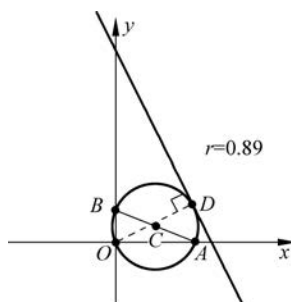


图 1.5.13



1.6 直线与圆

例 1 由直线 $y=x-1$ 上的一点向圆 $C: x^2+y^2-6x+8=0$ 引切线, 则切线长的最小值为().

A. 1

B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$

D. 2

【解析】

在直线 $y=x-1$ 上取一点 P , 过 P 向圆引切线, 设切点为 A , 连接 CA .

在 $\text{Rt}\triangle PAC$ 中, $|CA|=r=1$, 要使 $|PA|$ 最小, 则 $|PC|$ 应最小.

又当 PC 与直线垂直时, $|PC|$ 最小, 其最小值为 $\frac{|3-0-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

则 $|PA|$ 的最小值为 $\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=1$, 故选 A.

动态解析

编号: 263564,



扫描二维码,打开课件,如图 1.6.1 所示,粉红色及紫色实线为过点 P 的圆 C 的切线,拖动点 P 在直线 l 上运动,考察 PA 长度的变化,如图 1.6.2、图 1.6.3 所示;点击按钮 **辅助线**,显示辅助线,如图 1.6.4 所示,拖动点 P 在直线 l 上运动,探究 PA 长度取最小值时点 P 的位置。

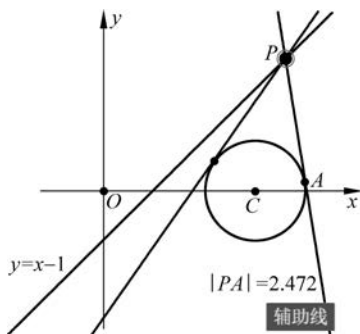


图 1.6.1

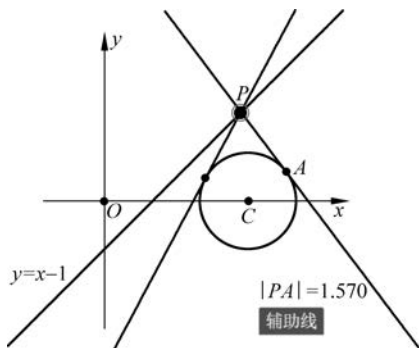


图 1.6.2

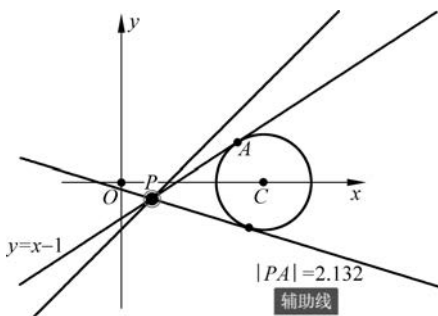


图 1.6.3

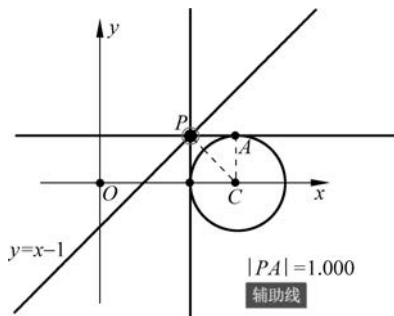


图 1.6.4

例 2 已知直线 $l: mx + y + 3m - \sqrt{3} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 12$ 交于 A, B 两点,过 A, B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C, D 两点。若 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 则 $|CD| =$ _____。

【解析】

由题意可知直线 l 过定点 $(-3, \sqrt{3})$, 该定点在圆 $x^2 + y^2 = 12$ 上, 不妨设点 $A(-3, \sqrt{3})$ 。

由于 $|AB| = 2\sqrt{3}$, $r = 2\sqrt{3}$, 所以圆心到直线 AB 的距离 $d = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$ 。

又由点到直线的距离公式可得 $d = \frac{|3m - \sqrt{3}|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$, 解得 $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以直线 l 的斜率

$k = -m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即直线 l 的倾斜角为 30° 。

如图 1.6.5 所示, 过点 C 作 $CH \perp BD$, 垂足为 H , 则 $|CH| = 2\sqrt{3}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle CHD$ 中, $\angle HCD = 30^\circ$, 故 $|CD| = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 4$ 。

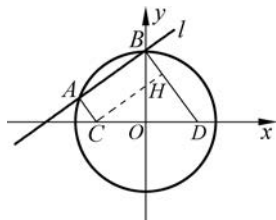


图 1.6.5

动态解析

编号: 251826,



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.6.6 所示, 拖动变量 m 的滑杆改变变量 m 的值, 如图 1.6.7 所示, 考察线段 AB, CD, CH 长度间关系。

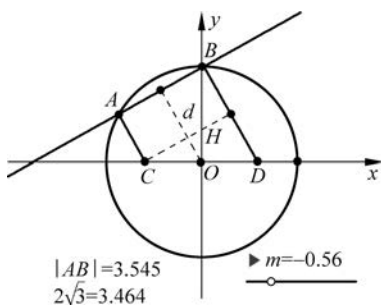


图 1.6.6

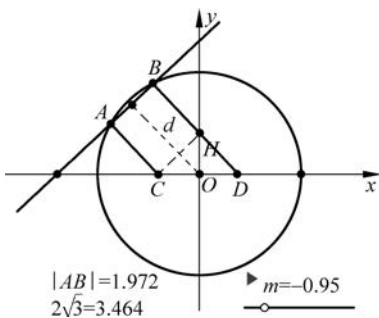


图 1.6.7

例 3 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$ 和点 $P(x_0, 0)$, 若圆 C 上存在两点 A, B 使得 $\angle APB = \frac{\pi}{3}$, 则实数 x_0 的取值范围是()。

A. $[-3, 1]$ B. $[-1, 3]$ C. $[-2, 3]$ D. $[-2, 4]$

【解析】

由题意得, 该圆的圆心 $C(1, 2)$, 半径 $r = \sqrt{2}$, 如图 1.6.8 所示, 当 PA 和 PB 与圆 C 相切时, $\angle APB$ 最大。

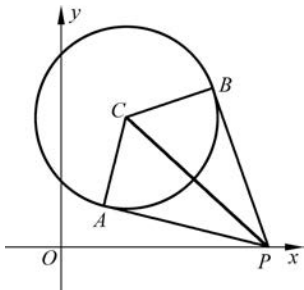


图 1.6.8

要使圆 C 上存在两点 A, B , 使得 $\angle APB = \frac{\pi}{3}$, 则 $\frac{\pi}{6} \leq \angle APC < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} < |PC| \leq$

$\frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{6}}$, 即 $\sqrt{2} < \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (0 - 2)^2} \leq 2\sqrt{2}$ 。

解得 $-1 \leq x_0 \leq 3$, 故选 B。

动态解析

编号: 257808,



扫描二维码,打开课件,如图 1.6.9 所示,拖动点 A 、点 B 在圆 C 上运动,考察 $\angle APB$ 大小变化,探究 $\angle APB$ 取最大值时,直线 PA, PB 与圆 C 的位置关系; 点击按钮 , 显示过点 P 的圆 C 的切线 PA', PB' , 如图 1.6.10 所示, 体会 $\angle APB$ 与 $\angle A'PB'$ 的大小关系; 再次点击按钮 , 显示过圆心与切点、圆心与点 P 的连线, 如图 1.6.11 所示。

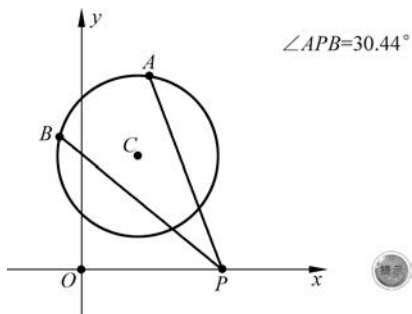


图 1.6.9

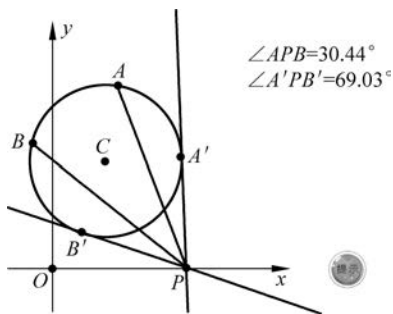


图 1.6.10

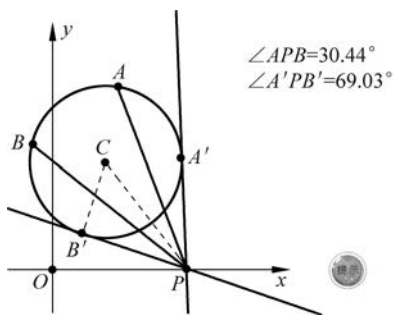


图 1.6.11

例 4 若圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 上至少有三个不同点到直线 $l: ax + y = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$, 则 a 的取值范围是()。

A. $[2 - \sqrt{3}, 1]$

B. $[-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}]$

C. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$

D. $[0, +\infty)$

【解析】

圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 可化为 $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 18$, 则圆心坐标为 $(2, 2)$, 半径为 $3\sqrt{2}$ 。

圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 上至少有三个不同点到直线 $l: ax + y = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$, 可得圆心到直线 $l: ax + y = 0$ 的距离 $d \leq 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, 即 $\frac{|2a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} \leq \sqrt{2}$, 则 $a^2 +$

$4a+1 \leq 0$, 解得 $a \in [-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}]$.

故选 B.

动态解析

编号: 251870,



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.6.12 所示, 红色实线是直线 $l: ax+y=0$, 两条虚线到直线 l 的距离为 $2\sqrt{2}$, 拖动点 M 或变量 a 的滑杆改变 a 的值, 考察两虚线与圆的位置关系, 探究两虚线与圆有 3 个公共点(如图 1.6.13、图 1.6.14 所示), 4 个公共点(如图 1.6.15 所示)时实数 a 的取值.

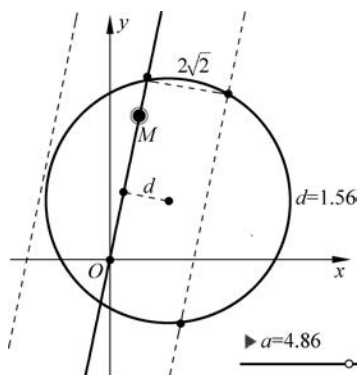


图 1.6.12

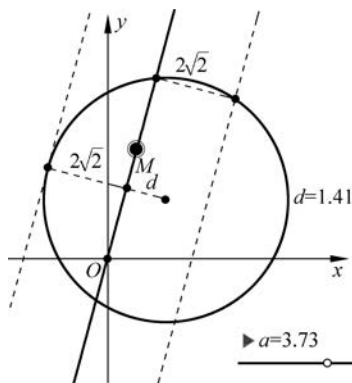


图 1.6.13

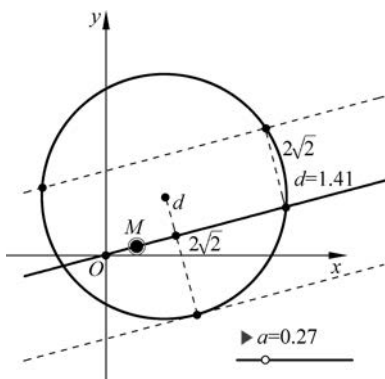


图 1.6.14

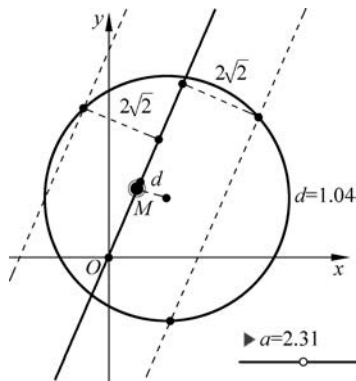


图 1.6.15

例 5 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $A(0, a)$, $B(3, a+4)$, 若圆 $x^2+y^2=9$ 上有且仅有四个不同的点 M , 使得 $\triangle ABM$ 的面积为 5, 则实数 a 的取值范围是_____.

【解析】

$$AB \text{ 的斜率 } k = \frac{a+4-a}{3-0} = \frac{4}{3}, |AB| = \sqrt{(3-0)^2 + (a+4-a)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

设 $\triangle ABM$ 的高为 h ,因为 $\triangle ABM$ 的面积为5,所以 $S = \frac{1}{2}|AB|h = \frac{1}{2} \times 5h = 5$,即 $h=2$ 。

直线 AB 的方程为 $y-a = \frac{4}{3}x$,即 $4x-3y+3a=0$ 。

若圆 $x^2+y^2=9$ 上有且仅有四个不同的点 M ,则圆心 O 到直线 $4x-3y+3a=0$ 的距离 $d = \frac{|3a|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|3a|}{5}$,应该满足 $d < R-h = 3-2=1$,即 $\frac{|3a|}{5} < 1$ 。

由 $|3a| < 5$ 得 $-\frac{5}{3} < a < \frac{5}{3}$,故实数 a 的取值范围为 $(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ 。

动态解析

编号: 251854,



扫描二维码,打开课件,如图1.6.16所示,图中 d 为原点到直线 AB 的距离;虚线为距直线 AB 距离为2的直线,两虚线均与圆相交时,交点 M_1, M_2, M_3, M_4 到直线 AB 距离为2,则 $\triangle M_i AB (i=1, 2, 3, 4)$ 的面积为5;拖动点 A 在 y 轴上运动或拖动变量 a 的滑杆改变 a 的值,如图1.6.17~图1.6.19所示,探究两条虚线都与圆相交的条件,领会为什么原点到直线 AB 的距离 $d < 1$ 。

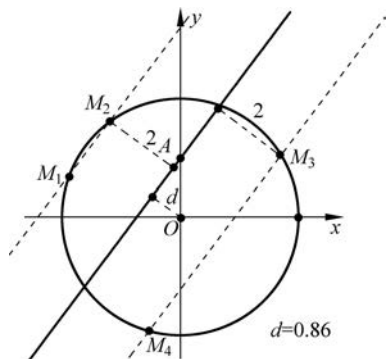


图 1.6.16

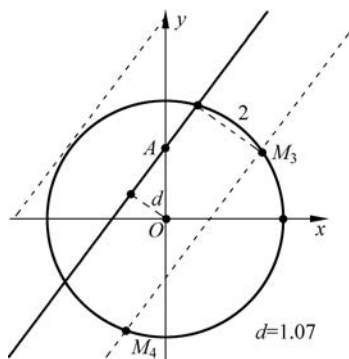


图 1.6.17

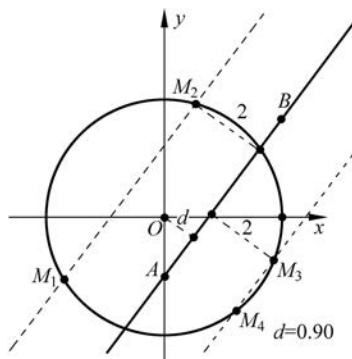


图 1.6.18

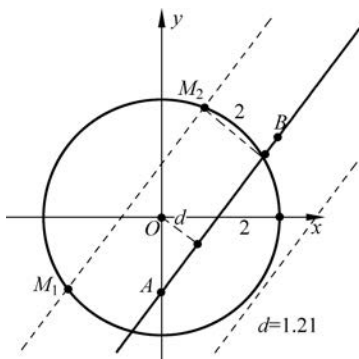


图 1.6.19