



数学新教育丛书

互联网+

网络画板动态解析高中数学：

函数、三角与向量

杨志友 杨曾麟 主编

清华大学出版社
北 京

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。
版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

互联网+网络画板动态解析高中数学. 函数、三角与向量/杨志友,杨曾麟主编. —北京:清华大学出版社,2022.7

(数学新教育丛书)

ISBN 978-7-302-61008-3

I. ①互… II. ①杨… ②杨… III. ①中学数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 097522 号

责任编辑:汪 操

封面设计:常雪影

责任校对:王淑云

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-83470000 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市东方印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:14.75

字 数:357 千字

版 次:2022 年 7 月第 1 版

印 次:2022 年 7 月第 1 次印刷

定 价:49.00 元

产品编号:093700-01

编 委 会

主 编：杨志友 杨曾麟

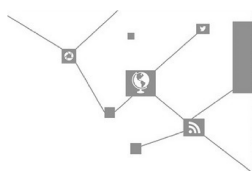
副主编：方正娥 张世凡

编 委：龙绍华 陈 飞 李连代 谭真银

李 勇 李海林 李 飞 陈良荣

杨 柳 熊 云 邓李平 冉 红

龚圣龙 雷 婧 姜典术



前言

PREFACE

数学难教、难学,是一个不争的事实。缘于固有的高度抽象概括特性,数学往往难以被感官直接感知,更难被理解和内化;囿于表征手段的制约,学数学的人往往不知数学如何去意会,教数学的人往往不知数学如何去言传。

《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出:“在‘互联网+’时代,信息技术的广泛应用正在对数学教育产生深刻影响。在数学教学中,信息技术是学生学习和教师教学的重要辅助手段,为师生交流、生生交流、人机交流搭建了平台,为学习和教学提供了丰富的资源,因此,教师应重视信息技术的运用,优化课堂教学,转变教学与学习方式。”在“互联网+”、大数据的支持下,数学教学需要更加关注学生个性化、多样化的学习和需求,促进人才培养模式的转变,着力发展学生的核心素养,这就要求高中数学教学由知识教学向核心素养教学进行转化,实现课堂教学的精准化、高效化、个性化,提高学生数学学习的实际获得感。教师应注重信息技术与数学课程的深度融合,实现传统教学手段难以达到的效果。

网络画板就是进行信息技术与数学课程深度融合的一个绝佳平台。它是在中国科学院张景中院士亲自参与下,在张景中院士团队多年积累的成果——超级画板的基础上,为适应互联网环境下教育信息化发展新趋势,运用国内领先的动态几何技术、智能推理技术、符号运算和网络交互技术开发的国内第一款能深入学科内部的、充分体现数学特点的动态学科软件。它完全适应现有互联网环境,能够在 Windows、IOS、安卓、鸿蒙等各种操作系统环境下流畅运行。使用网络画板不需要安装客户端,只需通过简单的注册即可使用。

网络画板能在“形”与“数”之间自由转换,建立“可见形式”与“抽象形式”之间的直接联系。它提供了以学生为主导的师生互动智慧课堂,为学生“做”数学提供了必要的工具与手段,使学生可以自主地在问题空间里进行数学实验、探索和创新,体验数学知识的生成和发现过程,从而将高中数学课堂发展为生成的课堂、研究的课堂和创新的课堂。使用网络画板,可以更好地利用互联网改变教育资源生成、传播、分享模式,助力中小学教学资源高效开发,有力推动基础学科教育信息化的发展。

本书主要动态解析高中数学的函数、三角、向量部分。众所周知,高中这部分内容学习难度大、教学也困难,因为知识体系庞大而复杂、表征形式系统而多样、知识内容丰富而抽象,有表达凸函数的对数函数、表达凹函数的指数函数、表达对称的二次函数,还有表达周期的三角函数,以及表达离散函数的数列等。学生需要在文字语言、符号语言、图形语言这三种语言之间灵活转换,需要从具体形象思维过渡到抽象逻辑思维,参变量的引入还需要学生大脑里的图像由独立静态演变为互联动态。传统的教与学的方式只可意会不便言传,抽象,难度大,枯燥无味,无法满足新课程的数学学科的核心素养要求。本书与教材内容的顺序相



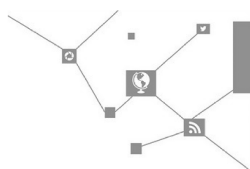
同,以教与学的难点为主要内容,以网络画板为工具,结合编者们近 30 年的一线教学经历,从几万道的题库中精选出最具代表性的典型例题和巩固习题,匠心打造每一个动画作品,使读者既能很直观地感受函数的单调性、对称性、周期性、凹凸性以及向量的工具性,又能充分体会参变量的改变对图形性质产生的影响;既能由“数”到“形”进行探索实验,又能由“形”到“数”进行推理验证;既能人机对话、独立思考,也能相互分享、合作共研。每一道例题除配有常规解析外,还配有动态解析和简要评注,读者只需用手机扫描二维码或者在网络画板官方网站输入编号,即可查看动态解析过程。

我们打造的不再是单纯的习题集,而是一本帮助广大学生数学思维不断生成、思维体系持续建构的辅导书。做本书的每一道题目,学生学到的不只限于这道题本身,而是感悟数学解题思想,通过这个题目去深度感受和体会数学的内涵,学会用“技术”去解题,去找寻规律和解题突破口,去深刻体验数学思想和方法的无穷魅力。

尽管本书的作者在网络画板的运用上有丰富的经验,但将网络画板与数学课堂教学的整合还在不断地摸索和尝试中,而且由于时间仓促,水平有限,书中难免有不当之处。敬请各位读者批评指正。

编 者

2022 年 5 月



目 录

CONTENTS

第 1 章 集合与函数的概念	1
1.1 集合间的关系	1
1.2 区间长度	6
1.3 集合中的区域问题	10
1.4 函数的概念	12
第 2 章 函数的基本性质	17
2.1 函数的值域	17
2.2 已知函数定义域或函数值域求参数	26
2.3 函数的单调性	30
2.4 函数的奇偶性与对称性	35
2.5 函数的周期性	44
2.6 分段函数	46
2.7 函数应用	57
第 3 章 函数的零点及方程的解	61
3.1 一元二次方程实根分布	61
3.2 周期函数的零点	65
3.3 分段函数的零点	68
3.4 探索方程的根的个数	75
3.5 两个函数图像的交点	82
第 4 章 不等式	89
4.1 比较大小	89
4.2 解不等式	94
4.3 不等式有解,求参数范围	101
4.4 不等式恒成立	107
4.5 证明不等式	115



第 5 章 三角函数与解三角形	121
5.1 弧度制	121
5.2 三角函数定义与圆周运动	125
5.3 三角函数线	128
5.4 五点法作图	132
5.5 三角函数图像变换	136
5.6 三角函数的单调性	141
5.7 三角函数的应用	146
5.8 解三角形	155
第 6 章 平面向量	167
6.1 平面向量线性运算	167
6.2 平面向量基本定理	175
6.3 平面向量的数量积	182
6.4 平面向量数量积几何意义的应用	189
6.5 等和线原理	196
6.6 极化恒等式及应用	212
6.7 平面向量与三角形	221

第 1 章

集合与函数的概念

1.1 集合间的关系

例 1 设全集 $U = \{x | 0 < x < 10, x \in \mathbf{N}^*\}$, 若 $A \cap B = \{1\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{3, 5, 7\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{8\}$, 求集合 A, B 。

【解析】

由集合 U 中不等式 $0 < x < 10 (x \in \mathbf{N}^*)$ 解得 $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, 则 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 。

因为 $A \cap B = \{1\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{3, 5, 7\}$, 所以 $1, 3, 5, 7 \in A$, $1 \in B$, $3, 5, 7 \notin B$ 。又 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{8\}$, 所以 $8 \notin A$, $8 \notin B$, 则 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 9\}$ 。

⑤ 简要评注

本题条件较多, 像上述解答直接分析条件显得较为麻烦, 若借助 Venn 图可以把每一部分的关系清楚地表示出来的话, 问题就迎刃而解了。

动感体验

编号: 179297



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.1.1~图 1.1.6 所示, 点击相应按钮, 领会 $A \cap B$, $A \cap (\complement_U B)$, $B \cap (\complement_U A)$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ 的含义, 点击按钮“解答”, 将已知集合中元素填入相应区域, 即可求得 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 9\}$ 。

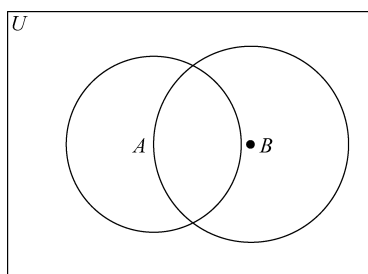


图 1.1.1

初始化
 $A \cap B$
 $A \cap (\complement_U B)$
 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$
 $B \cap (\complement_U A)$
 解答

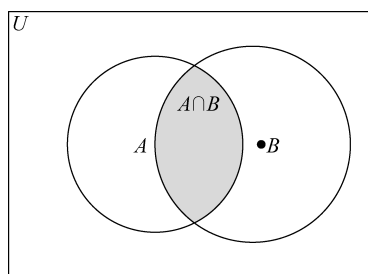


图 1.1.2

初始化
 $A \cap B$
 $A \cap (\complement_U B)$
 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$
 $B \cap (\complement_U A)$
 解答

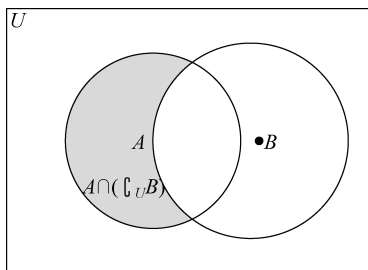


图 1.1.3

初始化
 $A \cap B$
 $A \cap (\complement_U B)$
 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$
 $B \cap (\complement_U A)$
 解答

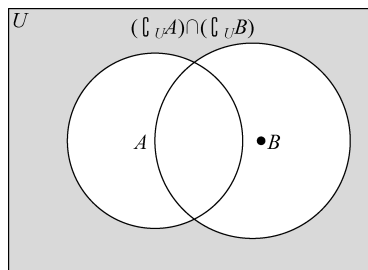


图 1.1.4

初始化
 $A \cap B$
 $A \cap (\complement_U B)$
 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$
 $B \cap (\complement_U A)$
 解答

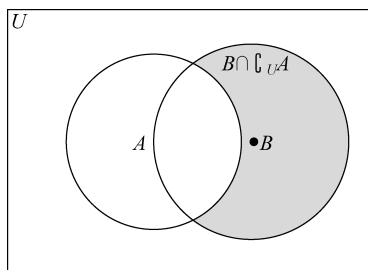


图 1.1.5

初始化
 $A \cap B$
 $A \cap (\complement_U B)$
 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$
 $B \cap (\complement_U A)$
 解答

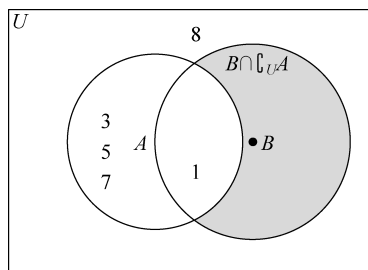


图 1.1.6

初始化
 $A \cap B$
 $A \cap (\complement_U B)$
 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$
 $B \cap (\complement_U A)$
 解答

例 2 定义集合 A 和 B 的运算 $A * B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 下列命题: ① $A * (A \cap B) = (A \cup B) * B$; ② $(A * B) \cap (B * A) = [A * (A \cap B)] \cup [B * (A \cup B)]$; ③ $B * (A \cap B) = (A \cup B) * A$; ④ $(A \cup B) * (A \cap B) = (A * B) \cup (B * A)$, 其中正确命题的个数是()。

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 0 个

【解析】

$A * B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 则 $A * B$ 即为属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合。

若 $x \in A * (A \cap B)$, 则 $x \in A$ 且 $x \notin A \cap B$, 即 $x \in A$ 且 $x \notin B$ 。

若 $x \in (A \cup B) * B$, 则 $x \in A \cup B$ 且 $x \notin B$, 即 $x \in A$ 且 $x \notin B$ 。

所以 $A * (A \cap B) = (A \cup B) * B$, 即①正确。

若 $x \in (A * B) \cap (B * A)$, 则 $x \in A * B$ 且 $x \in B * A$, 由 $A * B$ 定义可得 $x \in \emptyset$, 即 $(A * B) \cap (B * A) = \emptyset$ 。

若 $x \in [A * (A \cap B)] \cup [B * (A \cup B)]$, 则 $x \in A * (A \cap B)$ 或 $x \in B * (A \cup B)$, 故 $x \in A$ 且 $x \notin B$, 即 $[A * (A \cap B)] \cup [B * (A \cup B)] = A \cap (\complement_U B)$, 所以②错误。

同理可判断③④正确, 故选 C。

简要评注

本题实质上为多选题, 根据题目中的条件直接判断, 不易得出正确答案, 若借助 Venn 图求解, 则方便快捷得多。

动感体验

编号: 179287



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.1.7 所示, 点击按钮“ $A * B$ ”理解 $A * B$ 的意义, 如图 1.1.8 所示, 分别点击右侧按钮, 对照题中各命题左右两边, 考察各命题的真假, 即可确定①③④正确。

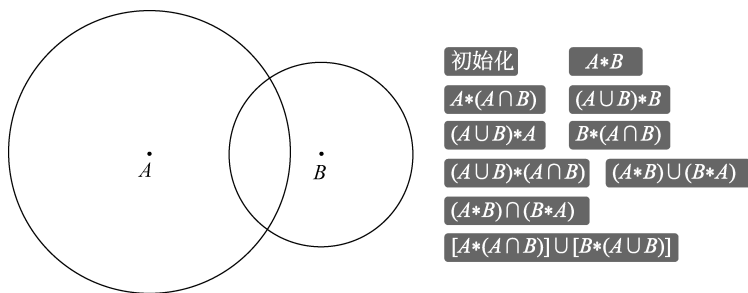


图 1.1.7

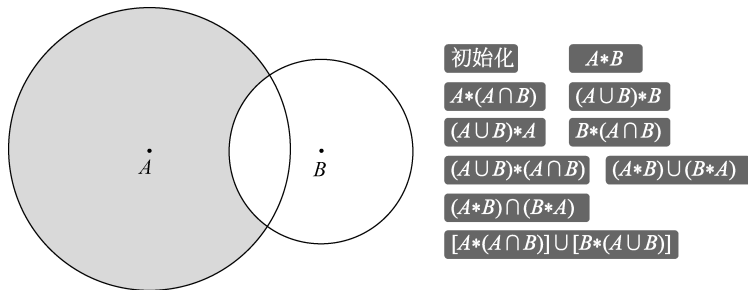


图 1.1.8

例 3 已知集合 $A = \{x \mid a+1 \leq x \leq 4a+1\}$, $B = \{x \mid y = \sqrt{(x+3)(5x)}\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是()。

A. $0 < a < 1$

B. $0 \leq a \leq 1$

C. $a < 1$

D. $a \leq 1$

【解析】

由 $(x+3)(5-x) \geq 0$ 得 $B = \{x \mid -3 \leq x \leq 5\}$, 当 $A = \emptyset$ 时, $A \subseteq B$ 成立, 即有当 $a+1 > 4a+1$ 时成立, 所以 $a < 0$ 满足题意。

当 $A \neq \emptyset$ 时, 要使 $A \subseteq B$ 成立, 需 $\begin{cases} a+1 \leq 4a+1 \\ a+1 \geq -3 \\ 4a+1 \leq 5 \end{cases}$, 解得 $0 \leq a \leq 1$ 。

综上所述 $a \leq 1$, 故选 D。

简要评注

1. 本题有两点易错之处, 一是对 $A \subseteq B$ 的认识不足而忽视 $A = \emptyset$ 的情形, 应注意: 空集是任何集合的子集; 空集是任何非空集合的真子集。二是对含有参数的集合在参数没有限定范围时, 要注意有 $A = \emptyset$ 和 $A \neq \emptyset$ 两种情形。

2. $A \neq \emptyset$ 时, 借助数轴便能更快地得到不等式组 $\begin{cases} a+1 \leq 4a+1 \\ a+1 \geq -3 \\ 4a+1 \leq 5 \end{cases}$ 。

动感体验

编号: 174876



扫描二维码, 打开课件, 红色、黑色区域分别表示集合 A 、 B , 拖动变量 a 的滑杆或 x 轴上的红点可以改变实数 a 的值, 从而改变集合 A 所在区域, 探求 $A \subseteq B$ 的条件, 图 1.1.9~图 1.1.11 所示为其中的几种情形。

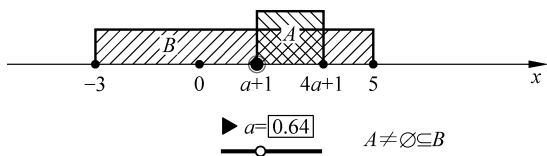


图 1.1.9

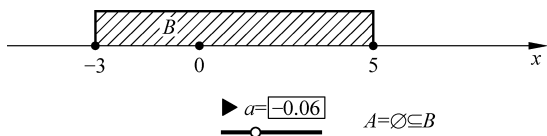


图 1.1.10

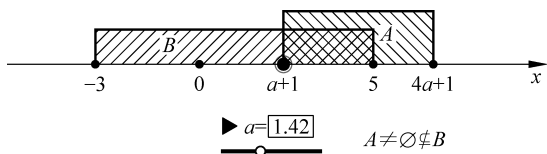


图 1.1.11

例 4 设 $A = \{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | x + y + m \geq 0\}$, 则使 $A \cap B = A$ 成立的实数 m 的取值范围是_____。

【解析】

因为 $A = \{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | x + y + m \geq 0\}$ 且 $A \cap B = A$, 所以当 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 时 $x + y + m \geq 0$ 恒成立, 即 $m \geq -x - y$ 恒成立。

令 $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta + 1$, 则 $x + y = \cos\theta + \sin\theta + 1 = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \geq \sqrt{2} + 1$, 即 $m \geq -(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} - 1$, 故 m 的取值范围是 $[\sqrt{2} - 1, +\infty)$ 。

> 简要评注

$A = \{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | x + y + m \geq 0\}$, 集合 A 是圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 上的点的集合, 集合 B 是不等式 $x + y + m \geq 0$ 表示的平面区域内的点的集合, 若将集合间的包含关系问题转化为直线与圆的位置关系即可快速求解。

动感体验

编号: 175073



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.1.12、图 1.1.13 所示, 红色实线表示集合 A 中元素所对应的点, 粉色区域代表集合 B 中元素所对应的点, 拖动变量 m 的滑杆可以改变实数 m 的值, 探究圆包含在粉色区域内时直线与圆的位置关系。

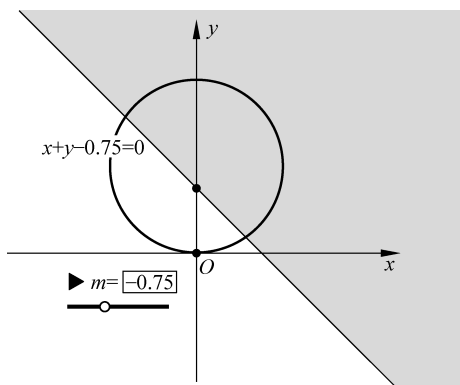


图 1.1.12

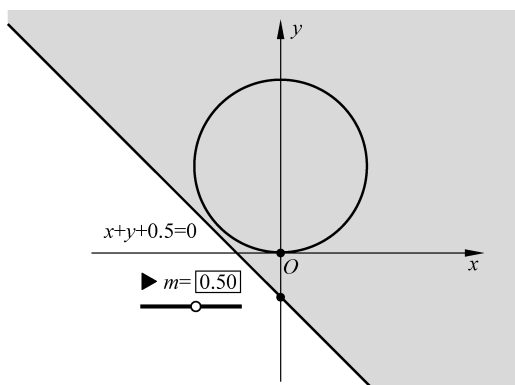


图 1.1.13

集合 A 是圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 上的点的集合, 集合 B 是不等式 $x + y + m \geq 0$ 表示的平面区域内的点的集合, 要使 $A \cap B = A$, 即要 $A \subseteq B$, 则应使圆被平面区域所包含(如图 1.1.13 所示), 即直线 $x + y + m = 0$ 应与圆相切或相离(在圆的左下方)。

当直线与圆相切时, 有 $\frac{|m+1|}{\sqrt{2}} = 1$, 又 $-m < 0$, 即 $m > 0$, 故 $m = \sqrt{2} - 1$, 而当直线与圆

相离时, 有 $\frac{|m+1|}{\sqrt{2}} > 1$, 即 $m > \sqrt{2} - 1$ 。

故 m 的取值范围是 $[\sqrt{2} - 1, +\infty)$ 。

练习 1 已知集合 $A = (-1, 1]$, $B = (a, a + 3)$, $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围



是_____。

编号：174877



答案：(-4,1)

练习2 设集合 $U=\{a,b,c,d,e\}$, 若 $A \cap B = \{b\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{d\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{a,e\}$, 则元素 c 在哪里?

编号：179350



答案： $c \in (\complement_U B) \cap A$

练习3 已知集合 $A = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 和集合 $B = \{ (x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \leq r^2 (r > 0) \}$, 若 $A \cup B = A$, 则 r 的取值范围是_____。

编号：175074



答案： $0 < r \leq 1$



1.2 区间长度

例1 定义：区间 $[x_1, x_2] (x_1 < x_2)$ 的长度为 $x_2 - x_1$, 已知函数 $y = \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right|$ 的定义域为 $[a, b]$, 值域为 $[0, 2]$, 则区间 $[a, b]$ 的长度的最大值与最小值的差为_____。

【解析】

由 $y=0$ 得 $1 \in [a, b]$, $y = \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right| = 2$ 得 $x = \frac{1}{4}$ 或 $x = 4$ 。

当 $a = \frac{1}{4}$ 时, $1 \leq b \leq 4$; 当 $b = 4$ 时, $\frac{1}{4} \leq a \leq 1$ 。

当 $[a, b] = \left[\frac{1}{4}, 1 \right]$ 时, 区间长度最小为 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; 当 $[a, b] = \left[\frac{1}{4}, 4 \right]$ 时, 区间长度最大为 $4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ 。

故区间 $[a, b]$ 的长度的最大值与最小值的差为 $\frac{15}{4} - \frac{3}{4} = 3$ 。

➤ 简要评注

本题的实质是研究定义域与值域的关系：在值域一定的情况下，研究定义域的自由度。上述解答中，当 $a = \frac{1}{4}$ 时, $1 \leq b \leq 4$; 当 $b = 4$ 时, $\frac{1}{4} \leq a \leq 1$, 不易理解。若借助网络画板动态演示 $y = \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right|$ 在 $[a, b]$ 上的图像，更利于理解定义域与值域的关系。

动感体验

编号: 174879



扫描二维码,打开课件,如图 1.2.1、图 1.2.2 所示,红色、蓝色实线分别为函数 $y = \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right|$ 在 $x \in [a, b], x \in (0, +\infty)$ 的图像,黑色虚线为直线 $y=2$,拖动变量 a, b 的滑杆或拖动 x 轴上的点 a, b 可以改变实数 a, b 的值,从而改变函数 $y = \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right|$ 在 $[a, b]$ 上的图像,探究红色实线上点的纵坐标在区间 $[0, 2]$ 上的条件。

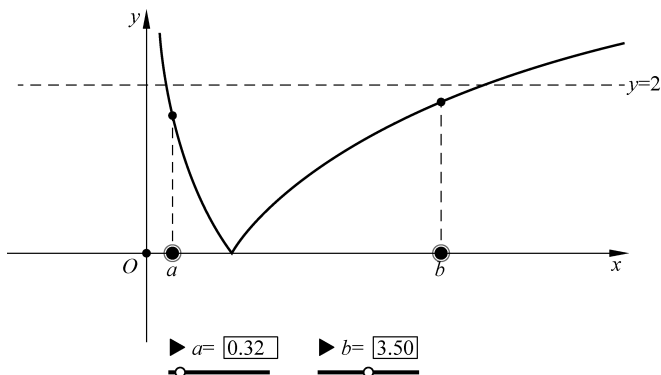


图 1.2.1

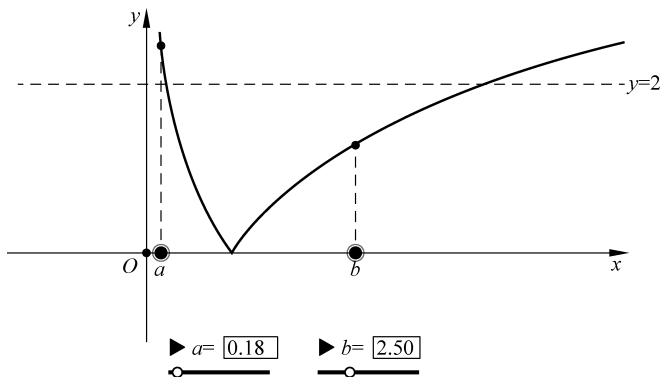


图 1.2.2

例 2 定义区间长度 m 为这样的—一个量: m 的大小为区间右端点的值减去区间左端点的值。若关于 x 的不等式 $x^2 - 2ax - 3a < 0$ 有解,且解集的区间长度不超过 4 个单位长,则 a 的取值范围是_____。

【解析】

因为关于 x 的不等式 $x^2 - 2ax - 3a < 0$ 有解,所以 $\Delta = 4a^2 + 12a > 0$,解得 $a > 0$ 或 $a < -3$,由 $x^2 - 2ax - 3a = 0$ 解得 $x_1 = a - \sqrt{a^2 + 3a}$, $x_2 = a + \sqrt{a^2 + 3a}$,由 $x_1 < x_2$ 得不等式解集为 (x_1, x_2) 。

又解集的区间长度不超过 4 个单位长, 则 $2\sqrt{a^2+3a} \leq 4$, 解得 $-4 \leq a \leq 1$ 。因为 $a > 0$ 或 $a < -3$, 所以 $-4 \leq a < -3$ 或 $0 < a \leq 1$ 。

简要评注

方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 的解是函数 $y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$ 的图像与 x 轴交点的横坐标, 方程的解区间长度是其图像与 x 轴两交点间的距离。若利用网络画板动态演示函数 $y=x^2-2ax-3a$ 的图像, 能更直观地理解不等式 $x^2-2ax-3a < 0$ 的解区间的意义。

动感体验

编号: 176786



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.2.3、图 1.2.4 所示, 黑色实线、蓝色虚线分别为函数 $y=x^2-2ax-3a$ 的图像及其对称轴, 拖动变量 a 的滑杆或 x 轴上的红色点改变实数 a 的值, 考察不等式 $x^2-2ax-3a < 0$ 的解, 理解解集的区间长度的含义。

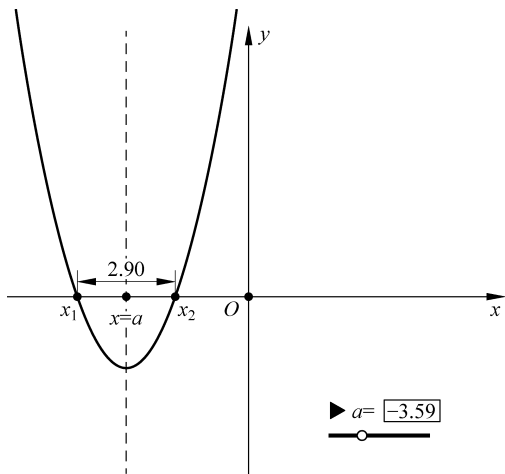


图 1.2.3

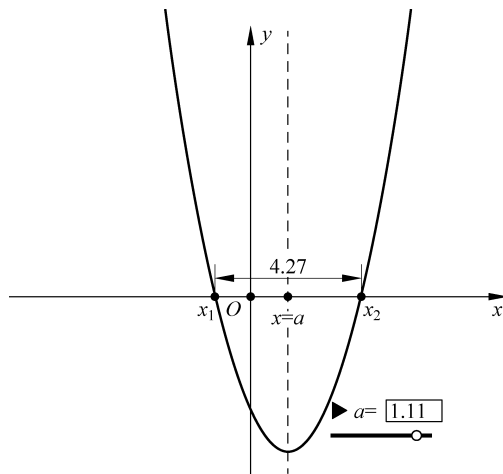


图 1.2.4

不等式 $x^2-2ax-3a < 0$ 解集的区间端点即为方程 $x^2-2ax-3a=0$ 的解 x_1, x_2 , 则 $|x_1-x_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} = 2\sqrt{a^2+3a} \leq 4$, 解得 $-4 \leq a < -3$ 或 $-0 < a \leq 1$ 。

例 3 定义区间 $(m, n), [m, n], (m, n], [m, n)$ 的长度均为 $n-m$, 其中 $n > m$, 已知关于 x 的不等式 $\sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x - b < 0, x \in [0, \pi]$ 的解集构成的各区间的长度和大于 $\frac{2\pi}{3}$, 求实数 b 的取值范围。

【解析】

由题意可知 $\sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x - b = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} - b$ 。

设 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 原不等式等价于 $f(x) < b - \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0, \pi]$, 因为函数 $f(x)$ 的周期为 π , $[0, \pi]$ 的长度恰好为函数的一个正周期, 由不等式解集构成的各区间的长度和大于 $\frac{2\pi}{3}$, 得 $b - \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$, 故实数 b 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$ 。

简要评注

本题为简单的三角不等式问题, 上述解答看似简洁, 但不等式 $b - \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$ 难以理解, 若能借助网络画板动态演示函数的图像与直线 $y = b - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的关系, 则更利于问题的解答。

动感体验

编号: 176791



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.2.5、图 1.2.6 所示, 黑色实线、蓝色实线分别为函数 $y = \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), x \in [0, \pi]$, $y = b - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的图像, 拖动变量 b 的滑杆或 y 轴上的蓝色点改变实数 b 的值, 观察两函数图像交点的特征, 探究两函数图像交点间距离大于 $\frac{2\pi}{3}$ 的条件。

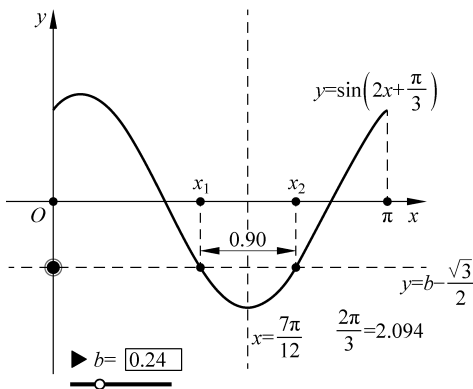


图 1.2.5

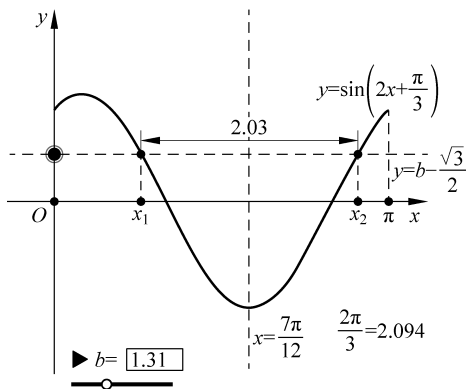


图 1.2.6

由图 1.2.5、图 1.2.6 可知, 当 $b - \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(0 + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 两交点关于直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 对称, 只需 $\left|\frac{7\pi}{12} - x_1\right| > \frac{\pi}{3}$, 即可满足题目条件, 可得 $0 \leq x_1 < \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$, 即 $b - \frac{\sqrt{3}}{2} > \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, 解得 $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} < b < \sqrt{3}$ 。

又当 $b - \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 由图像知满足条件, 故实数 b 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$ 。

练习 1 函数 $y = \sin x$ 的定义域为 $(a, b]$, 值域为 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, 则 $b - a$ 的最大值是()。

A. π B. 2π C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{3}$

编号: 174881



答案: C

练习 2 (2009 江西) 若不等式 $\sqrt{9-x^2} \leq k(x+2) - \sqrt{2}$ 的解集为区间 $[a, b]$, 且 $b - a = 2$, 则 $k =$ _____。

编号: 175821

答案: $\sqrt{2}$

练习 3 若关于 x 的不等式 $2ax^2 - 12x - 3 > 0$ 的解集构成的区间的长度为 $\sqrt{6}$, 求实数 a 的值。

编号: 176797

答案: -2

练习 4 设函数 $f(x) = ax - (1+a^2)x^2$ ($a > 0$), 区间 $I = \{x \mid f(x) > 0\}$, 定义区间 (α, β) 的长度为 $\beta - \alpha$ 。

(1) 求区间 I 的长度 $H(a)$ (用 a 表示);(2) 若 $a \in [3, 4]$, 求 $H(a)$ 的最大值。

编号: 176800



答案: (1) $H(a) = \frac{a}{1+a^2}$; (2) $\frac{3}{10}$



1.3 集合中的区域问题

例 设平面点集 $A = \left\{ (x, y) \mid (y-x)\left(y-\frac{1}{x}\right) \geq 0 \right\}$, $B = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$, 则 $A \cap B$ 所表示的平面图形的面积为()。

A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{5}$ C. $\frac{4\pi}{7}$ D. $\frac{\pi}{2}$

【解析】

因为 $(y-x)\left(y-\frac{1}{x}\right) \geq 0$, 所以 $\begin{cases} y-x \geq 0 \\ y-\frac{1}{x} \geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y-x \leq 0 \\ y-\frac{1}{x} \leq 0 \end{cases}$, 又因为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$,

所以满足上述条件的区域为图 1.3.1 中阴影部分。

因为 $y = \frac{1}{x}$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的图像都关于直线 $y=x$ 对称, 所以阴影部分的面积之和为圆面积的一半, 即为 $\frac{\pi}{2}$, 故选 D。

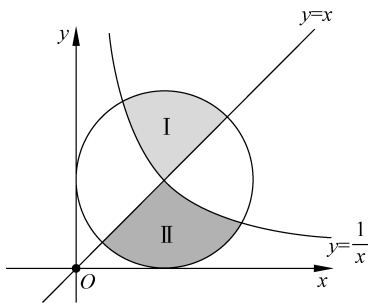


图 1.3.1

> 简要评注

本题有三个难点：其一是化简集合 A , 其二要熟悉二元不等式的解集是一个平面区域, 其三求不规则平面图形的面积用几何性质。上述解法中阴影部分的面积之和为圆面积的一半不易理解, 若借助网络画板的动态功能, 可直观地感受阴影部分的面积之和与圆面积间的关系。

编号: 175084



动感体验

扫描二维码, 打开课件, 图 1.3.2 中阴影部分为 $A \cap B$ 所表示的平面图形, 点击按钮“观察 1”和“观察 2”, 观察图形的动态变化, 考察图 1.3.3 中四个阴影部分面积间的关系。

因为 $y = \frac{1}{x}$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的图像都关于直线 $y=x$ 对称, 所以 I 和 III 区域关于直线 $y=x$ 对称, II 和 IV 区域关于直线 $y=x$ 对称, 因此 I 和 III 区域的面积相等, II 和 IV 区域的面积相等, 即圆内部分 I 和 II 区域的面积之和为圆面积的一半, 即为 $\frac{\pi}{2}$, 故选 D。

练习 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知平面区域 $A = \{(x, y) \mid x+y \leq 2 \text{ 且 } x \geq 0, y \geq 0\}$, 则平面区域 $B = \{(x+y, x-y) \mid (x, y) \in A\}$ 的面积为_____。

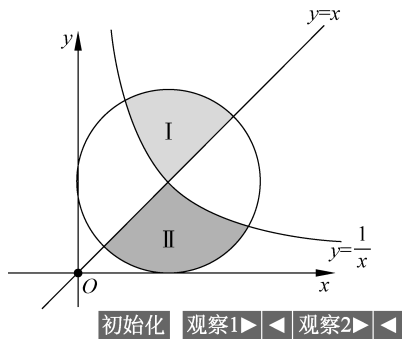


图 1.3.2

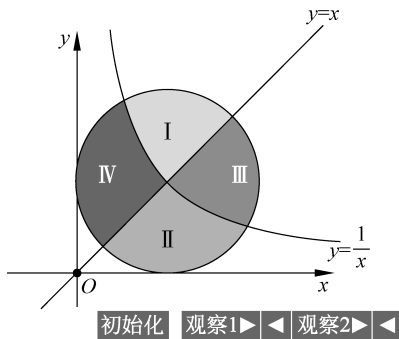


图 1.3.3

编号: 188960



答案: 4



1.4 函数的概念

例 1 将函数 $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} - \sqrt{3}$ ($x \in [0, 2]$) 的图像绕坐标原点逆时针旋转 θ (θ 为锐角), 若所得曲线仍是一个函数的图像, 则 θ 的最大值为_____。

【解析】

由 $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} - \sqrt{3}$ ($x \in [0, 2]$) 得 $(x-1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 4$, 则函数 $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} - \sqrt{3}$ ($x \in [0, 2]$) 的图像为以 $(1, \sqrt{3})$ 为圆心、2 为半径的圆在 x 轴及其上方部分。

设函数图像在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=kx$, 由 $\frac{|k+\sqrt{3}|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$ 得 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即切线的倾斜

角为 $\frac{\pi}{6}$, 而 θ 的最大值为切线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 沿逆时针方向转到与 y 轴重合时所转过的角度, 故 θ

的最大值为 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 。

简要评注

根据函数的定义, 一个 x 值只能对应唯一一个 y 值, 本题是求最大的旋转角, 即使得旋转后的曲线与每一条垂直于 x 轴的直线 $x=m$ ($m \in \mathbf{R}$) 至多有一个交点, 上述解答利用了函数图像在 $x=0$ 处的切线, 但不易理解。若借助网络画板动态演示图像的旋转及其与直线 $x=m$ 交点情况, 就容易理解和求解了。

动感体验

编号: 174923



扫描二维码,打开课件,如图 1.4.1 所示,黑色实线为函数 $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} - \sqrt{3}$ ($x \in [0, 2]$) 的图像,点击按钮“提示”,如图 1.4.2 所示,紫色虚线为垂直于 x 轴的直线 $x=m$,拖动 x 轴上的红点可以改变直线 $x=m$ 的位置。拖动变量 θ 的滑杆改变 θ 的值,函数图像随时绕原点旋转;当 $\theta \neq 0$ 时,红色实线为函数 $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} - \sqrt{3}$ ($x \in [0, 2]$) 的图像绕原点旋转 θ 后的图像,如图 1.4.3 所示。

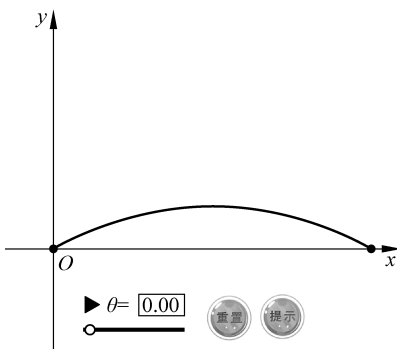


图 1.4.1

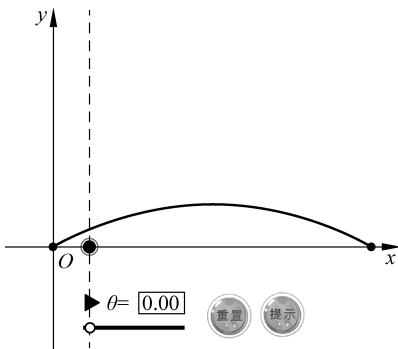


图 1.4.2

再次点击按钮“提示”,如图 1.4.4 所示,蓝色实线为函数 $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} - \sqrt{3}$ ($x \in [0, 2]$) 在原点处的切线,紫色实线为其旋转后的图像在原点处的切线。拖动变量 θ 的滑杆及 x 轴上的红点,探究直线 $x=m$ 与红色曲线最多只有一个交点时,紫色实线的位置特征。

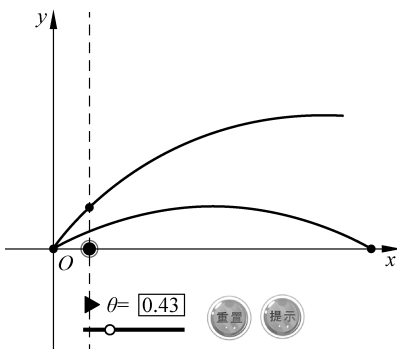


图 1.4.3

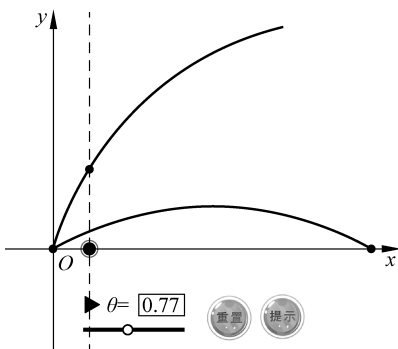


图 1.4.4

例 2(2019 浙江) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ax^3 - x$, 若存在 $t \in \mathbf{R}$, 使得 $|f(t+2) - f(t)| \leq \frac{2}{3}$, 则实数 a 的最大值是_____。

【解析】

存在 $t \in \mathbf{R}$, 使得 $|f(t+2) - f(t)| \leq \frac{2}{3}$, 即存在 $t \in \mathbf{R}$, 使 $|a(t+2)^3 - (t+2) - at^3 + t| \leq \frac{2}{3}$

成立, 化简得 $|2a(3t^2 + 6t + 4) - 2| \leq \frac{2}{3}$, 即 $\frac{2}{3} \leq a(3t^2 + 6t + 4) \leq \frac{4}{3}$, 由 $a(3t^2 + 6t + 4) \leq$

$\frac{4}{3}$, 得 $a \leq \frac{4}{3(3t^2+6t+4)}$, 又 $3t^2+6t+4=3(t+1)^2+1 \geq 1$, 所以 $a \leq \frac{4}{3}$ 。

由 $a(3t^2+6t+4) \geq \frac{2}{3}$ 得 $a \geq \frac{2}{3(3t^2+6t+4)}$, 所以 $a > 0$ 。

综上, $0 < a \leq \frac{4}{3}$, 故 a 的最大值为 $\frac{4}{3}$ 。

简要评注

存在 x 使得 $a \leq f(x)$ 成立 $\Leftrightarrow a \leq f(x)_{\max}$, 存在 x 使得 $a \geq f(x)$ 成立 $\Leftrightarrow a \geq f(x)_{\min}$ 。

动感体验

编号: 174522



扫描二维码, 打开课件, 如图 1.4.5 所示, 粉红色实线为函数 $f(x) = ax^3 - x$ 的图像, 拖动变量 a 的滑杆改变实数 a 的值, 拖动变量 t 的滑杆或 x 轴上的红色点改变变量 t 的值, 感受 $|f(t+2) - f(t)|$ 的变化情况。

化简 $|f(t+2) - f(t)|$, 可转化为 $\frac{2}{3} \leq a(3t^2+6t+4) \leq \frac{4}{3}$, 即函数 $g(t) = 3at^2 + 6at + 4a$ 在直线 $y = \frac{2}{3}$ 与 $y = \frac{4}{3}$ 间存在图像。

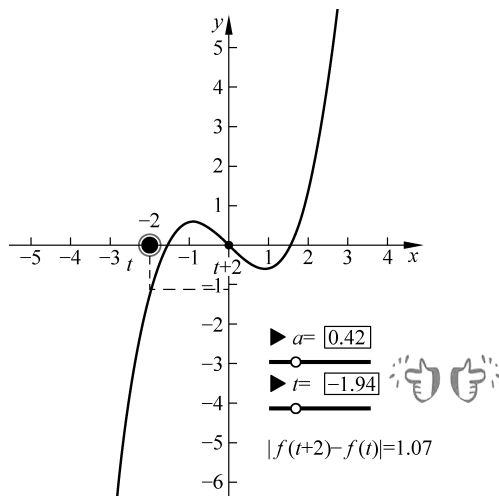


图 1.4.5

点击按钮 , 如图 1.4.6 所示, 粉红色实线为函数 $g(t) = 3at^2 + 6at + 4a$ 的图像, 两条蓝色虚线分别为直线 $y = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, 拖动变量 a 的滑杆, 考察 $y = 3at^2 + 6at + 4a$ 在直线 $y = \frac{2}{3}$ 与 $y = \frac{4}{3}$ 间存在图像的条件。

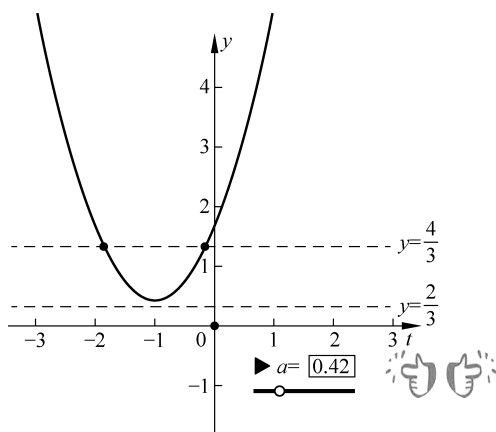
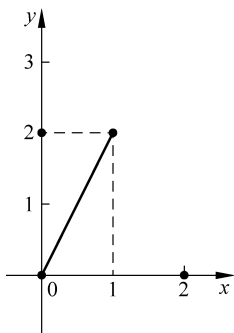


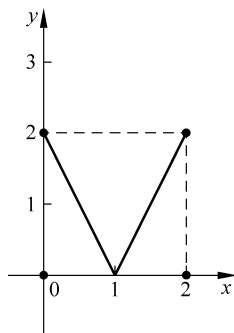
图 1.4.6

如图 1.4.6 所示,只要函数 $g(t) = 3at^2 + 6at + 4a$ 的图像与直线 $y = \frac{4}{3}$ 有交点即可满足题目条件,故方程 $3at^2 + 6at + 4a = \frac{4}{3}$ 有解,即 $\Delta = -12a^2 + 16a \geq 0$,解得 $0 < a \leq \frac{4}{3}$,故 a 的最大值为 $\frac{4}{3}$ 。

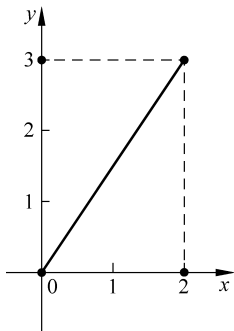
练习 1 设 $M = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $N = \{y | 0 \leq y \leq 3\}$, 给出下列四个图形,其中能表示从集合 M 到集合 N 的函数关系的是_____ (只填写正确图形的字母)。



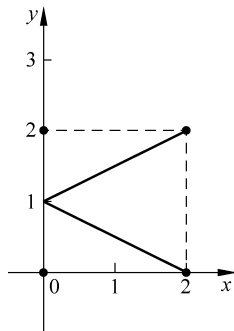
A.



B.



C.



D.

编号：174889



答案：BC

练习 2 将函数 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 的图像绕坐标原点逆时针方向旋转 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 角, 得到曲线 C , 若对于每一个旋转角 θ , 曲线 C 都是一个函数的图像, 则满足条件的角 θ 范围是_____。

编号：174925



答案： $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

练习 3(2018 新课标全国) 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$, 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + \cdots + f(50) = (\quad)$ 。

A. -50

B. 0

C. 2

D. 50

编号：174086



答案：C

第 2 章

函数的基本性质

2.1 函数的值域

例 1 求函数 $y = |x+3| - |x-1|$ 的值域。

【解析】

$$\text{原函数式即为 } y = \begin{cases} -4, & x \leq -3 \\ 2x+2, & -3 < x \leq 1 \\ 4, & x > 1 \end{cases}$$

当 $-3 < x \leq 1$ 时, $-4 < 2x+2 \leq 4$, 所以原函数

数值域为 $[-4, 4]$ 。

简要评注

$|a-b|$ 的几何意义: 数轴上表示 a 的点与表示 b 的点之间的距离, 充分利用函数式的几何意义, 可减少一定的运算量。

动感体验

编号: 176876



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.1.1~图 2.1.3 所示, 拖动数轴上红点, 体会 $|x+3|$ 与 $|x-1|$ 的几何意义; 探究 x 的位置对 $|x+3| - |x-1|$ 的影响。

$|x+3|$, $|x-1|$ 分别表示数轴上表示 x 的点与表示 $-3, 1$ 的点之间的距离, 求函数 $y = |x+3| - |x-1|$ 的值就是求这两个距离的差。

如图 2.1.1 所示, 当 $-3 < x < 1$ 时, $-4 < |x+3| - |x-1| < 4$ 。

如图 2.1.2 所示,当 $x \leq -3$ 时, $|x+3| - |x-1| = -4$ 。

如图 2.1.3 所示,当 $x \geq 1$ 时, $|x+3| - |x-1| = 4$ 。

故原函数值域为 $[-4, 4]$ 。

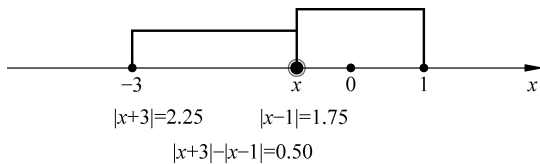


图 2.1.1

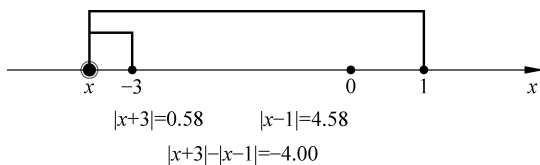


图 2.1.2

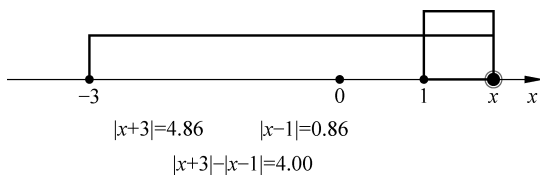


图 2.1.3

例 2 求函数 $y = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+2x+10}$ 的值域。

【解析】

本题从代数的角度很难求函数的值域,若考虑到 $\sqrt{x^2+4} = \sqrt{(x-0)^2 + (0-2)^2}$ 是点 $(x, 0)$ 与点 $(0, 2)$ 间的距离, $\sqrt{x^2+2x+10} = \sqrt{(x+1)^2 + (0+3)^2}$ 是点 $(x, 0)$ 与点 $(-1, -3)$ 之间的距离,原函数值域求解就转化为求点 $(x, 0)$ 到点 $(0, 2)$ 与 $(-1, -3)$ 距离和的取值范围。

动感体验



编号: 176885



扫描二维码,打开课件,如图 2.1.4~图 2.1.6 所示,拖动 x 轴上的红点 $P(x, 0)$,观察和研究点 $P(x, 0)$ 与点 $A(0, 2)$, $B(-1, -3)$ 间距离 $|PA|$, $|PB|$,探究 $|PA| + |PB|$ 的取值范围。

因为 $y = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+2x+10} = \sqrt{(x-0)^2 + (0-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (0+3)^2}$, 所以 y 可以看成是点 $P(x, 0)$ 到点 $A(0, 2)$, $B(-1, -3)$ 的距离的和。

当点 P 在 x 轴上移动时, $|PA| + |PB| \geq |AB|$, 当且仅当 P, A, B 共线时取等号, 则 $y = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+2x+10} \geq |AB| = \sqrt{(0+1)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{26}$, 故函数的值域为 $[\sqrt{26}, +\infty)$ 。

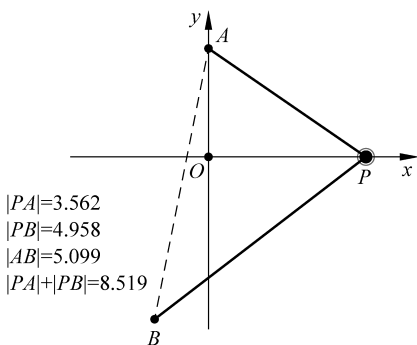


图 2.1.4

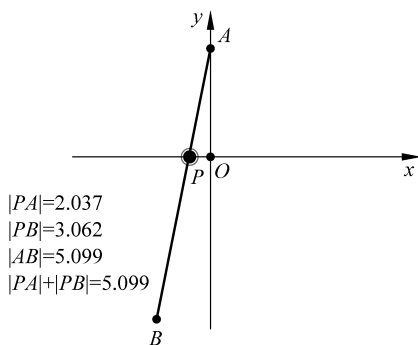


图 2.1.5

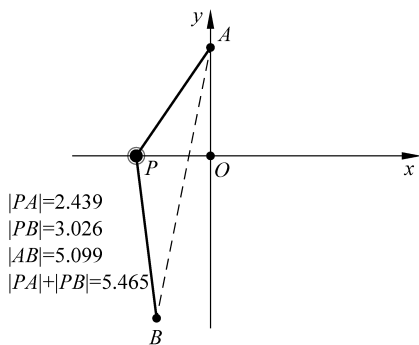


图 2.1.6

例 3 求函数 $f(x)=2\sqrt{x^2+2}+x$ 的值域。

【解析】

设 $f(x)=2\sqrt{x^2+2}+x=t$, 则 $(2\sqrt{x^2+2})^2=(t-x)^2$, 化简得 $3x^2+2tx+8-t^2=0$ 。

因为原函数定义域为 $\mathbf{R}$, 所以关于 x 的方程 $3x^2+2tx+8-t^2=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解, 即 $\Delta=(2t)^2-12(8-t^2)=16t^2-96\geq 0, t\geq \sqrt{6}$ (舍去负值), 即函数 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{6}, +\infty)$ 。

➤ 简要评注

本题采用平方后转化为一元二次方程的方法, 利用方程有解, 判别式非负求解。若通过换元, 联系几何关系, 数形结合能更加直观地解决此题。

动感体验



编号: 173545



方法 1: 令 $x = \sqrt{2} \tan \theta, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则原函数化为 $y = \frac{\sqrt{2}(\sin \theta + 2)}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{2}[\sin \theta - (-2)]}{\cos \theta - 0}, y = \frac{\sqrt{2}[\sin \theta - (-2)]}{\cos \theta - 0}$ 的几何意义为定点 $A(0, -2)$ 与单位圆在 y 轴右侧

圆弧上的动点 B 连线的斜率的 $\sqrt{2}$ 倍。

扫描二维码, 打开课件, 如图 2.1.7、图 2.1.8 所示, 红色实线为点 $B(\cos\theta, \sin\theta)$ ($\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) 所在半圆的图像, 蓝色实线为过点 $A(0, -2)$ 的直线, 拖动点 B , 观察并探究直线 AB 的斜率取值范围。

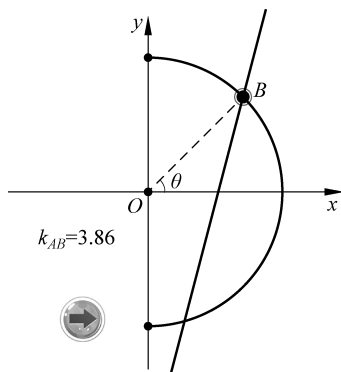


图 2.1.7

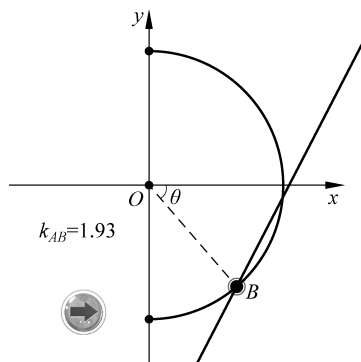


图 2.1.8

结合图形可知, 当直线 AB 与圆弧相切时斜率最小, 此时 $\angle OAB = \frac{\pi}{6}$ 。

又 $k_{AB} \geq \tan\left(\frac{\pi}{2} - \angle AOB\right) = \sqrt{3}$, 故 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{6}, +\infty)$ 。

方法 2: 令 $\sqrt{x^2 + 2} = a, x = b$, 则有 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a \geq \sqrt{2} \end{cases}$ 。

设目标函数为 $t = 2a + b$, 则问题转化为直线 $t = 2a + b$ 与双曲线 $a^2 - b^2 = 2$ 右支有公共点, 求 t 的取值范围。

点击按钮 , 如图 2.1.9、图 2.1.10 所示, 红色实线为双曲线 $a^2 - b^2 = 2 (a \geq \sqrt{2})$ 中的一支, 粉红色虚线是函数 $t = 2a + b$ 的图像, 拖动变量 t 的滑杆或 a 轴上的红点, 考察粉红色直线与红色曲线有公共点的条件。

由图像得, 当直线 $t = 2a + b$ 与双曲线 $a^2 - b^2 = 2$ 右支相切时, t 有最小值。

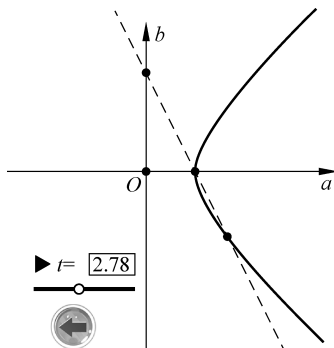


图 2.1.9

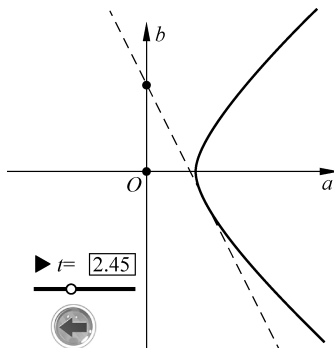


图 2.1.10

由 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ t = 2a + b \end{cases}$ 得 $3a^2 - 4at + t^2 + 2 = 0$, 则 $\Delta = 16t^2 - 12(t^2 + 2) \geq 0$, 得 $t \geq \sqrt{6}$, 故 $f(x)$

的值域为 $[\sqrt{6}, +\infty)$ 。

例 4 求函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域。

【解析】

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \sqrt{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2x}{x^2+1}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x+\frac{1}{x}}}} > 1.$$

$$\text{当 } x < 1 \text{ 时, } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = -\sqrt{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2x}{x^2+1}}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x+\frac{1}{x}}}} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x = -1$ 时取等号, 故函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup (1, +\infty)$ 。

动感体验



编号: 173654



方法 1: 令 $a = (x, 1)$, $b = (1, -1)$, a, b 的夹角为 θ , 则 $\cos\theta = \frac{x-1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}$, 即 $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{2}\cos\theta$, 所以 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}$ 。

扫描二维码, 打开课件, 如图 2.1.11、图 2.1.12 所示, 红色实线为向量 a , 紫色实线为向量 b , 拖动点 A, 观察和探究向量 a, b 夹角变化情况。

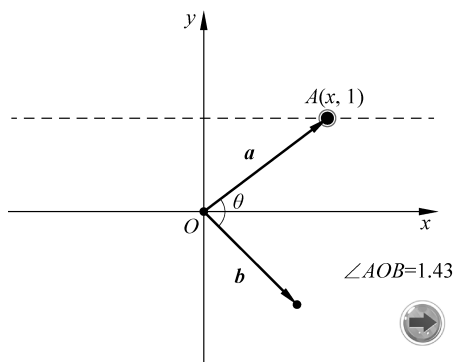


图 2.1.11

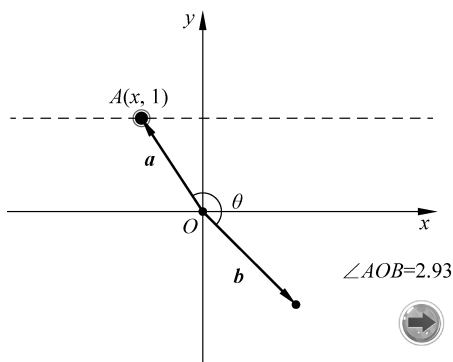


图 2.1.12

由图可知, $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \pi$ 且 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, 所以 $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos \theta < 0$ 或 $0 < \sqrt{2} \cos \theta < 1$, 所以 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup (1, +\infty)$ 。

方法 2: 设 $P(x, \sqrt{x^2+1})$, $Q(1, 0)$, 则 $f(x)$ 为点 P 与点 Q 连线的斜率。

点击按钮 , 如图 2.1.13、图 2.1.14 所示, 红色实线为函数 $y = \sqrt{x^2+1}$ 的图像, 蓝色虚线为双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的一条渐近线, 紫色虚线为过点 $Q(1, 0)$ 的双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的一条切线, 黑色实线为过点 $Q(1, 0)$ 和双曲线上一点的直线; 拖动红点 P , 考察直线 PQ 斜率的变化。

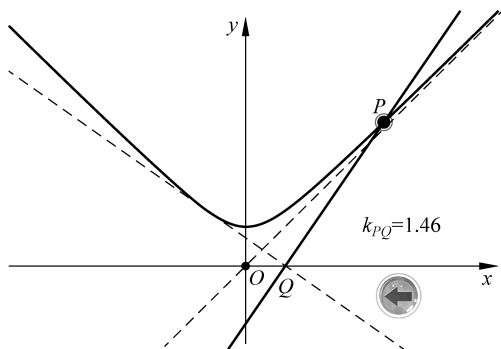


图 2.1.13

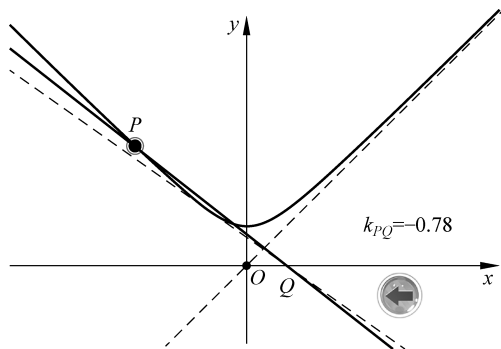


图 2.1.14

当 $x > 1$ 时, 如图 2.1.13 所示, $k_{PQ} > k_{\text{渐近线}} = 1$; 当 $x < 1$ 时, 如图 2.1.14 所示, $k_{PQ} \leq k_{\text{切线}}$, 由 $\begin{cases} y = \sqrt{x^2+1} \\ y = k(x-1) \end{cases}$ 得 $(k^2-1)x^2 - 2k^2x + k^2 - 1 = 0$, 所以 $\begin{cases} k^2 - 1 \neq 0 \\ \Delta = (2k^2)^2 - 4(k^2-1)(k^2-1) = 0 \end{cases}$, 解得 $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 或 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (舍), 故 $k_{\text{切线}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

综上, $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup (1, +\infty)$ 。

例 5 (2017 浙江) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \left|x + \frac{4}{x} - a\right| + a$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最大值是 5, 则 a 的取值范围是_____。

【解析】

因为 $x \in [1, 4]$, 所以 $x + \frac{4}{x} \in [4, 5]$ 。

① 当 $a \geq 5$ 时, $f(x) = a - x - \frac{4}{x} + a = 2a - x - \frac{4}{x} \leq 2a - 2\sqrt{x \times \frac{4}{x}} = 2a - 4$, 则 $f(x)$ 的最大值 $2a - 4 = 5$, 即 $a = \frac{9}{2}$ (舍去)。

② 当 $a \leq 4$ 时, $f(x) = x + \frac{4}{x} - a + a = x + \frac{4}{x} \leq 5$, 此时命题成立。

③ 当 $4 < a < 5$ 时, $f(x) = \max\{|4-a|+a, |5-a|+a\}$, 则 $\begin{cases} |4-a|+a \geq |5-a|+a \\ |4-a|+a = 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} |4-a|+a < |5-a|+a \\ |5-a|+a = 5 \end{cases}$, 解得 $a = \frac{9}{2}$ 或 $a < \frac{9}{2}$ 。

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{9}{2}]$ 。

简要评注

含绝对值符号的问题, 常常去掉绝对值符号再予以解决。函数 $y = x + \frac{4}{x}$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减, 在 $[2, 4]$ 上单调递增, 因此当 $4 < a < 5$ 时, $f(x) = \max\{|4-a|+a, |5-a|+a\}$ 。

动感体验

编号: 174099



令 $t = x + \frac{4}{x}$ ($x \in [1, 4]$), 则 $t \in [4, 5]$ 。扫描二维码, 打开课件, 如图 2.1.15~图 2.1.17 所示, 黑色虚线为函数 $h(t) = |t-a|+a$ 在区间 $[-0.5, 6]$ 上的图像, 红色实线为函数 $h(t) = |t-a|+a$ 在区间 $[4, 5]$ 上的图像, 拖动 x 轴上的红点 a , 或变量 a 的滑杆, 改变实数 a 的值。考察函数 $h(t)$ 的图像变化, 探究当 $t \in [4, 5]$, $h(t)$ 最大值为 5 时 a 的取值范围。

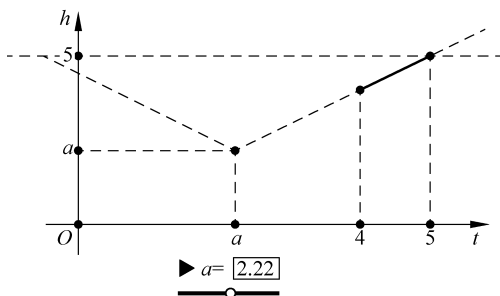


图 2.1.15

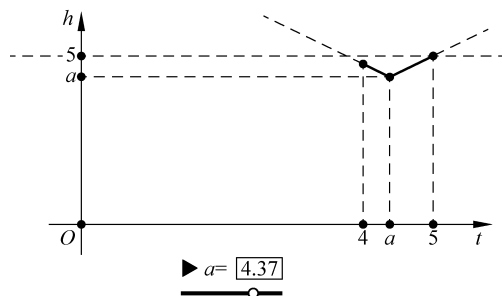


图 2.1.16

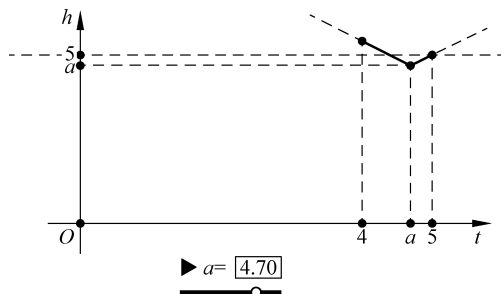


图 2.1.17

函数 $h(t)$ 的图像是折线 $y = |x|$ 右移 a , 上移 a 个单位得到的, 从图像可得当且仅当 $h(4) \leq 5$ 时, $h(t)$ 在 $[4, 5]$ 上的最大值为 5。所以 $|4-a|+a \leq 5$, 解得 $a \leq \frac{9}{2}$ 。

综上, 实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right]$ 。

例 6 若函数 $f(x)$ 为定义域 D 上的单调函数, 且存在 $[a, b] \subseteq D$ (其中 $a < b$), 使得当 $x \in [a, b]$ 时, $f(x)$ 的值域恰为 $[a, b]$, 则称函数 $f(x)$ 是 D 上的正函数, $[a, b]$ 叫做“等域区间”。

(1) 已知 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ 是 $[0, +\infty)$ 上的“正函数”, 求 $f(x)$ 的“等域区间”;

(2) 试探究是否存在实数 m , 使得函数 $g(x) = x^2 + m$ 是 $(-\infty, 0)$ 上的“正函数”? 若存在, 求出实数 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由。

【解析】

(1) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ 是 $[0, +\infty)$ 上的“正函数”, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x \in [a, b]$ 时, $\begin{cases} f(a) = a \\ f(b) = b \end{cases}$, 即 $\begin{cases} \sqrt{a} = a \\ \sqrt{b} = b \end{cases}$, 解得 $a = 0, b = 1$, 故函数 $f(x)$ 的“等域区间”为 $[0, 1]$ 。

(2) 函数 $g(x) = x^2 + m$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 因为 $g(x)$ 是 $(-\infty, 0)$ 上的“正函数”, 所以当 $x \in [a, b]$ 时, $\begin{cases} g(a) = b \\ g(b) = a \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a^2 + m = b \\ b^2 + m = a \end{cases}$, 两式相减得 $a^2 - b^2 = b - a$ 即 $b = -(a+1)$, 代入 $a^2 + m = b$ 得 $a^2 + a + m + 1 = 0$ 。

由 $a < b < 0$ 且 $b = -(a+1)$ 得 $-1 < a < -\frac{1}{2}$, 故关于 a 的方程 $a^2 + a + m + 1 = 0$ 在区间 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ 内有实数解。

令 $\varphi(a) = -a^2 - a - 1 = -\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$, 则 $\varphi(a)$ 在 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ 的值域为 $\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$, 故实数 m 的取值范围为 $\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$ 。

> 简要评注

利用函数单调性求解函数值域是求函数值域的首选办法。本题第(2)问通过消元转化为一元二次函数实根分布问题。

动感体验

编号: 174934



函数 $g(x) = x^2 + m$ 是 $(-\infty, 0)$ 上的“正函数”, 则当 $x \in [a, b]$ 时, $\begin{cases} g(a) = a^2 + m = b \\ g(b) = b^2 + m = a \end{cases}$,

即 $b = -(a+1)$, 代入 $a^2 + m = b$, 可得 $a^2 + a + m + 1 = 0$, 由 $a < b < 0$, 且 $b = -(a+1)$ 得 $-1 < a < -\frac{1}{2}$, 从而问题转化成关于 a 的方程 $a^2 + a + m + 1 = 0$ 在区间 $(-1, -\frac{1}{2})$ 内有实数解。

扫描二维码, 打开课件, 如图 2.1.18、图 2.1.19 所示, 黑色实线为函数 $\varphi(a) = a^2 + a + m + 1$ 的图像, 拖动变量 m 的滑杆可以改变实数 m 的值, 探究函数图像与 x 轴在 $(-1, -\frac{1}{2})$ 有交点的条件。

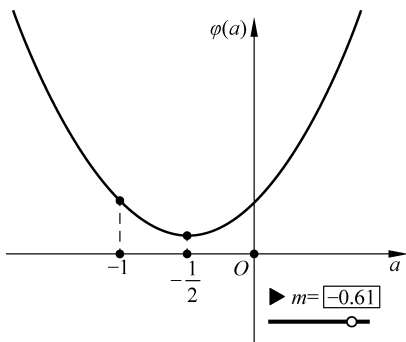


图 2.1.18

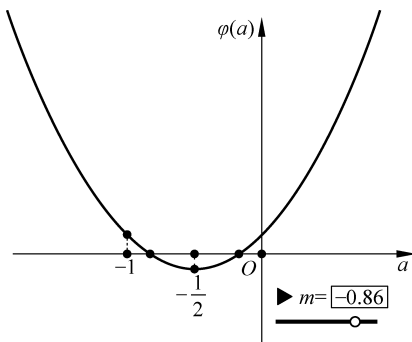


图 2.1.19

记 $\varphi(a) = a^2 + a + m + 1$, 则 $\begin{cases} \varphi(-1) > 0 \\ \varphi(-\frac{1}{2}) < 0 \end{cases}$, 解得 $m \in (-1, -\frac{3}{4})$ 。

练习 1 求函数 $f(x) = x + \sqrt{1-2x^2}$ 的值域。

编号: 174930

答案: $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}]$

练习 2 已知函数 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3}$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $\frac{M}{m}$ 的值为_____。

编号: 173543

答案: $\sqrt{2}$

练习 3 求函数 $f(x) = x - 2^x$ 的值域。

编号: 174931

答案: $(-\infty, -\log_2(\ln 2) - \frac{1}{\ln 2})$

练习 4(2015 山东) 已知函数 $f(x)=a^x+b(a>0, a\neq 1)$ 的定义域和值域都是 $[-1, 0]$, 则 $a+b=$ _____。

编号: 174102



答案: $-\frac{3}{2}$



2.2 已知函数定义域或函数值域求参数

例 1 函数 $y=\sqrt{kx^2-6x+k+8}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则 k 的取值范围是()。

A. $k\geq 0$ 或 $k\leq -9$

B. $k\geq 1$

C. $-9\leq k\leq 1$

D. $0<k\leq 1$

【解析】

由题意得 $kx^2-6x+k+8\geq 0$ 恒成立, 即 $k\geq \frac{6x-8}{x^2+1}$ 恒成立。

令 $6x-8=t$, $f(t)=\frac{36t}{t^2+16t+100}$, 当 $t=0$ 时, $f(t)=0$; 当 $t\neq 0$ 时, $f(t)=\frac{36}{t+\frac{100}{t}+16}$; 当 $t>0$ 时, $f(t)\leq 1$; 当 $t<0$ 时, $-9\leq f(t)<0$ 。

综上, $k\geq 1$, 故选 B。

> 简要评注

函数 $y=\sqrt{kx^2-6x+k+8}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 即 $kx^2-6x+k+8\geq 0$ 恒成立, 等价于函数 $y=kx^2-6x+k+8$ 的图像始终在 x 轴上方或与 x 轴相切。

动感体验

编号: 174937



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.2.1、图 2.2.2 所示, 紫色实线为函数 $y=kx^2-6x+k+8$ 的图像, 拖动变量 k 的滑杆可以改变实数 k 的值, 探究函数图像始终在 x 轴上方或与 x 轴相切的条件。

由图像得不等式 $ax^2+bx+c\geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上成立, 等价于 $\begin{cases} a=b=0 \\ c\geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a>0 \\ \Delta=b^2-4ac\leq 0 \end{cases}$ 。

又函数 $y=\sqrt{kx^2-6x+k+8}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 有 $\begin{cases} k>0 \\ \Delta=36-4k(k+8)\leq 0 \end{cases}$, 解得 $k\geq 1$, 故

选 B。

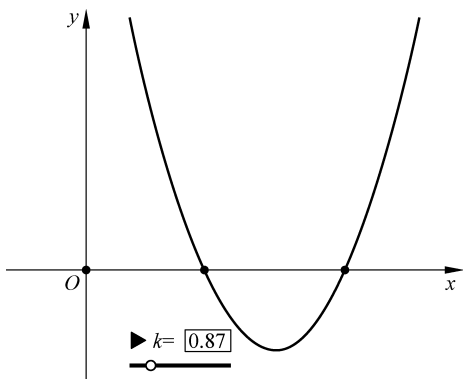


图 2.2.1

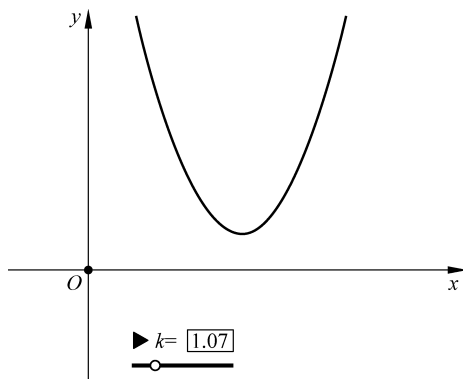


图 2.2.2

例 2 已知函数 $f(x) = \log_2[2x^2 + (m+3)x + 2m]$, 若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 求实数 m 的取值范围。

【解析】

函数 $f(x) = \log_2[2x^2 + (m+3)x + 2m]$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则 $\Delta = (m+3)^2 - 16m \geqslant 0$, 即 $m^2 - 10m + 9 \geqslant 0$, 解得 $m \geqslant 9$ 或 $m \leqslant 1$ 。

故实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$ 。

▶ 简要评注

函数 $f(x) = \log_2[2x^2 + (m+3)x + 2m]$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 即 $2x^2 + (m+3)x + 2m$ 必须至少取满 $(0, +\infty)$, 因此必须要函数 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m$ 与 x 轴有交点, 借助网络画板动态演示函数图像, 更利于理解。

▶ 动感体验

编号: 149342



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.2.3~图 2.2.5 所示, 虚线为函数 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m$ 的图像, 实线为函数 $f(x) = \log_2[2x^2 + (m+3)x + 2m]$ 的图像。拖动变量 m 的滑杆可

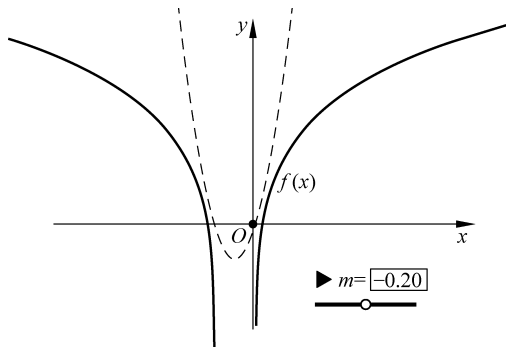


图 2.2.3

以改变实数 m 的值,观察函数 $g(x)$ 的性质对函数 $f(x)$ 的值域的影响,体会函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 时, $g(x)$ 图像与 x 轴的交点个数。

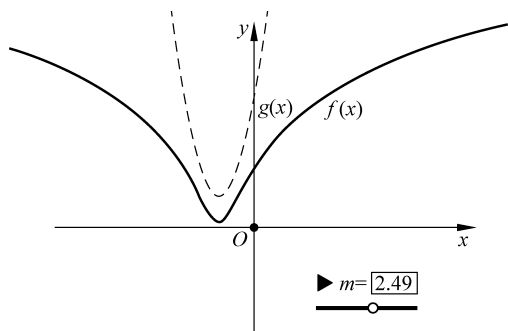


图 2.2.4

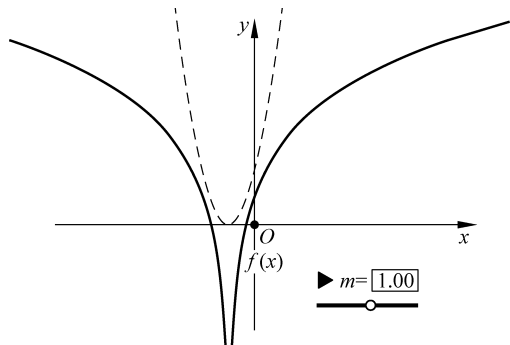


图 2.2.5

如图 2.2.3 所示,函数 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m$ 与 x 轴有两个交点时, $g(x)$ 可以取遍所有的正数,因此这时函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 。

如图 2.2.4 所示,当函数 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m$ 与 x 轴没有交点时, $g(x)$ 有最小正值,设为 t_0 ,则函数 $f(x) = \log_2[2x^2 + (m+3)x + 2m]$ 有最小值 $\log_2 t_0$,那么此时函数 $f(x)$ 值域不为 $\mathbf{R}$,而是 $\mathbf{R}$ 的一个子集。

如图 2.2.5 所示,函数 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m$ 与 x 轴只有一个交点时, $g(x)$ 有最小值 0,则 $g(x)$ 可以取遍所有的正数,因此这时函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 。

综上所述,当 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m$ 与 x 轴有交点时,函数 $f(x)$ 的值域 $\mathbf{R}$,即要求 $\Delta = (m+3)^2 - 16m \geq 0$,解得 $m \geq 9$ 或 $m \leq 1$ 。

例 3(2015 福建) 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x+6, & x \leq 2 \\ 3+\log_a x, & x > 2 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的值域是 $[4, +\infty)$,

则实数 a 的取值范围是_____。

【解析】

因为函数 $f(x) = \begin{cases} -x+6, & x \leq 2 \\ 3+\log_a x, & x > 2 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 所以当 $x \in (-\infty, 2]$ 时, $f(x) = 6 - x \geq 4$ 。

又函数 $f(x)$ 的值域为 $[4, +\infty)$, 所以当 $x > 2$ 时, $f(x) = 3 + \log_a x \geq 4$, 所以 $\begin{cases} a > 1 \\ 3 + \log_a 2 \geq 4 \end{cases}$, 解得 $1 < a \leq 2$ 。

综上,实数 a 的取值范围为 $(1, 2]$ 。

▶ 简要评注

当 $x > 2$ 时, $f(x) \geq 4$, 因此 $f(x) = 3 + \log_a x$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, $3 + \log_a 2 \geq 4$ 成立,借助网络画板,易于理解。

动感体验



编号: 174104



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.2.6、图 2.2.7 所示, 红色实线为函数 $f(x) = \begin{cases} -x+6, & x \leq 2 \\ 3+\log_a x, & x > 2 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像, 拖动变量 a 的滑杆可以改变实数 a 的值, 观察函数

值域变化, 理解当 $x > 2$ 时, $f(x) \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 3+\log_a 2 \geq 4 \end{cases}$ 。

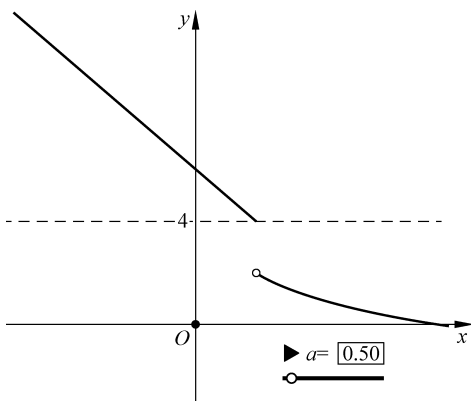


图 2.2.6

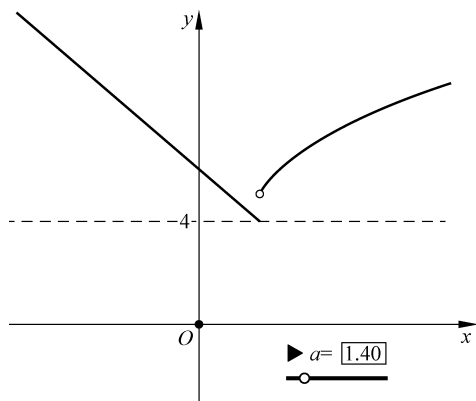


图 2.2.7

练习 1 函数 $y = \lg\left(x^2 + kx + \frac{5}{4}\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则实数 k 的取值范围是_____。

编号: 175007

答案: $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

练习 2 函数 $y = \sqrt{kx^2 - 6x + k + 8}$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 k 的取值范围为_____。

编号: 174937

答案: $[0, 1]$

练习 3 已知函数 $f(x) = \frac{4}{|x|+2} - 1$ 的定义域为 $[a, b]$, 其中 $a, b \in \mathbf{Z}$ 且 $a < b$, 若函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$, 则满足条件的整数对 (a, b) 的个数为_____。

编号: 175009



答案: 5



2.3 函数的单调性

例 1 若函数 $f(x) = |2x + a|$ 在区间 $[3, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是_____。

【解析】

因为 $f(x) = |2x + a| = \begin{cases} -2x - a, & x \leq -\frac{a}{2} \\ 2x + a, & x > -\frac{a}{2} \end{cases}$, 所以 $f(x) = |2x + a|$ 在 $(-\infty, -\frac{a}{2}]$ 上

单调递减, 在 $[-\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 又函数 $f(x) = |2x + a|$ 在区间 $[3, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $-\frac{a}{2} \leq 3$, 解得 $a \geq -6$ 。

简要评注

函数 $f(x) = |2x + a|$ 在区间 $[3, +\infty)$ 上单调递增, 即 $[3, +\infty)$ 是 $f(x)$ 单调递增区间的子区间, 通过画出函数的大致图像, 可以更迅速、更直接地得到结果。

动感体验

编号: 174115



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.3.1、图 2.3.2 所示, 红色实线为函数 $f(x) = |2x + a|$ 的图像, 拖动变量 a 的滑杆可以改变实数 a 的值, 观察函数图像变化, 探究 $f(x) = |2x + a|$ 在区间 $[3, +\infty)$ 上单调递增的条件。

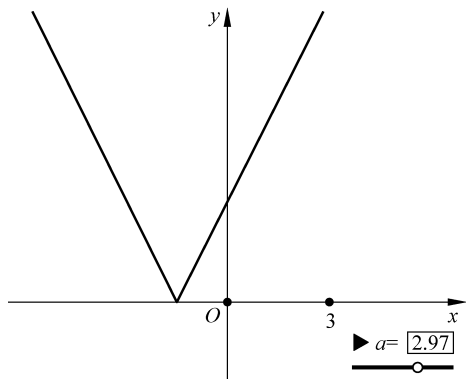


图 2.3.1

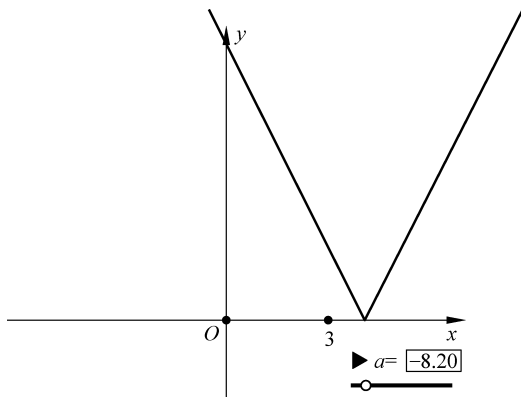


图 2.3.2

例 2 已知函数 $y = \log_a(1 - ax)$ ($a > 0, a \neq 1$) 在定义域 $(1, 2)$ 上为增函数, 则 a 的取值范围是()。

A. $(0, \frac{1}{2})$

B. $(0, 1)$

C. $(0, \frac{1}{2}]$

D. $(1, 2)$

【解析】

由题意, 根据对数的性质: $a > 0$ 且 $1 - ax > 0$ 在 $x \in (1, 2)$ 上恒成立, 因为函数 $f(x) = 1 - ax$ 在 $(1, 2)$ 上是减函数, 而函数 $y = \log_a(1 - ax)$ 在 $(1, 2)$ 上为增函数, 所以 $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 1 - 2a \geq 0 \end{cases}$, 解得 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 。

所以 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2}]$, 故选 C。

▶ 简要评注

判断复合函数单调性首先要求函数的定义域, 其次研究内外层函数的单调性, 最后根据内外层函数单调性确定原函数的单调性。判断方法: 同增异减, 内外兼顾。

编号: 175058



动感体验

扫描二维码, 打开课件, 如图 2.3.3、图 2.3.4 所示, 红色实线、蓝色实线分别为函数 $g(x) = 1 - ax$ ($1 < x < 2$), $f(x) = \log_a(1 - ax)$ ($1 < x < 2$) 的图像, 粉色虚线为直线 $x = 2$ 。拖动变量 a 的滑杆可以改变实数 a 的值, 观察函数 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的单调性关系, 探究函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增的条件。

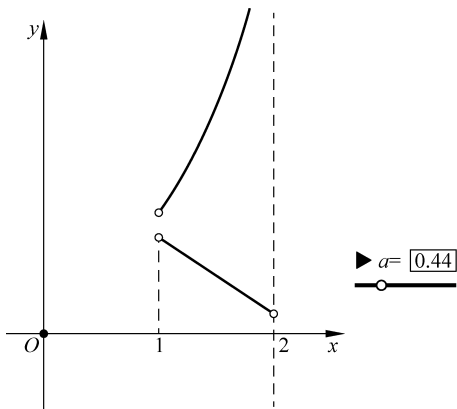


图 2.3.3

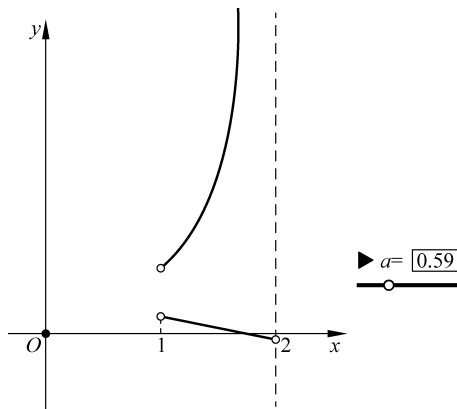


图 2.3.4

例 3 (2018 新课标全国) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, 则满足 $f(x+1) < f(2x)$ 的 x 的取值范围是()。

A. $(-\infty, -1)$

B. $(0, +\infty)$

C. $(-1, 0)$

D. $(-\infty, 0)$

【解析】

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, $f(0)=1$, 当 $x>0$ 时, $f(x)=1$, 因为 $f(x+1)<f(2x)$, 所以 $\begin{cases} f(2x)>1 \\ x+1>2x \end{cases}$, 解得 $x<0$ 。

故选 D。

> 简要评注

问题看似简单, 却考查了对函数单调性概念的理解和掌握, 很多学生认为函数是单调递减的, 不等式可转化为 $x+1>2x$ 得出错解, 问题就出在单调性一定是要指明区间的, 这个借助网络画板更易理解。

动感体验

编号: 176831



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.3.5、图 2.3.6 所示, 紫色实线为函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ 的图像, 拖动变量 x 的滑杆或 x 轴上的红色点可以改变实数 x 的值, 观察函数 $f(x+1)$, $f(2x)$ 的大小关系, 体会 $f(x+1)<f(2x)$ 的条件。

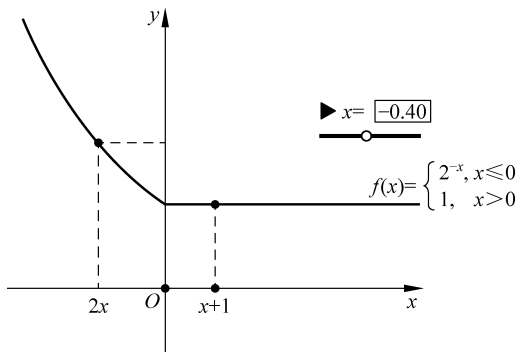


图 2.3.5

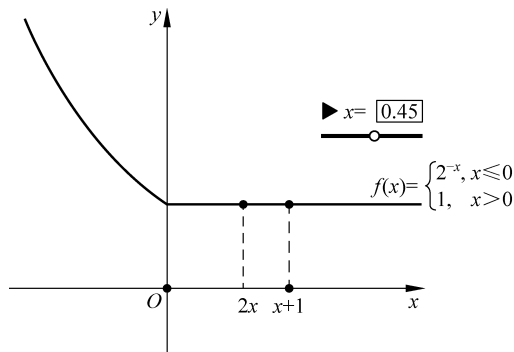


图 2.3.6

例 4(2007 天津) 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$, 且对于任意的 $x \in [t, t+2]$, 不等式

$f(x+t) \geq 2f(x)$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围。

【解析】

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2$; 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, 故函数 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上为增函数。

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2$, $2f(x) = 2x^2 = f(\sqrt{2}x)$ 。

当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x^2$, $2f(x) = -2x^2 = f(\sqrt{2}x)$, 则 $2f(x) = f(\sqrt{2}x)$ 。

$f(x+t) \geq 2f(x)$ 对 $x \in [t, t+2]$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x+t) \geq f(\sqrt{2}x)$ 对 $x \in [t, t+2]$ 恒成立, 即 $x+t \geq \sqrt{2}x$ 对 $x \in [t, t+2]$ 恒成立, $(\sqrt{2}-1)x \leq t$ 对 $x \in [t, t+2]$ 恒成立 $\Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)(t+2) \leq t$, 解得 $t \in [\sqrt{2}, +\infty)$ 。

简要评注

1. 解题的关键在于根据具体函数抽象化方法, 利用其性质将抽象不等式变形为函数两对应变量的大小关系, 否则就需要先讨论、再代入具体函数的繁琐的计算。

2. $(\sqrt{2}-1)x \leq t$ 对 $x \in [t, t+2]$ 恒成立 $\Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)(t+2) \leq t$ 可借助网络画板的动态演示加以理解。

动感体验

编号: 176841



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.3.7、图 2.3.8 所示, 红色实线为函数 $y = (\sqrt{2}-1)x - t$ 的图像, $x \in [t, t+2]$ 的图像, 拖动变量 t 的滑杆或 x 轴上的红色点可以改变实数 t 的值, 观察并研究红色实线在 x 轴下方的条件。

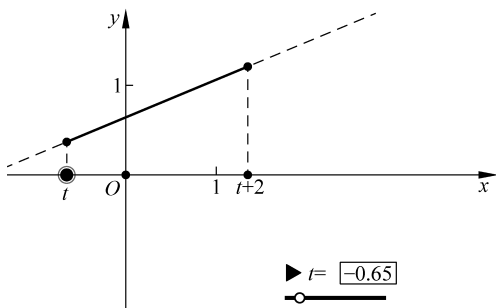


图 2.3.7

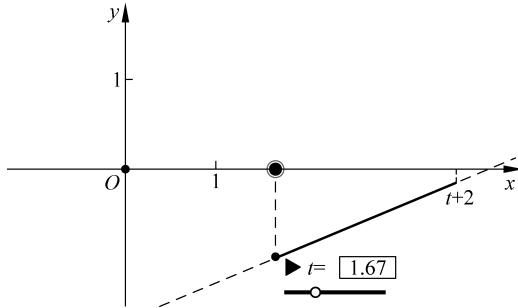


图 2.3.8

例 5 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 且 $y = f(x-2)$ 的图像关于点 $(2, 0)$ 成中心对称, 若 u, v 满足不等式组 $\begin{cases} f(u) + f(v-1) \leq 0 \\ f(u-v-1) \geq 0 \end{cases}$, 则 $u^2 + v^2$ 的最小值为_____。

【解析】

因为 $y = f(x-2)$ 的图像关于点 $(2, 0)$ 成中心对称, 所以 $y = f(x)$ 的图像关于点 $(0, 0)$ 成中心对称, 即函数 $f(x)$ 是奇函数, 则不等式组 $\begin{cases} f(u) + f(v-1) \leq 0 \\ f(u-v-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(u) \leq f(1-v) \\ f(u-v-1) \geq 0 \end{cases}$,

因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 所以 $\begin{cases} u \geq 1-v \\ u-v-1 \leq 0 \end{cases}$ 。

可作出不等式组对应的平面区域,则 u^2+v^2 的几何意义为区域内的点到原点距离的平方,由图像知原点到直线 $u=1-v$ 的距离最小,此时 $d=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,故 u^2+v^2 的最小值为 $d^2=\frac{1}{2}$ 。

简要评注

1. $y=f(x-a)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 成中心对称 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图像关于点 $(0,0)$ 成中心对称。
2. $y=f(x-a)$ 的图像关于直线 $x=a$ 轴对称 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图像关于直线 y 轴对称。
3. 利用函数奇偶性和单调性,将原不等式组转化为 u, v 间的关系,利用 u^2+v^2 的几何意义,即利用点 (u, v) 到原点距离的平方是解决问题的关键。

动感体验

编号: 175054



扫描二维码,打开课件,如图 2.3.9、图 2.3.10 所示,粉色区域为不等式组 $\begin{cases} u \geq 1-v \\ u-v-1 \leq 0 \end{cases}$ 对应的平面区域,则 $u^2+v^2=|OQ|^2$,拖动点 Q ,观察 $|OQ|$ 长度的变化,理解 u^2+v^2 取得最小值的条件。

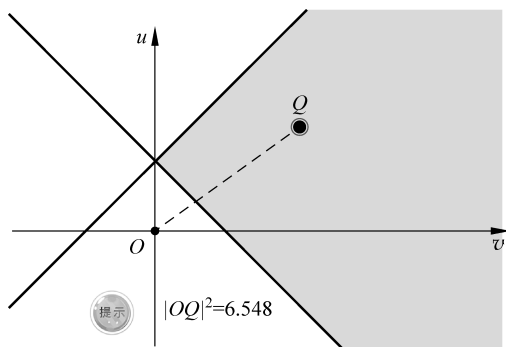


图 2.3.9

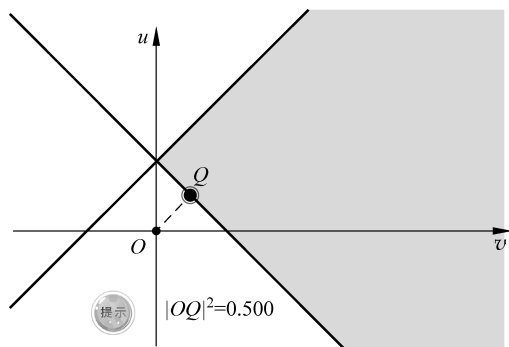


图 2.3.10

练习 1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x < 0 \\ (a-3)x+4a, & x \geq 0 \end{cases}$ 满足对任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围是()。

- A. $(0, 1]$ B. $(0, \frac{1}{4}]$ C. $(0, 3]$ D. $(0, \frac{1}{4})$

编号: 175016



答案: B

练习 2 已知函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - ax + 3a}$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是_____。

编号: 175063



答案: $[-4, 4]$

练习 3 已知在关于 x 的不等式 $\log_a(x^2 - 4) > \log_a(6x - 13a)$ ($0 < a < 1$) 的解集中, 有且只有两个整数解, 则实数 a 的取值范围是_____。

编号: 175057



答案: $\left[\frac{9}{13}, \frac{12}{13}\right)$

2.4 函数的奇偶性与对称性

例 1 设函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1}$ 的最大值为 M , 最小值是 m , 则 $M + m =$ _____。

【解析】

原函数解析式可化为 $f(x) = 1 + \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$ 。

令 $g(x) = \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$, 则 $g(x)$ 为奇函数且 $f(x) = 1 + g(x)$, 因为 $f(x)$ 最大值为 M , 最小值是 m , 所以函数 $g(x)$ 有最大值和最小值且 $M = 1 + g(x)_{\max}$, $m = 1 + g(x)_{\min}$ 。

因为 $g(x)$ 为奇函数, 所以 $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 0$, 故 $M + m = 2$ 。

简要评注

奇函数的图像关于原点对称, 则它们的最大值点和最小值点也关于原点对称, 即最大值与最小值互为相反数。因此上述题型解题方向就是设法将函数解析式进行分解, 尽量分离成一个奇函数和常数或者具有单调性的函数的总和。

动感体验



编号: 175064



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.4.1 所示, 红色实线为函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1}$ 的图像, 观察函数图像的最高点与最低点间的关系。拖动 $f(x)$ 图像上的点 M , 观察点 M 关于点 $(0, 1)$ 的对称点 N 与函数 $f(x)$ 图像的关系, 理解函数图像关于点 $(0, 1)$ 成中心对称。

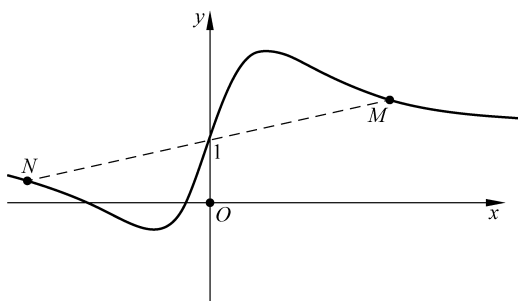


图 2.4.1

例 2(2016 新课标全国) 已知函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 若函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 图像的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) =$ ().

A. 0

B. m C. $2m$ D. $4m$ **【解析】**

因为函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 图像关于点 $(0, 1)$ 中心对称。例如 $f(x) = \sin 2x + 1$ 就满足上述要求。

因为 $y = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, 函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 的图像是由函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像向上平移 1 个单位得到, 所以函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 的图像关于点 $(0, 1)$ 对称, 函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 图像的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ 两两关于点 $(0, 1)$ 对称, 故对于每一组对称点 $x_i + x'_i = 0$, $y_i + y'_i = 2$, 即 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m y_i = 0 + 2 \cdot \frac{m}{2} = m$, 故选 B。

▶ 简要评注

1. 函数 $f(x)$ 满足 $f(a-x) = b - f(x)$, 则 $f(x)$ 图像关于点 $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ 对称。

2. 函数 $f(x)$ 满足 $f(a-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 图像关于直线 $x = \frac{a}{2}$ 对称。

动感体验

编号: 174094



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.4.2 所示, 红色、粉色实线分别为函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = \sin 2x + 1$ 的图像, 点击按钮“提示”, 如图 2.4.3 所示, 拖动点 P 在两函数图像上运动, 观察点 Q 的位置特征, 体会两个函数图像的对称性。

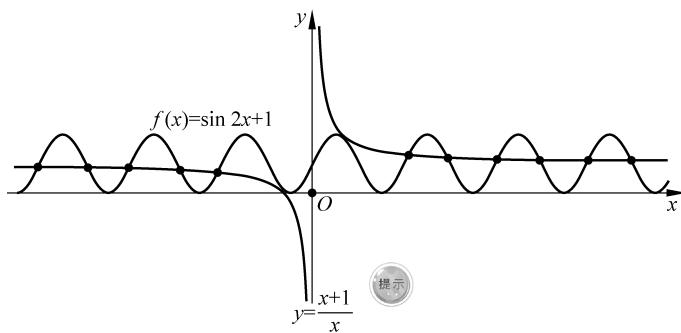


图 2.4.2

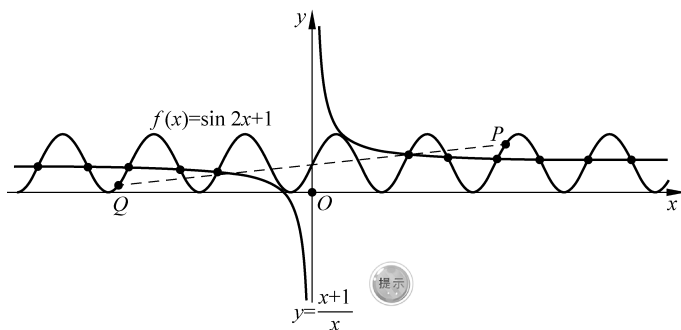


图 2.4.3

例 3 函数 $f(x) = (x-3)^3 + x - 1$, 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列, $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_7) = 14$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_7 =$ _____。

【解析】

$$f'(x) = 3(x-3)^2 + 1, f''(x) = 6(x-3).$$

由 $f''(x) = 0$ 得 $x = 3$, $f(3) = 2$, 则函数 $f(x)$ 的图像关于 $(3, 2)$ 对称, 令 $g(x) = f(x) - 2 = (x-3)^3 + (x-3)$, 则 $g(x)$ 图像关于 $(3, 0)$ 对称。

因为 $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_7) = 14$, 所以 $f(a_1) - 2 + f(a_2) - 2 + \cdots + f(a_7) - 2 = 0$, 即 $g(a_1) + g(a_2) + \cdots + g(a_7) = 0$ 。

因为 $g(x)$ 图像上的点 $(a_1, g(a_1)), (a_2, g(a_2)), \dots, (a_7, g(a_7))$ 关于 $(3, 0)$ 成中心对称, 所以 $a_4 = 3$, 故 $a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 7a_4 = 21$ 。

➤ 简要评注

1. $g(x)$ 图像关于 $(b, 0)$ 成中心对称, $g(a_1) + g(a_2) + \cdots + g(a_n) = 0$, 即 $g(x)$ 图像上 n 个点的纵坐标之和为 0, 说明它们是关于 $(b, 0)$ 中心对称的 n 个点, 它们的横坐标之和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = nb$ 。

2. 三次函数对称中心横坐标即为其二阶导函数的零点, 这个结论可以在一些客观题中直接使用。任何一个三次函数都有“拐点”, 任何一个三次函数都有对称中心, 且“拐点”就是对称中心。

动感体验



编号：175076



扫描二维码,打开课件,如图 2.4.4、图 2.4.5 所示,黑色,红色实线分别为函数 $y = (x-3)^3 + x - 1$ 与其二阶导函数 $y = 6(x-3)$ 的图像,拖动点 M ,观察点 M 关于点 $Q(3, 2)$ 的对称点 N 与函数 $y = (x-3)^3 + x - 1$ 图像的关系,体会三次函数的“拐点”就是其对称中心。

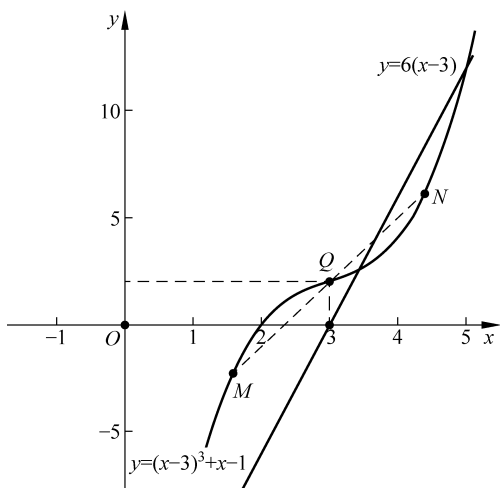


图 2.4.4

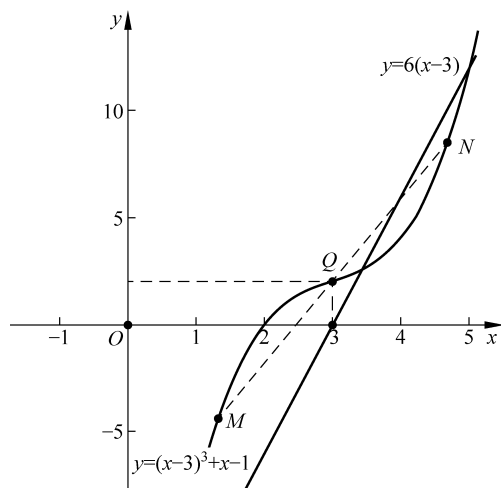


图 2.4.5

例 4 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若对于 $x_1, x_2 \in D$, 且 $x_1 + x_2 = a$, 恒有 $f(x_1) + f(x_2) = 2b$, 对称点 (a, b) 是函数 $y = f(x)$ 的对称中心。若 $f(x) = x^3 - 3x^2 - \sin \pi x$, 求 $f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2}{2012}\right) + \cdots + f\left(\frac{4022}{2012}\right) + f\left(\frac{4023}{2012}\right)$ 的值。

【解析】

设 $g(x) = x^3 - 3x^2$, 则 $g'(x) = 3x^2 - 6x$, $g''(x) = 6x - 6$, $g(1) = -2$, 可得 $g(x)$ 图像关于 $(1, -2)$ 对称。

设 $h(x) = -\sin \pi x$, 已知 $h(x)$ 的一个对称中心是 $(1, 0)$, 故 $f(x) = g(x) + h(x)$ 的对称中心为 $(1, -2)$ 。

则 $f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{4023}{2012}\right) = f\left(\frac{2}{2012}\right) + f\left(\frac{4022}{2012}\right) = \cdots = f(x_1) + f(2 - x_1) = -4$, 故 $f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2}{2012}\right) + \cdots + f\left(\frac{4022}{2012}\right) + f\left(\frac{4023}{2012}\right) = -8046$ 。

简要评注

从函数式首先想到的一般是代数形式, 而系列点的对称才是对称性问题的本质, 特殊的点关于对称的图像特征是我们破解函数对称性问题优先的思考方向。

编号: 176822



动感体验



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.4.6、图 2.4.7 所示, 黑色实线为函数 $y = x^3 - 3x^2 - \sin \pi x$ 的图像, 拖动点 M , 观察点 M 关于点 $Q(1, -2)$ 的对称点 N 与函数 $y = x^3 - 3x^2 - \sin \pi x$ 图像的关系, 体会函数 $y = x^3 - 3x^2 - \sin \pi x$ 图像的对称性。

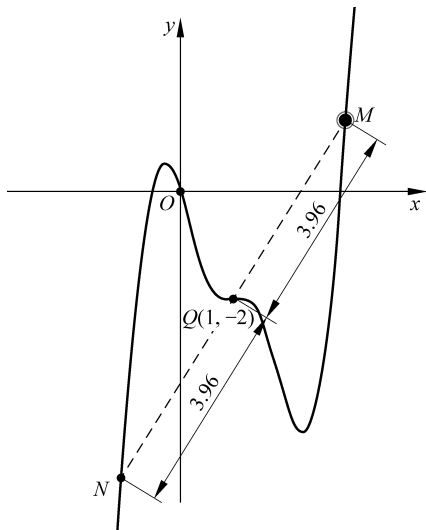


图 2.4.6

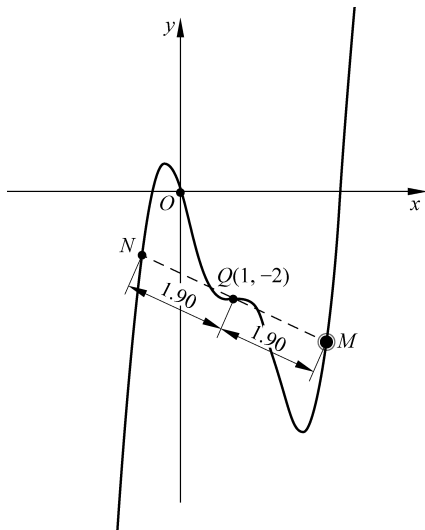


图 2.4.7

例 5 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 且函数 $y = f(x-1)$ 的图像关于 $(1, 0)$ 成中心对称, 若 s, t 满足不等式 $f(s^2 - 2s) \leq -f(2t - t^2)$, 则当 $1 \leq s \leq 4$ 时, $\frac{t-2s}{s+t}$ 的取值范围是()。

- A. $\left[-3, -\frac{1}{2}\right]$ B. $\left[-3, -\frac{1}{2}\right)$ C. $\left[-5, -\frac{1}{2}\right)$ D. $\left[-5, -\frac{1}{2}\right]$

【解析】

由 $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 可得函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 又函数 $y = f(x-1)$ 的图像关于 $(1, 0)$ 成中心对称, $y = f(x)$ 的图像关于 $(0, 0)$ 成中心对称, 所以 $f(x)$ 是奇函数。

因为 s, t 满足不等式 $f(s^2 - 2s) \leq -f(2t - t^2)$, 所以 $s^2 - 2s \geq t^2 - 2t$, 又 $1 \leq s \leq 4$, 所以

$$\begin{cases} (s-t)(s+t-2) \geq 0 \\ 1 \leq s \leq 4 \end{cases}, \text{ 则 } \frac{t-2s}{s+t} = \frac{\frac{t}{s} - 2}{1 + \frac{t}{s}} = 1 - \frac{3}{1 + \frac{t}{s}}.$$

得不等式组 $\begin{cases} (s-t)(s+t-2) \geq 0 \\ 1 \leq s \leq 4 \end{cases}$ 表示的平面区域, 易求得 $\frac{t}{s} \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, 所以

$$\frac{t-2s}{s+t} \in \left[-5, -\frac{1}{2}\right].$$

故选 D.

简要评注

1. 本题是函数单调性与奇偶性综合问题, 解决的关键是将不等式 $f(s^2-2s) \leq -f(2t-t^2)$ 转化为 $s^2-2s \geq t^2-2t$.

2. 由 $\begin{cases} (s-t)(s+t-2) \geq 0 \\ 1 \leq s \leq 4 \end{cases}$ 求 $\frac{t}{s}$, 利用 $\begin{cases} (s-t)(s+t-2) \geq 0 \\ 1 \leq s \leq 4 \end{cases}$ 表示平面区域 $\frac{t}{s}$ 的几何意义, 既方便又快捷.

动感体验

编号: 176902



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.4.8~图 2.4.10 所示, 粉红色区域表示为不等式组

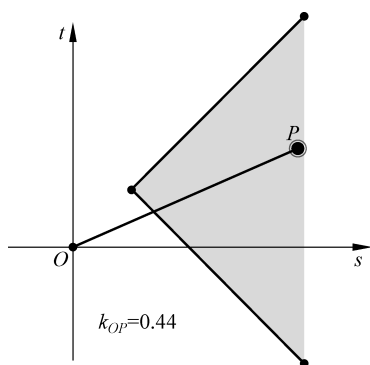


图 2.4.8

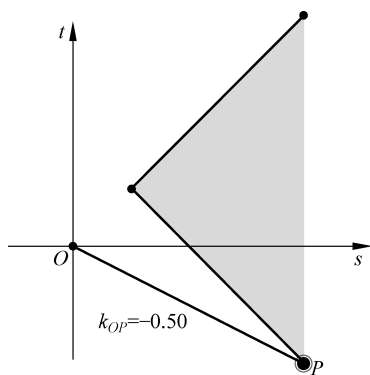


图 2.4.9

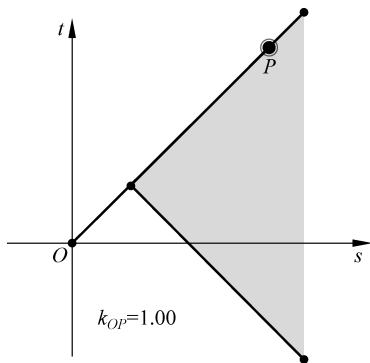


图 2.4.10

$\begin{cases} (s-t)(s+t-2) \geq 0 \\ 1 \leq s \leq 4 \end{cases}$ 表示的平面区域, 点 $P(s, t)$ 为这个区域内一点; $\frac{t}{s}$ 的几何意义即为粉

红色区域内的点与原点连线的斜率, 拖动点 P , 观察并研究 OP 斜率的取值范围。

例 6 函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ -\sqrt{-x}, & x \leq 0 \end{cases}$ 与 $g(x) = |x+a|+1$ 的图像上存在关于 y 轴对称的点, 求实数 a 的取值范围。

【解析】

设 $y=h(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 则 $h(x)=f(-x)=\begin{cases} \ln(-x), & x < 0 \\ -\sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$,

作出 $y=h(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图像。

因为 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图像上存在关于 y 轴对称的点, 所以 $y=h(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图像有交点, $g(x)=|x+a|+1 \geq 1$, 当且仅当 $x=-a$ 时取等号, 当 $x \geq 0$ 时, $h(x) \leq 0$, $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减。

当 $x=-a$ 时, $h(-a) \geq 1$, 即 $\ln a \geq 1$, 解得 $a \geq e$ 。

▶ 简要评注

1. 将图像两个函数存在关于 y 轴的对称点转化为两个函数的交点是解决本题的关键所在, 而这个转化需要将其中一个函数图像进行对称变换。

2. 借助网络画板动态演示 $h(x)$ 的图像可进一步理解 $y=h(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图像有交点的条件。

动感体验

编号: 173692



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.4.11、图 2.4.12 所示, 黑色实线、红色实线分别为函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ -\sqrt{-x}, & x \leq 0 \end{cases}$ 与 $g(x) = |x+a|+1$ 的图像, 点击“对称”按钮, 将函数 $f(x)$ 图

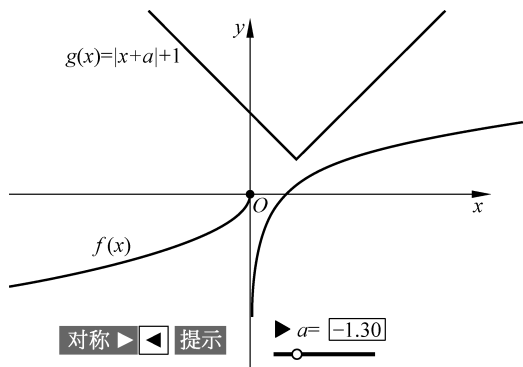


图 2.4.11

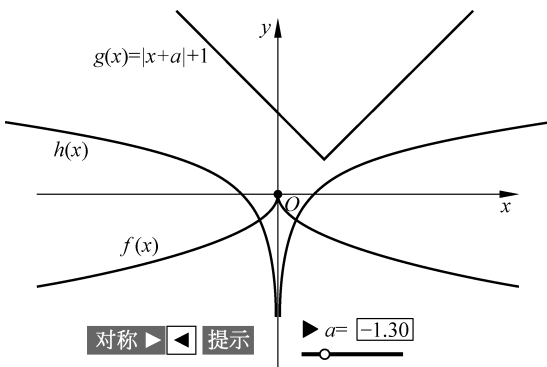


图 2.4.12

像关于 y 轴对称得到函数 $h(x)$ 的图像。

点击按钮“提示”，如图 2.4.13、图 2.4.14 所示，粉色虚线为直线 $y=1$ ，拖动变量 a 的滑杆可以改变实数 a 的值，观察函数 $h(x)$ 与 $g(x)$ 的图像与直线 $y=1$ 间的关系，考察函数 $h(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有交点的条件，探究有交点时函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像上是否存在关于 y 轴对称的点，体会函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像上存在关于 y 轴对称的点等价于函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 图像有交点。

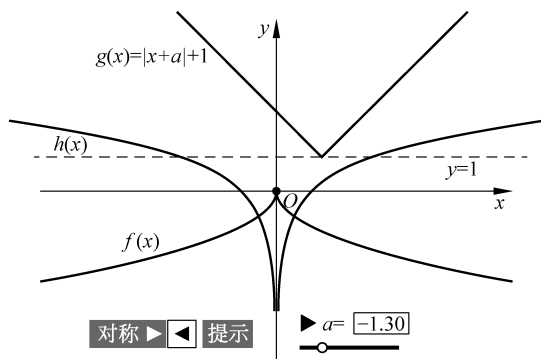


图 2.4.13

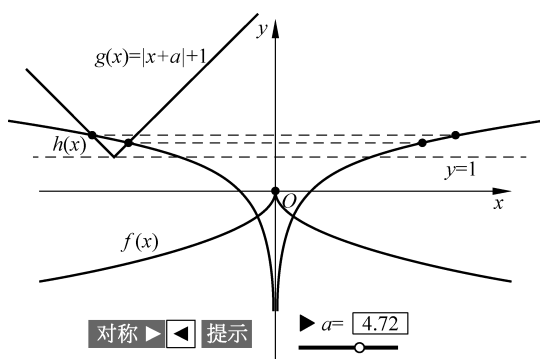


图 2.4.14

例 7 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1, & x \leq 0 \\ \log_a x (a > 0, a \neq 1), & x > 0 \end{cases}$ 的图像上关于 y 轴对称的点至少

有 3 对，则实数 a 的取值范围是()。

- A. $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ B. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)$ C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ D. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

【解析】

若 $x \geq 0$ ，则 $-x \leq 0$ ，因为 $x \leq 0$ 时， $f(x) = y = \sin \frac{\pi}{2}x - 1$ ，所以 $f(-x) = y = \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) - 1 = -\sin \frac{\pi}{2}x - 1$ 。

又 $f(x) = y = \sin \frac{\pi}{2}x - 1$ 图像关于 y 轴对称的函数为 $g(x) = -\sin \frac{\pi}{2}x - 1$ ，根据题意，函数图像上关于 y 轴对称的点至少有 3 对，等价于函数 $g(x) = -\sin \frac{\pi}{2}x - 1 (x \geq 0)$ 与 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1) (x > 0)$ 至少有 3 个交点。

如图 2.4.13 所示，显然 $a > 1$ 时，只有一个交点，当 $0 < a < 1$ 时， $g(5) < f(5)$ ，即 $\log_a 5 > -2$ ，解得 $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

简要评注

本题解决的关键是将函数图像上关于 y 轴对称的点至少有 3 对，等价转化为函数 $y =$

$-\sin \frac{\pi}{2}x - 1 (x > 0)$ 与 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1) (x > 0)$ 至少有 3 个交点。

动感体验

编号: 176912



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.4.15 所示, 黑色实线为是函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2}x - 1, & x \leq 0 \\ \log_a x (a > 0, a \neq 1), & x > 0 \end{cases}$ 的图像。

点击按钮“对称”, 如图 2.4.16 所示, 蓝色实线为 $y = \sin \frac{\pi}{2}x - 1 (x \leq 0)$ 的图像关于 y 轴对称的函数为 $y = -\sin \frac{\pi}{2}x - 1 (x \geq 0)$ 的图像。

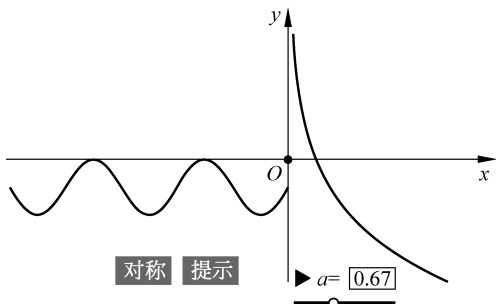


图 2.4.15

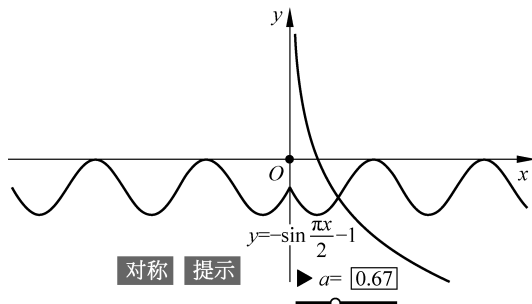


图 2.4.16

点击按钮“提示”, 如图 2.4.17 所示, 红色实线为函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1) (x > 0)$ 的图像, 拖动变量 a 的滑杆改变实数 a 的值, 如图 2.4.18 所示, 观察函数 $y = \log_a x$ 与 $y = -\sin \frac{\pi}{2}x - 1 (x \geq 0)$ 图像的交点关于 y 轴的对称点与函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2}x - 1, & x \leq 0 \\ \log_a x (a > 0, a \neq 1), & x > 0 \end{cases}$ 的

图像的关系, 探究函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2}x - 1, & x \leq 0 \\ \log_a x (a > 0, a \neq 1), & x > 0 \end{cases}$ 的

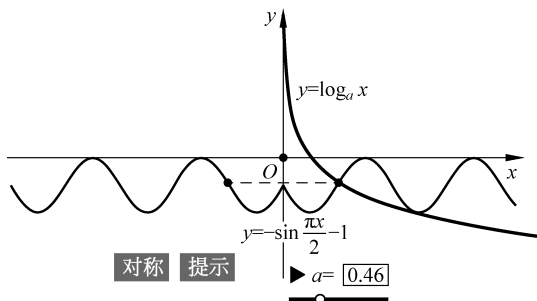


图 2.4.17

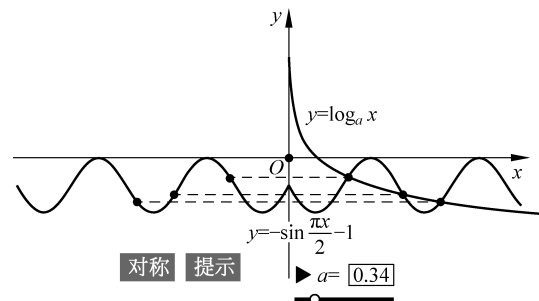


图 2.4.18

图像上关于 y 轴对称的点至少有 3 对的条件。

练习 1 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2^x+1} - \frac{x}{x^2+1}$ 的最大值是 M , 最小值是 m , 则 $M+m =$ _____。

编号: 173534

答案: 1

练习 2 若 $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{12} + \cos\left(x - \frac{\pi+1}{2}\right)$, 则 $g\left(\frac{1}{2017}\right) + g\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + g\left(\frac{2016}{2017}\right) =$ _____。

编号: 175077

答案: 2016



2.5 函数的周期性

例 1(2018 新课标全国) 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$, 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + \dots + f(50) =$ ()。

A. -50

B. 0

C. 2

D. 50

【解析】

因为 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 且满足 $f(1-x) = f(1+x)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数且 $f(1) = 2$ 。

不妨设 $f(x) = 2\sin \frac{\pi}{2}x$, 则 $f(1) + f(2) + \dots + f(50) = 12[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] + f(49) + f(50) = 12 \times 0 + f(1) + f(2) = 2$ 。

故选 C。

简要评注

1. 奇函数 $f(x)$ 满足 $f(a-x) = f(a+x)$, 则 $f(x)$ 是周期为 $4a$ 的周期函数。
2. 偶函数 $f(x)$ 满足 $f(a-x) = f(a+x)$, 则 $f(x)$ 是周期为 $2a$ 的周期函数。

编号: 174086

动感体验

扫描二维码, 打开课件, 如图 2.5.1 所示, 红色实线为函数 $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 的图像, 拖动变量 a 的滑杆改变实数 a 的值, 如图 2.5.2 所示, 观察 $f(a)$ 的值的变化的变化, 探究 $f(a)$ ($a \in \mathbb{N}^*$)

的取值规律。

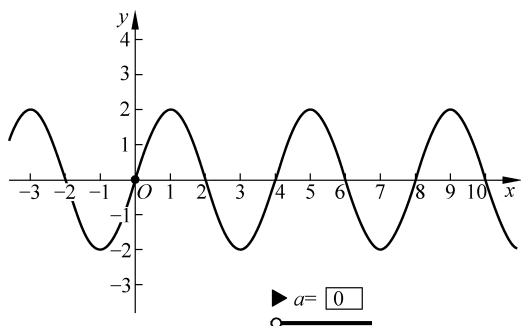


图 2.5.1

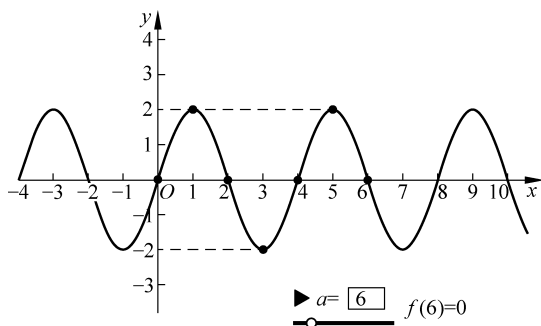


图 2.5.2

例 2(2017 江苏) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 1 的函数, 在区间 $[0, 1)$ 上, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in D \\ x, & x \notin D \end{cases}$, 其中集合 $D = \left\{ x \mid x = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbf{N}^* \right\}$, 则方程 $f(x) - \lg x = 0$ 的解的个数是_____。

【解析】

因为 $f(x) \in [0, 1)$, 方程 $f(x) - \lg x = 0$ 有解, 所以只需考虑 $\lg x \in [0, 1)$, 即 $1 \leq x < 10$ 的情况, 在此范围内, 当 $x \in \mathbf{Q}$ 时, 设 $x = \frac{q}{p}$, $p, q \in \mathbf{N}^*$, $p \geq 2$ 且 p, q 互质, 若 $\lg x \in \mathbf{Q}$, 则由 $\lg x \in (0, 1)$, 可设 $\lg x = \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbf{N}^*$, $m \geq 2$ 且 m, n 互质, 因此 $10^{\frac{n}{m}} = \frac{q}{p}$, 则 $10^n = \left(\frac{q}{p}\right)^m$, 此时左边为整数, 右边为非整数, 矛盾, 因此 $\lg x \notin \mathbf{Q}$, $\lg x$ 不可能与每个周期内 $x \in D$ 对应的部分相等, 只需考虑 $\lg x$ 与每个周期 $x \notin D$ 的部分的交点。

画出函数图像, 图中交点除 $(1, 0)$ 外其他交点横坐标均为无理数, 属于每个周期 $x \notin D$ 的部分, 且 $x=1$ 处 $(\lg x)' = \frac{1}{x \lg e}$, 则在 $x=1$ 附近仅有一个交点。

因此, 方程 $f(x) - \lg x = 0$ 的解的个数为 8。

▶ 简要评注

本题关键在于将问题转化为 $x \notin D$ 时, 函数 $f(x)$ 的图像与 $y = \lg x$ 的图像交点个数, 借助网络画板动态演示周期函数图像, 更利于理解。

动感体验

编号: 175125



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.5.3、图 2.5.4 所示, 红色实线为函数 $y = \lg x$ 的图像, 黑色实线为函数 $f(x) (x \notin D)$ 的图像。拖动变量 n 的滑杆, 改变 n 的值, 动态展示函数 $f(x) (x \notin D)$ 的图像, 观察两函数图像的位置关系, 探究其交点个数。

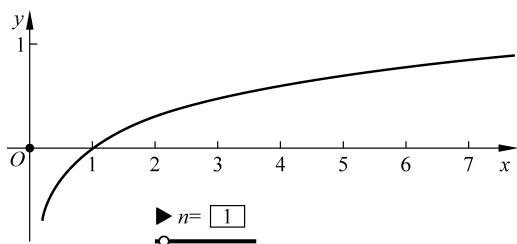


图 2.5.3

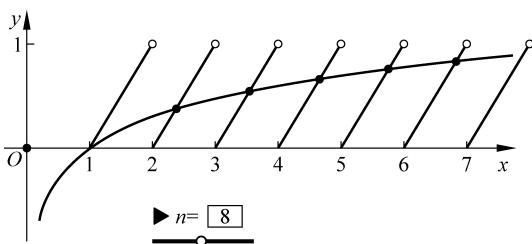


图 2.5.4

练习 1 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [0, 1) \\ 2 - x^2, & x \in [-1, 0) \end{cases}$, 且 $f(x+1) = f(x-1)$, 若 $g(x) = \frac{2x-3}{x-2}$, 则方程 $g(x) = f(x)$ 在区间 $[-1, 5]$ 上所有实根之和为 ()。

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

编号: 175121



答案: C

练习 2 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = -x^3 + 3x$ 且 $f(x-1) = f(x+1)$, 若方程 $f(x) = \log_a(|x|+1)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 恰好有 12 个实根, 则实数 a 的取值范围是 ()。

A. (5, 6)

B. (6, 8)

C. (7, 8)

D. (10, 12)

编号: 175129



答案: B



2.6 分段函数

例 1 (2010 宁夏) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & 0 < x \leq 10 \\ -\frac{1}{2}x + 6, & x > 10 \end{cases}$, 若 a, b, c 互不相等, 且 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 abc 的取值范围是 ()。

A. (1, 10)

B. (5, 6)

C. (10, 12)

D. (20, 24)

【解析】

当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = |\lg x| = -\lg x > 0$; 当 $1 \leq x \leq 10$ 时, $f(x) = |\lg x| \in [0, 1]$; 当 $x > 10$ 时, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 6 < 1$ 。

因为 $f(a) = f(b) = f(c)$, 不妨设 $a < b < c$ 则 $-\lg a = \lg b = -\frac{1}{2}c + 6 \in (0, 1)$, 所以

$ab=1, 0 < -\frac{1}{2}c+6 < 1$, 故 $abc \in (10, 12)$ 。故选 C。

简要评注

本题主要考查分段函数、对数的运算性质以及利用数形结合解决问题的能力。分段函数分段处理, 这是研究分段函数图像和性质最核心的理念。

动感体验

编号: 175252



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.6.1 所示, 红色实线是函数 $f(x)$ 的图像, 绿色虚线是直线 $y=m$, 拖动 y 轴上的红点, 改变实数 m 的值, 观察函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y=m$ 交点, 探究有 3 个交点时, 交点位置及 m 的取值范围。

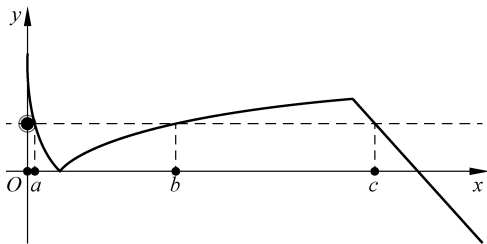


图 2.6.1

例 2 已知函数 $f(x)=x^2-2x-2$, 求 $f(x)$ 在区间 $[t, t+2]$ 上的最小值 $g(t)$ 。

【解析】

当 $t+2 \leq 1$ 即 $t \leq -1$ 时, $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ 上单调递减, 则 $g(t)=f(t+2)=t^2+2t-2$ 。

当 $\begin{cases} t+2 > 1 \\ t < 1 \end{cases}$, 即 $-1 \leq t < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[t, 1]$ 上单调递减, 在 $[1, t+2]$ 上单调递增; 则

$$g(t)=f(1)=-3。$$

当 $t \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ 上单调递增; 则 $g(t)=f(t)=t^2-2t-2$ 。

$$\text{综上所述, } g(t)=\begin{cases} t^2+2t-2, & t \leq -1 \\ -3, & -1 < t < 1 \\ t^2-2t-2, & t \geq 1 \end{cases}$$

简要评注

求 $g(t)$ 的解析式, 实质是求 $f(x)$ 的最小值, 即二次函数的最值问题, 常见题型有三类: 一是求“定轴定区间”的最值; 二是求“定轴动区间”的最值; 三是求“动轴定区间”的最值。求二次函数的最值问题, 数形结合是关键, 注意开口方向和对称轴与所给区间的相对位置关系; 对于“定轴动区间”“动轴定区间”问题, 借助网络画板动态演示函数图像更利于理解和掌握。

动感体验



编号: 142646



扫描二维码,打开课件,如图 2.6.2~图 2.6.4 所示,在课件中黑色虚线为函数 $f(x)=x^2-2x-2$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图像,红色实线为函数 $f(x)=x^2-2x-2$ 在区间 $[t, t+2]$ 上的图像,粉红色虚线为其对称轴,拖动变量 t 的滑杆可以改变实数 t 的值,观察 $f(x)$ 在区间 $[t, t+2]$ 上的单调性及函数取最值的条件。

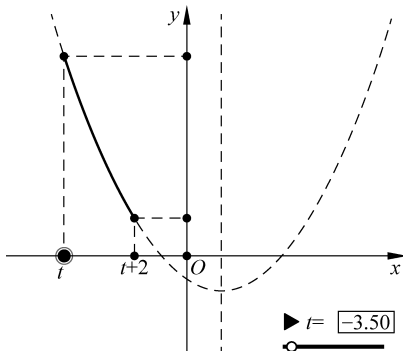


图 2.6.2

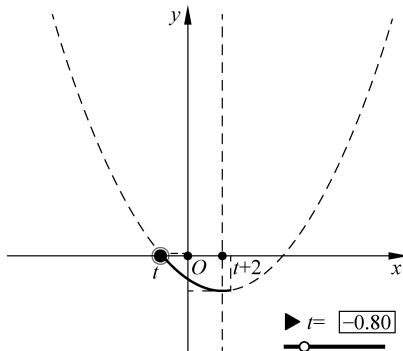


图 2.6.3

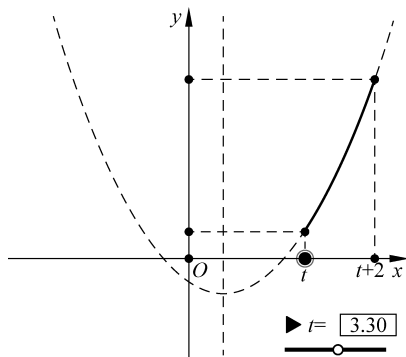


图 2.6.4

例 3(2016 北京) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq a \\ -2x, & x > a \end{cases}$.

- (1) 若 $a=0$, 则 $f(x)$ 的最大值为_____;
- (2) 若 $f(x)$ 无最大值, 则实数 a 的取值范围是_____。

【解析】

(1) 若 $a=0$, 则 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq 0 \\ -2x, & x > 0 \end{cases}$. 当 $x > 0$ 时, $-2x < 0$; 当 $x \leq 0$ 时, $f'(x) =$

$3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0]$ 上单调递减, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的最大值为 $f(-1) = 2$, 综上函数 $f(x)$ 的最大值为 2。

(2) 当 $a < -1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递增, 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减, 因为 $f(x)$ 无最大值, 则 $a^3 - 3a < -2a$, 解得 $a < -1$ 。

当 $-1 < a \leq 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, $(-1, a)$ 上单调递减, 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减, 因为 $f(x)$ 无最大值, 则 $-1 + 3 < -2a$, 无解。

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, $(-1, 1)$ 上单调递减, $(1, a)$ 上单调递增, $[a, +\infty)$ 上单调递减, $f(x)$ 一定存在最大值 $f(1)$ 或 $f(a)$ 。

综上, $a < -1$ 。

简要评注

1. 分段函数是一个函数, 不要把它误认为是几个函数。
2. 分段函数的定义域是各段定义域的并集, 值域是各段值域的并集。
3. 本题利用函数的单调性求解最大值, 易理解, 若借助图形, 数形结合更方便、快捷。

动感体验

编号: 175198



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.6.5、图 2.6.6 所示, 红色实线为函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq a \\ -2x, & x > a \end{cases}$ 的图像, 紫色虚线、蓝色虚线分别是函数 $y = x^3 - 3x$, $y = -2x$ 的图像, 绿色虚线为直线 $x = a$, 拖动变量 a 的滑杆或拖动 x 轴上的红点可以改变实数 a 的值, 考察函数 $f(x)$ 的单调性, 探究其最大值的变化。

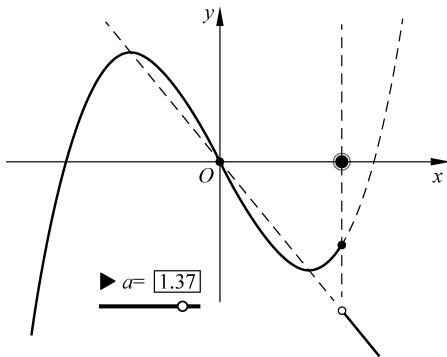


图 2.6.5

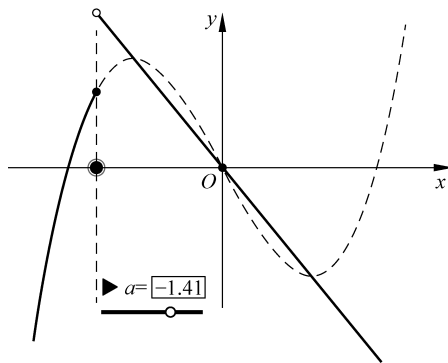


图 2.6.6

例 4 函数 $f(x) = \begin{cases} (1-2a)x + 3a, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 求 a 的取值范围。

【解析】

当 $x \geq 1$ 时, $\ln x \geq 0$ 。

因为函数 $f(x) = \begin{cases} (1-2a)x + 3a, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 所以当 $x < 1$ 时, $f(x) = (1-2a)x +$

$3a$ 必须取遍所有的负数, 即 $\begin{cases} 1-2a > 0 \\ (1-2a)+3a \geq 0 \end{cases}$, 解得 $-1 \leq a < \frac{1}{2}$ 。

▶ 简要评注

解答分段函数的问题时, 画出它的大致图像能够帮助我们准确、高效地解决问题。而画分段函数图形的关键是准确找到相邻两端点的位置。

动感体验

编号: 175203



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.6.7、图 2.6.8 所示, 红色实线为函数 $f(x) = \begin{cases} (1-2a)x+3a, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 的图像, 拖动变量 a 的滑杆可以改变实数 a 的值, 观察 $f(x)$ 的值的变化, 探究函数值域为 $\mathbf{R}$ 的条件。

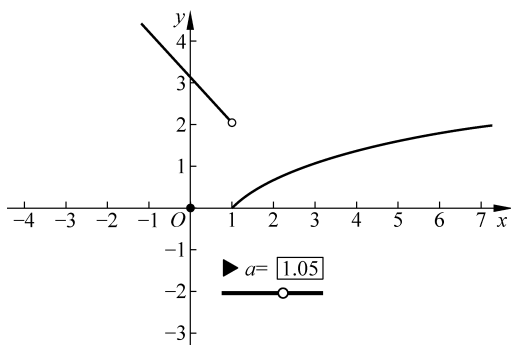


图 2.6.7

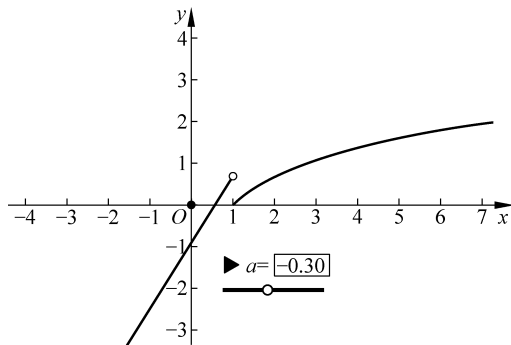


图 2.6.8

例 5 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{2}, & x \in [-1, t] \\ -2(x-1)^2, & x \in (1, a] \end{cases}$, 若存在实数 t 使 $f(x)$ 的值域是

$[-1, 1]$, 求实数 a 的取值范围。

【解析】

由已知得 $t \leq 1$, 函数 $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ 在 $[-1, t]$ 上为增函数, 则当 $x \in [-1, t]$ 时, $f(x) \in \left[-1, \frac{3t+1}{2}\right]$ 。

又函数 $f(x) = -2(x-1)^2$ 在 $(1, a]$ 上为减函数, 则当 $x \in (1, a]$ 时, $f(x) \in [-2(a-1)^2, 0)$ 。

函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{2}, & x \in [-1, t] \\ -2(x-1)^2, & x \in (1, a] \end{cases}$ 的值域为 $[-2(a-1)^2, 0) \cup \left[-1, \frac{3t+1}{2}\right]$ 。

若存在实数 t 使 $f(x)$ 的值域是 $[-1, 1]$, 则 $\frac{3t+1}{2} = 1$, 即 $t = \frac{1}{3}$, 且 $-2(a-1)^2 \geq -1$, 则 $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $a > 1$, 故 $1 < a \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

动感体验



编号: 175208



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.6.9、图 2.6.10 所示, 红色实线为函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{2}, & x \in [-1, t] \\ -2(x-1)^2, & x \in (t, a] \end{cases}$ 的图像, 拖动点 A、点 B 运动或拖动变量 a, t 的滑杆可以改变实数 a, t 的值, 考察 $f(x)$ 的值的变化的, 探究值域为 $[-1, 1]$ 的条件。

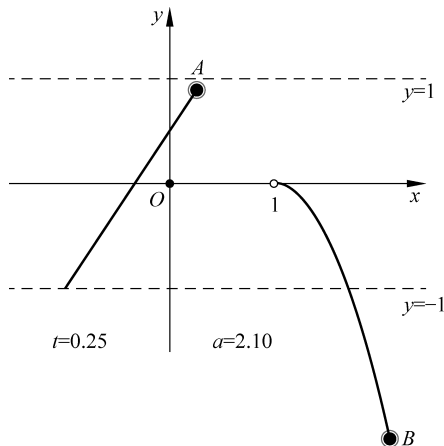


图 2.6.9

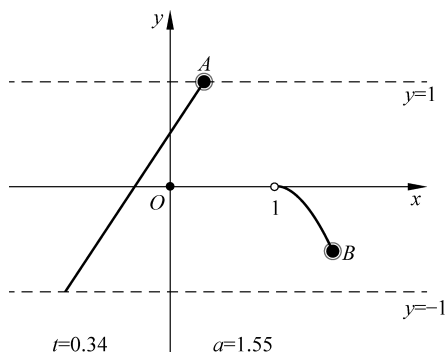


图 2.6.10

例 6 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a-3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 求 a

的取值范围。

【解析】

因为函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a-3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以

$$\begin{cases} -\frac{4a-3}{2} \geq 0 \\ 0 < a < 1 \\ 3a \geq 1 \end{cases}, \text{解得 } \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{4}.$$

简要评注

1. 这是一个分段函数，一段是对数函数的一部分，一段是二次函数的一部分，根据函数单调性的概念，不仅应该考虑这个函数两部分各自是减函数，还应该考虑在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上满足减函数的条件。

2. 通常情况下，两个单调增区间或者两个单调减区间是不能合并在一起的，因而 $f(x)$ 若在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数，则必须从整体上考虑。

3. 根据函数单调性的概念确定分段函数每一段应满足的条件，还应该考虑分段函数两段之间的关系，可借助图形，数形结合便于理解。

动感体验

编号：173668



扫描二维码，打开课件，如图 2.6.11~图 2.6.13 所示，红色实线为函数 $f(x)$ 的图像，拖动变量 a 的滑杆可以改变实数 a 的值，从而改变函数的性质，观察和研究满足题设条件的情况，特别注意两段间的关系。

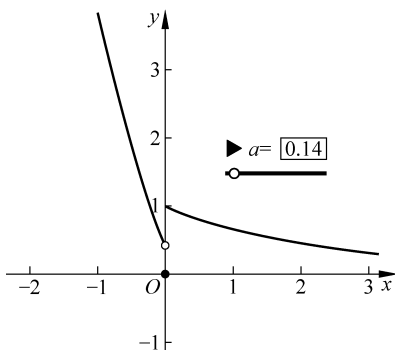


图 2.6.11

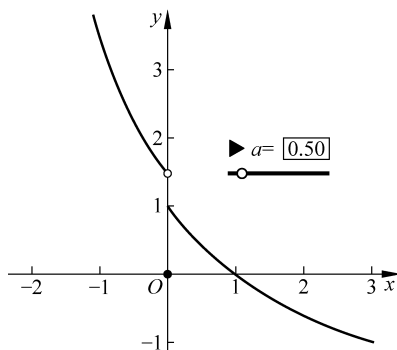


图 2.6.12

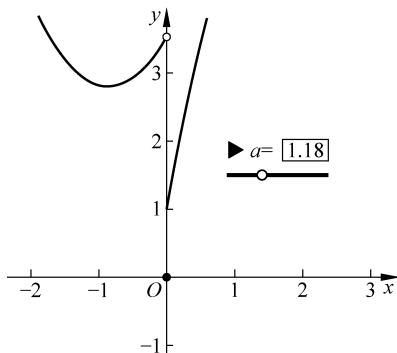


图 2.6.13

例 7 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4x^2+16}, & x \geq 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-a|}, & x < 2 \end{cases}$, 若对任意 $x_1 \in [2, +\infty)$, 都存在唯一的

$x_2 \in (-\infty, 2)$, 满足 $f(x_1) = f(x_2)$, 则实数 a 的取值范围为_____。

【解析】

当 $x_1 \in [2, +\infty)$ 时, $\frac{x_1}{4x_1^2+16} = \frac{1}{4x_1 + \frac{16}{x_1}} \in \left(0, \frac{1}{16}\right]$ 。

当 $x_2 \in (-\infty, 2)$ 时:

(1) 若 $a \geq 2$, 则 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-a|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{a-x}$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上是单调递增函数, 则 $f(x_2) \in \left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^{a-2}\right)$, 若满足题目要求, 则 $\left(0, \frac{1}{16}\right] \subseteq \left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^{a-2}\right)$, 所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a-2} > \frac{1}{16}$, 解得 $a < 6$ 。

(2) 若 $a < 2$, 则 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-a|} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{a-x} & x < a \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-a} & a \leq x < 2 \end{cases}$, $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递增,

此时 $f(x) \in (0, 1)$, 在 $(a, 2)$ 上单调递减, 此时 $f(x) \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2-a}, 1\right]$, 若满足题目要求, 则 $\frac{1}{16} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2-a}$, 解得 $-2 \leq a < 2$ 。

综上, $a \in [-2, 6)$ 。

▶ 简要评注

分段函数的问题分段处理, 整体求解。通过画出分段函数的大致图像, 可以更迅速、更直接得到问题的结果。因此, 通过研究分段函数的表达式, 准确地画出它的图像对解决问题能起到事半功倍的作用。

动感体验

编号: 173392



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.6.14~图 2.6.17 所示, 红色实线为函数 $f(x)$ 的图像, 紫色虚线为直线 $y=b$ 。当且仅当直线 $y=b$ 与 $f(x)$ 在直线 $x=2$ 左、右两边各有 1 个交点时满足题目要求。拖动变量 a, b 的滑杆可以改变实数 a, b 的值, 探究满足条件时点 A, B 的位置关系。

当 $a < 0$ 时, 如图 2.6.16、图 2.6.17 所示, 点 A 要在点 B 上方或重合, 重合为临界值, 把 $B\left(2, \frac{1}{16}\right)$ 代入 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-a|}$ 得到 $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|2-a|}$, 可得 $a = -2$, 故 $-2 \leq a < 0$ 。

当 $a \geq 0$ 时,如图 2.6.14、图 2.6.15 所示,点 A 应在点 B 上方,重合为临界值,把 $B\left(2, \frac{1}{16}\right)$ 代入 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-a|}$ 得到 $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|2-a|}$, 可得 $a=6$, 但此时重合时不可取, 因为 $x_2 \in (-\infty, 2)$ 不包含端点, 故 $0 < a < 6$ 。

综上, 可得 $a \in [-2, 6)$ 。

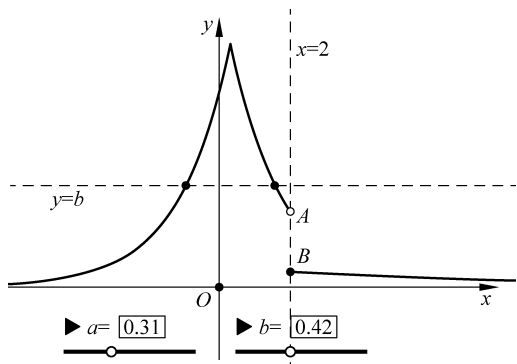


图 2.6.14

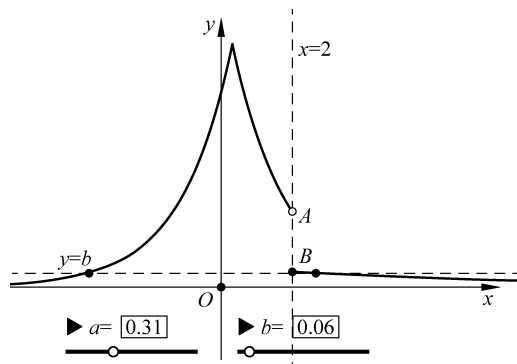


图 2.6.15

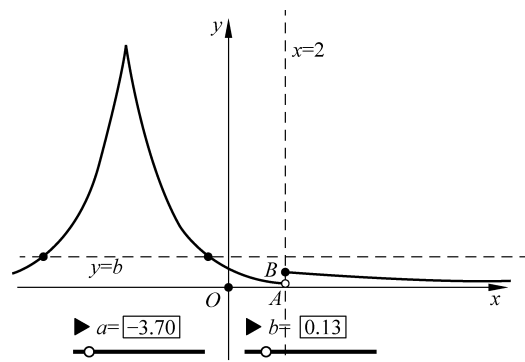


图 2.6.16

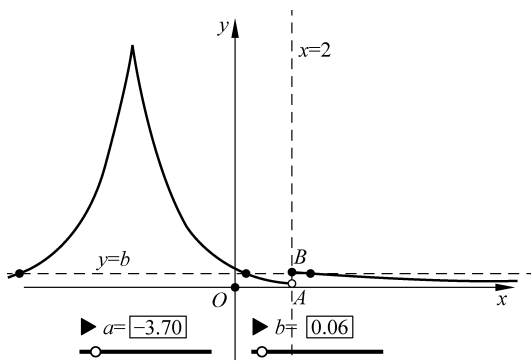


图 2.6.17

例 8(2017 天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1 \\ x + \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 。设 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等

式 $f(x) \geq \left| \frac{x}{2} + a \right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是()。

A. $\left[-\frac{47}{16}, 2\right]$

B. $\left[-\frac{47}{16}, \frac{39}{16}\right]$

C. $[-2\sqrt{3}, 2]$

D. $[-2\sqrt{3}, \frac{39}{16}]$

【解析】

当 $x \leq 1$ 时, 关于 x 的不等式 $f(x) \geq \left| \frac{x}{2} + a \right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 即为 $-x^2 + x - 3 \leq \frac{x}{2} + a$ 和 $a \leq x^2 - x + 3$, 亦即 $-x^2 + \frac{1}{2}x - 3 \leq a \leq x^2 - \frac{3}{2}x + 3$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 由 $y = -x^2 + \frac{1}{2}x - 3$

的对称轴为 $x = \frac{1}{4} < 1$, 可得 $x = \frac{1}{4}$ 时取得最小值 $-\frac{47}{16}$, 由 $y = x^2 - \frac{3}{2}x + 3$ 的对称轴为 $x = \frac{3}{4} < 1$, 可得 $x = \frac{3}{4}$ 时取得最大值 $\frac{39}{16}$, 即 $-\frac{47}{16} \leq a \leq \frac{39}{16}$ 。

当 $x > 1$ 时, 关于 x 的不等式 $f(x) \geq \left| \frac{x}{2} + a \right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 即为 $-\left(x + \frac{2}{x}\right) \leq \frac{x}{2} + a \leq x + \frac{2}{x}$, 亦即 $-\left(\frac{3}{2}x + \frac{2}{x}\right) \leq a \leq \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 由 $y = -\left(\frac{3}{2}x + \frac{2}{x}\right) \leq -2\sqrt{\frac{3x}{2} \times \frac{2}{x}} = -2\sqrt{3}$ (当且仅当 $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时取等号), 由 $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq 2$ (当且仅当 $x = 2$ 时取等号), 故 $-2\sqrt{3} \leq a \leq 2$ 。

综上, a 的取值范围是 $\left[-\frac{47}{16}, 2\right]$, 故选 A。

动感体验



编号: 175256



扫描二维码, 打开课件, 如图 2.6.18、图 2.6.19 所示, 红色实线、紫色实线分别为函数 $f(x)$, $y = \left| \frac{x}{2} + a \right|$ 的图像, 黑色虚线为直线 $x = 1$ 。不等式 $f(x) \geq \left| \frac{x}{2} + a \right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 即函数 $f(x)$ 图像始终在 $y = \left| \frac{x}{2} + a \right|$ 的图像上方。拖动变量 a 的滑杆, 改变实数 a 的值, 考察两函数图像间的关系, 探究满足条件的 a 的取值范围。

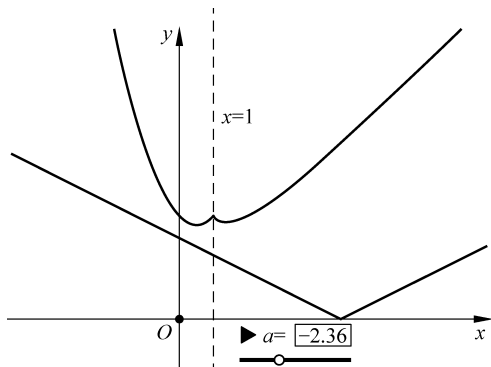


图 2.6.18

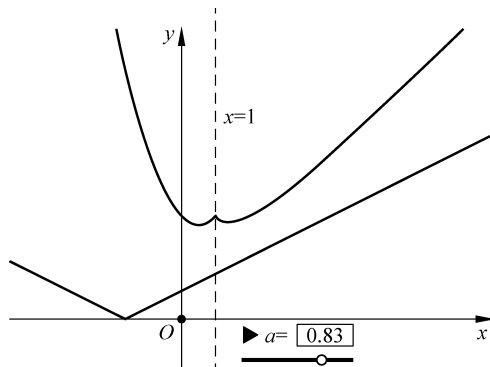


图 2.6.19

根据题意, 作出 $f(x)$ 的大致图像。

当 $x \leq 1$ 时, 若要 $f(x) \geq \left| \frac{x}{2} + a \right|$ 恒成立, 结合图 2.6.18, 只需 $x^2 - x + 3 \geq -\left(\frac{x}{2} + a\right)$, 即 $x^2 - \frac{x}{2} + 3 + a \geq 0$, 故对于方程 $x^2 - \frac{x}{2} + 3 + a = 0$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4(3 + a) \leq 0$,

解得 $a \geq -\frac{47}{16}$ 。

当 $x > 1$ 时, 若要 $f(x) \geq \left| \frac{x}{2} + a \right|$ 恒成立, 结合图 2.6.19, 只需 $x + \frac{2}{x} \geq \left| \frac{x}{2} + a \right|$, 即 $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq a$, 又 $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq 2$, 当且仅当 $\frac{x}{2} = \frac{2}{x}$, 即 $x = 2$ 时等号成立, 故 $a \leq 2$ 。

综上, a 的取值范围是 $\left[-\frac{47}{16}, 2\right]$, 故选 A。

练习 1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \\ |\log_2 x|, & x > 0 \end{cases}$, 若 x_1, x_2, x_3, x_4 互不相等, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$, 则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 的取值范围是_____。

编号: 153978



答案: $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right]$

练习 2 已知函数 $f(x) = 2x^2 - 2ax + 3$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值 h 。

编号: 175217



答案: $h = \begin{cases} 5 + 2a, & a \geq 0 \\ 5 - 2a, & a < 0 \end{cases}$

练习 3 用 $\min\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 三个数中的最小值, 设 $f(x) = \min\{2^x, x + 2, 10 - x\}$, 求 $f(x)$ 的最大值。

编号: 51373



答案: 6

练习 4 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & x > 2 \\ x + a^2, & x \leq 2 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是_____。

编号: 175206



答案: $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

练习 5 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(-x + 1) - 1, & x \in [-1, k] \\ -2|x - 1|, & x \in (k, a] \end{cases}$, 若存在实数 k 使得该函数的值域为 $[-2, 0]$, 则实数 a 的取值范围是_____。

编号: 175211



答案: $(\frac{1}{2}, 2]$

练习 6 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x < 1 \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$, $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的减函数,

那么 a 的取值范围是_____。

编号: 175254



答案: $[\frac{1}{7}, \frac{1}{3})$

练习 7 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2+2x+1, & x \geq 0 \\ -x^2+bx+c, & x < 0 \end{cases}$ 是偶函数, 直线 $y=t$ 与函数 $f(x)$ 的

图像由左至右依次交于四个不同点 A, B, C, D , 若 $|AB| = |BC|$, 求实数 t 的值。

编号: 175262



答案: $\frac{7}{4}$

2.7 函数应用

例 (2018 江苏) 某农场有一块农田, 如图 2.7.1 所示, 它的边界由圆 O 的一段圆弧 MPN (P 为此圆弧的中点) 和线段 MN 构成。已知圆 O 的半径为 40m, 点 P 到 MN 的距离为 50m。现规划在此农田上修建两个温室大棚, 大棚 I 内的地块形状为矩形 $ABCD$, 大棚 II 内的地块形状为 $\triangle CDP$, 要求 A, B 均在线段 MN 上, C, D 均在圆弧上, 设 OC 与 MN 所成的角为 θ 。

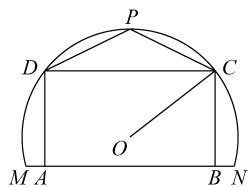


图 2.7.1

(1) 用 θ 分别表示矩形 $ABCD$ 和 $\triangle CDP$ 的面积, 并确定 $\sin\theta$ 的取值范围;

(2) 若大棚 I 内种植甲种蔬菜, 大棚 II 内种植乙种蔬菜, 且甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为 4:3。求当 θ 为何值时, 能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大。

【解析】

(1) 连接 PO 并延长交 MN 于 H , 如图 2.7.2 所示, 则 $PH \perp MN$, 所以 $OH = 10$ 。

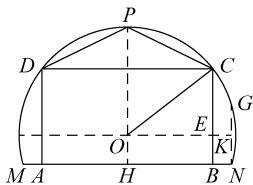


图 2.7.2

过 O 作 $OE \perp BC$ 于 E , 则 $OE \parallel MN$, 所以 $\angle COE = \theta$, 故 $OE = 40\cos\theta$, $EC = 40\sin\theta$, 则矩形 $ABCD$ 的面积为 $2 \times 40\cos\theta(40\sin\theta + 10) = 800(4\sin\theta\cos\theta + \cos\theta)$, $\triangle CDP$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times 40\cos\theta(40 - 40\sin\theta) = 1600(\cos\theta - \sin\theta\cos\theta)$ 。

过 N 作 $GN \perp MN$, 分别交圆弧和 OE 的延长线于 G 和 K , 则 $GK = KN = 10$, 令 $\angle GOK = \theta_0$, 则 $\sin\theta_0 = \frac{1}{4}$, 当 $\theta \in (\theta_0, \frac{\pi}{2})$ 时, 才能作出满足条件的矩形 $ABCD$, 所以 $\sin\theta$ 的取值范围是 $[\frac{1}{4}, 1)$ 。

综上, 矩形 $ABCD$ 的面积为 $800(4\sin\theta\cos\theta + \cos\theta)\text{m}^2$, $\triangle CDP$ 的面积为 $1600(\cos\theta - \sin\theta\cos\theta)\text{m}^2$, $\sin\theta$ 的取值范围是 $[\frac{1}{4}, 1)$ 。

(2) 因为甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为 $4:3$, 设甲的单位面积的年产值为 $4k$, 乙的单位面积的年产值为 $3k(k > 0)$, 则年总产值为 $4k \cdot 800(4\sin\theta\cos\theta + \cos\theta) + 3k \cdot 1600(\cos\theta - \sin\theta\cos\theta) = 8000k(\sin\theta\cos\theta + \cos\theta)$, $\theta \in (\theta_0, \frac{\pi}{2})$ 。设 $f(\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta$, $\theta \in (\theta_0, \frac{\pi}{2})$, 则 $f'(\theta) = \cos 2\theta - \sin\theta = -(2\sin^2\theta + \sin\theta - 1) = -(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1)$, 令 $f'(\theta) = 0$, 得 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 。

当 $\theta \in (\theta_0, \frac{\pi}{6})$ 时, $f'(\theta) > 0$, 所以 $f(\theta)$ 为增函数; 当 $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(\theta) < 0$, 所以 $f(\theta)$ 为减函数。

因此, 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(\theta)$ 取到最大值, 所以当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大。

▶ 简要评注

1. 本题关键是在 $\text{Rt}\triangle COE$ 中利用直角三角形边角关系, 找到 OE, EC 与 θ 之间的关系。
2. 实际问题要注意其实际意义, 本题中点 A, B 的极限位置在点 M, N , 因此 $\theta \geq \theta_0$ 。

动感体验

编号: 174036



扫描二维码, 打开课件, 图 2.7.3 显示为第(1)问, 拖动点 A (红色点), 右边坐标系下即绘制函数 $y = \sin\theta$ 的图像, 拖动点 A , 考察点 A 的位置与 θ 的取值, 探究 $\sin\theta$ 的取值范围。

点击“”如图 2.7.4 所示为第(2)问, 拖动点 A , 右边坐标系下绘制函数 $f(\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta$ 的图像, 观察并探究 $f(\theta)$ 取得最大值时的条件。

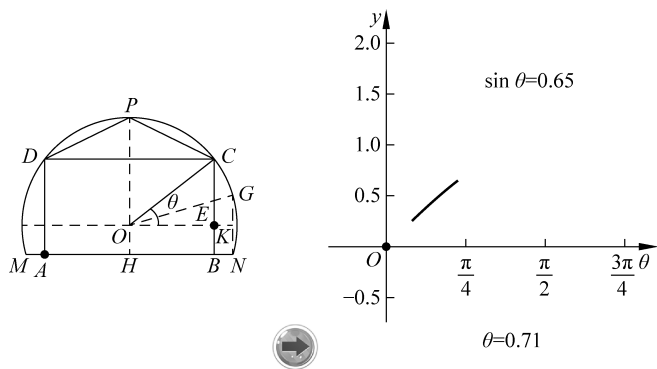


图 2.7.3

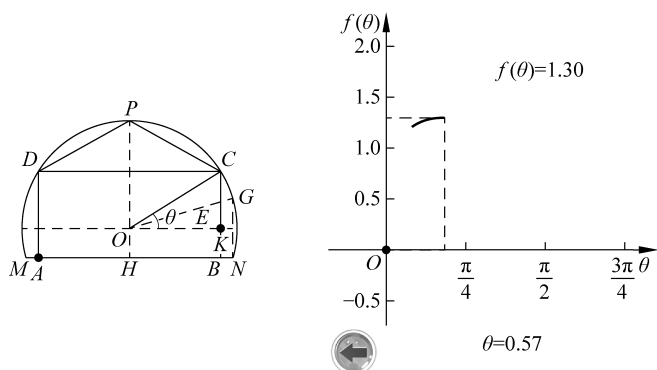


图 2.7.4

练习(2015 江苏) 某山区外围有两条相互垂直的直线型公路,为进一步改善山区的交通现状,计划修建一条连接两条公路和山区边界的直线型公路,记两条相互垂直的公路为 l_1, l_2 ,山区边界曲线为 C ,计划修建的公路为 l ,如图 2.7.5 所示, M, N 为 C 的两个端点,测得点 M 到 l_1, l_2 的距离分别为 5km 和 40km,点 N 到 l_1, l_2 的距离分别为 20km 和 2.5km,以 l_2, l_1 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴,建立平面直角坐标系 xOy ,假设曲线 C 符合函数 $y = \frac{a}{x^2 + b}$ (其中 a, b 为常数)的模型。

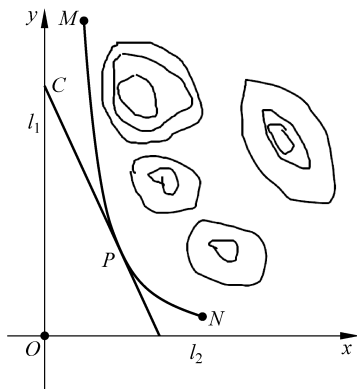


图 2.7.5

- (1) 求 a, b 的值；
- (2) 设公路 l 与曲线 C 相切于 P 点, P 的横坐标为 t 。
- ① 请写出公路 l 长度的函数解析式 $f(t)$, 并写出其定义域；
- ② 当 t 为何值时, 公路 l 的长度最短? 求出最短长度。

编号: 175173



答案: (1)
$$\begin{cases} a=1000 \\ b=0 \end{cases};$$

(2) ① $f(t) = \frac{3}{2} \sqrt{t^2 + \frac{4 \times 10^6}{t^4}} \quad (t \in [5, 20]);$

② 当 $t = 10\sqrt{2}$ 时, 公路 l 的长度最短, 最短长度为 $15\sqrt{3}$ km

函数的零点及方程的解



3.1 一元二次方程实根分布

例 1 若方程 $x^2 + (m+2)x + m+5 = 0$ 的两根均在区间 $(0, 2)$ 内, 求实数 m 的取值范围。

【解析】

方程 $x^2 + (m+2)x + m+5 = 0$ 的两根均在区间 $(0, 2)$ 内, 即函数 $f(x) = x^2 + (m+2)x + m+5$ 的图像与 x 轴的交点均在 $(0, 0), (2, 0)$ 之间, 则

$$\begin{cases} \Delta = (m+2)^2 - 4(m+5) \geq 0 \\ 0 < -\frac{m+2}{2} < 2 \\ f(0) = m+5 > 0 \\ f(2) = 2^2 + 2(m+2) + m+5 > 0 \end{cases}, \text{解}$$

得 $-\frac{13}{3} < m \leq -4$ 。

▶ 简要评注

1. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的实根即为函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 x 轴的交点, 问题的解决常常需要借助二次函数的图像。

2. 利用网络画板动态演示功能, 更利于理解 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的两根均

在区间 (m, n) 内 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ m < -\frac{b}{2a} < n \\ f(m) > 0 \\ f(n) > 0 \end{cases}$ 。

动感体验

编号: 148634



扫描二维码, 打开课件, 如图 3.1.1、图 3.1.2 所示, 红色实线为函数 $f(x) = x^2 + (m+2)x + m+5$ 的图像, 蓝色虚线为其对称轴, 拖动变量 m 的滑杆或 y 轴上的红点, 改变实数 m 的值, 体会函数图像与 x 轴的两个交点横坐标都在 $(0, 2)$ 上的条件。

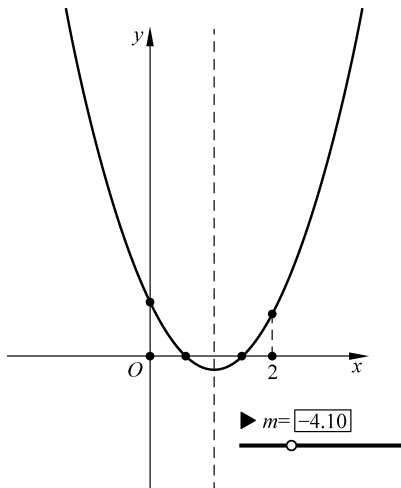


图 3.1.1

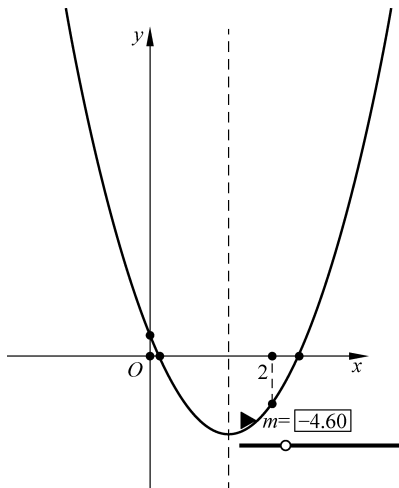


图 3.1.2

例 2 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + 2m + 1 = 0$, 若方程有两根, 其中一根在区间 $(-1, 0)$ 内, 另一根在区间 $(1, 2)$ 内, 求 m 的取值范围。

【解析】

由条件知 $f(x) = x^2 + 2mx + 2m + 1$ 与 x 轴的交点横坐标分别在区间 $(-1, 0)$ 和 $(1, 2)$ 内, 则

$$\begin{cases} f(0) = 2m + 1 < 0 \\ f(-1) = 2 > 0 \\ f(2) = 6m + 5 > 0 \\ f(1) = 4m + 2 < 0 \end{cases}, \text{解得 } -\frac{5}{6} < m < -\frac{1}{2}.$$

简要评注

可借助网络画板动态演示功能理解方程 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的两根分别在

区间 $(m, n), (p, q)$ 内 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(m) > 0 \\ f(n) < 0 \\ f(p) < 0 \\ f(q) > 0 \end{cases}.$

编号: 175272



动感体验



扫描二维码,打开课件,如图 3.1.3、图 3.1.4 所示,红色实线为函数 $f(x)=x^2+2mx+2m+1$ 的图像,蓝色虚线为其对称轴,拖动变量 m 的滑杆改变实数 m 的值,体会函数图像与 x 轴交点横坐标分别在区间 $(-1,0)$ 和 $(1,2)$ 内的条件。

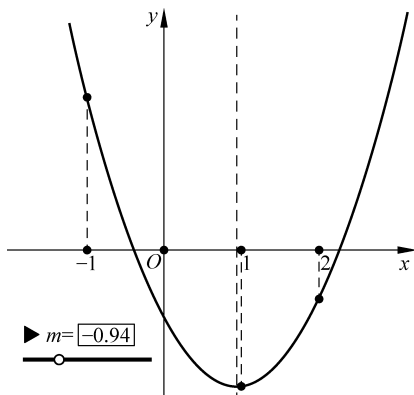


图 3.1.3

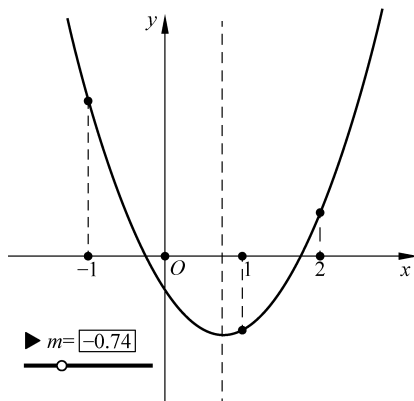


图 3.1.4

例 3 求实数 m 的取值范围,使关于 x 的方程 $x^2+2(m-1)x+2m+6=0$ 。

- (1) 有两个实根,且一个比 2 大,一个比 2 小;
- (2) 有两个实根 α, β ,且满足 $0 < \alpha < 1 < \beta < 4$;
- (3) 至少有一个正根。

【解析】

设 $f(x)=x^2+2(m-1)x+2m+6$ 。

(1) 依题意有 $f(2) < 0$, 即 $4+4(m-1)+2m+6 < 0$, 解得 $m < -1$ 。

(2) 依题意有 $\begin{cases} f(0)=2m+6 > 0 \\ f(1)=4m+5 < 0 \\ f(4)=10m+14 > 0 \end{cases}$, 解得 $-\frac{7}{5} < m < -\frac{5}{4}$ 。

(3) 方程至少有一个正根, 则有三种可能。

① 有两正根, 此时可得 $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(0) > 0 \\ -\frac{2(m-1)}{2} > 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} m \leq -1 \text{ 或 } m \geq 5 \\ m > -3 \\ m < 1 \end{cases}$, 解得 $-3 < m \leq -1$ 。

② 有一个正根, 一个负根, 此时可得 $f(0) < 0$, 得 $m < -3$ 。

③ 有一个正根, 另一根为 0, 此时可得 $\begin{cases} 6+2m=0 \\ 2(m-1) < 0 \end{cases}$, 即 $m = -3$ 。

综上, $m \leq -1$ 。



简要评注

方程至少有一个正根应包含三种情况: ①有两正根; ②有一个正根, 一个负根; ③有一

个正根,另一根为 0,最易遗漏的是第③种情况。

动感体验



编号: 177427



扫描二维码,打开课件,如图 3.1.5、图 3.1.6 所示,实线为函数 $f(x) = x^2 + 2(m-1)x + 2m + 6$ 的图像,拖动变量 m 的滑杆或 y 轴上的红色实点改变实数 m 的值,研究并体会函数图像与 x 轴交点横坐标满足题目要求的条件。

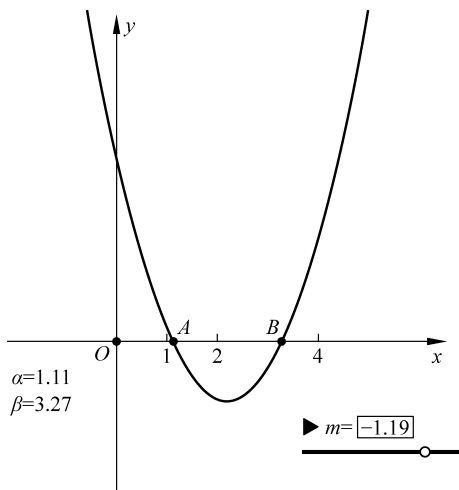


图 3.1.5

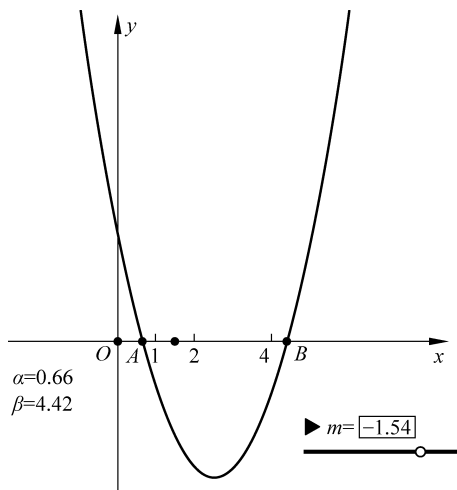


图 3.1.6

练习 1 已知方程 $2x^2 - 2(2a-1)x + a+2 = 0$ 的两个根在 -3 与 3 之间(不含 -3 与 3),求 a 的取值范围。

编号: 175270



答案: $\left(-\frac{14}{13}, \frac{3-\sqrt{21}}{4}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{21}}{4}, \frac{26}{11}\right)$

练习 2 已知方程 $x^2 + (3m-1)x + (3m-2) = 0$ 的两个根都属于 $(-3, 3)$,且其中至少有一个根小于 1,求 m 的取值范围。

编号: 189506



答案: $\left(-\frac{1}{3}, 1\right) \cup \left(1, \frac{5}{3}\right)$

练习 3 已知方程 $m2^{2x} + (2m-1)2^x + m = 0$ 在 $(-\infty, 1)$ 上有两个根,求 m 的取值范围。

编号: 177436

答案: $(\frac{2}{9}, \frac{1}{4}]$ 

3.2 周期函数的零点

例 1(2019 江苏) 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的两个周期函数, $f(x)$ 的周期为 4, $g(x)$ 的周期为 2, 且 $f(x)$ 是奇函数, 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$, $g(x) = \begin{cases} k(x+2), & 0 < x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 其中 $k > 0$ 。若在区间 $(0, 9]$ 上, 关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有 8 个不同的实数根, 则 k 的取值范围是_____。

【解析】

作出函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像, 由图可知, 函数 $f(x)$ 与 $g(x) = -\frac{1}{2}$ ($1 < x \leq 2, 3 < x < 4, 5 < x \leq 6, 7 < x < 8$)。

要使关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有 8 个不同的实数根, 则 $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$, $x \in (0, 2]$ 与 $g(x) = k(x+2)$, $x \in (0, 1]$ 的图像应有 2 个不同交点, 由 $(1, 0)$ 到直线 $kx - y + 2k = 0$ 的距离为 1, 得 $\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, 解得 $k = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ($k > 0$)。

因为两点 $(-2, 0), (1, 1)$ 连线的斜率 $k = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{1}{3} \leq k < \frac{\sqrt{2}}{4}$, 即 k 的取值范围为 $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4})$ 。

简要评注

对于周期函数来说, 除了要了解函数的整体性质, 还需要抓住每个周期内的性质特征。在解决周期函数与非周期函数的综合问题时, 研究两个函数关系发生改变的某个周期是解决问题的关键, 可以避免大量繁琐的计算。

编号: 175412



动感体验



扫描二维码, 打开课件, 如图 3.2.1 所示, 红色实线、蓝色实线分别为函数 $g(x), f(x)$ 的图像, 拖动变量 k 的滑杆或 y 轴上的红色空心点, 改变实数 k 的值, 观察并研究两函数图像的交点, 探究图像有 8 个交点的条件, 理解解析过程。

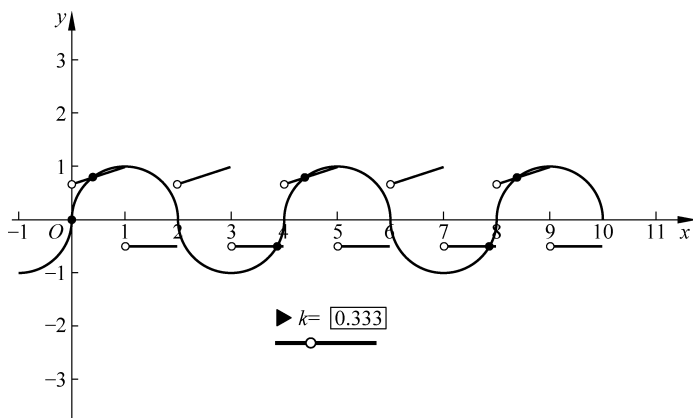


图 3.2.1

例 2 已知以 $T=4$ 为周期的函数 $f(x) = \begin{cases} m\sqrt{1-x^2}, & x \in (-1, 1] \\ 1-|x-2|, & x \in (1, 3] \end{cases}$, 其中 $m > 0$, 若方程 $3f(x) = x$ 恰有 5 个实数解, 实数 m 的取值范围为_____。

【解析】

考虑两个极端的情况:

(1) $y = \frac{x}{3}$ 与半椭圆 $y = m\sqrt{1-(x-4)^2}$ 相切, 如图 3.2.3 所示, 将 $y = \frac{x}{3}$ 代入 $y = m\sqrt{1-(x-4)^2}$, 整理得 $\left(1 + \frac{1}{9m^2}\right)x^2 - 8x + 15 = 0$, 由 $8^2 - 4 \times 15 \left(1 + \frac{1}{9m^2}\right) = 0$, 解得 $m = \frac{\sqrt{15}}{3}$ 。

(2) $y = \frac{x}{3}$ 与半椭圆 $y = m\sqrt{1-(x-8)^2}$ 相切, 如图 3.2.4 所示, 将 $y = \frac{x}{3}$ 代入 $y = m\sqrt{1-(x-8)^2}$, 整理得 $\left(1 + \frac{1}{9m^2}\right)x^2 - 16x + 63 = 0$, 由 $\Delta = 16^2 - 4 \times 63 \left(1 + \frac{1}{9m^2}\right) = 0$ 解得 $m = \sqrt{7}$ 。

综上所述, 当 $\frac{\sqrt{15}}{3} < m < \sqrt{7}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{x}{3}$ 图像有 5 个点, 即方程 $3f(x) = x$ 恰有 5 个实数解。

➤ 简要评注

1. 本题利用数形结合的思想, 主要看两个极端情况, 转化为直线与椭圆的相切, 减少运算量。

2. 本题利用网络画板的动态功能, 演示 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{x}{3}$ 图像交点情况更利于理解解析中从临界状态入手解决问题的方法。

动感体验



编号: 175422



【思路点拨】

找出直线 $y = \frac{x}{3}$ 与函数 $y = f(x)$ 的图像有 5 个交点的临界状态, 根据题目要求, 需要直线 $y = \frac{x}{3}$ 与下一个椭圆有两个交点, 与再一个椭圆无交点, 由此可以确定 m 的取值范围。

首先画出一个周期内函数 $f(x) = \begin{cases} m\sqrt{1-x^2}, & x \in (-1, 1] \\ 1-|x-2|, & x \in (1, 3] \end{cases}$ (其中 $m > 0$) 的图像, 这

是由两部分组成的: 椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1, x \in (-1, 1]$ 的上半部分和 $y = -|x-2| + 1, x \in (1, 3]$ 。

【动态解析】

扫描二维码, 打开课件, 如图 3.2.2~图 3.2.4 所示, 红色实线为函数 $y = f(x)$ 的图像, 蓝色实线为 $y = \frac{x}{3}$ 的图像。拖动变量 m 的滑杆或 y 轴上蓝色实线, 改变实数 m 的值, 观察函数 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{x}{3}$ 的图像交点变化情况, 理解解析中的极端位置。

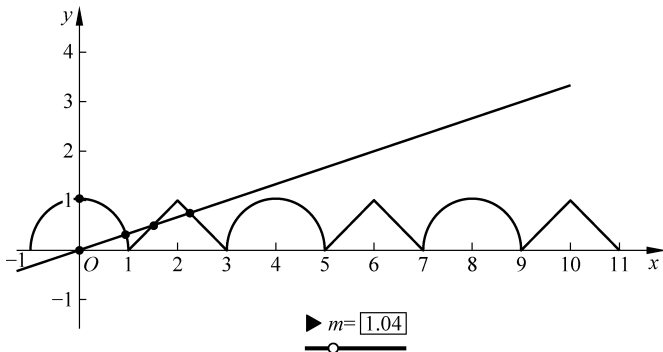


图 3.2.2

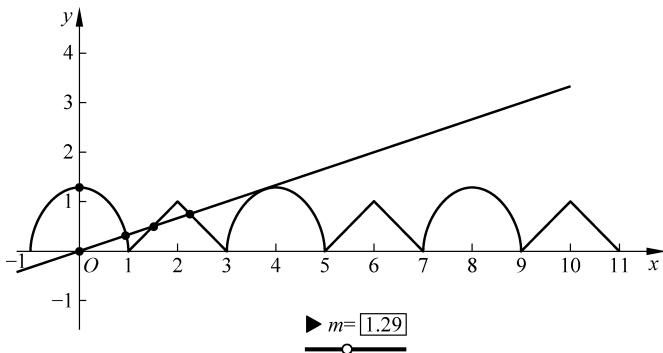


图 3.2.3

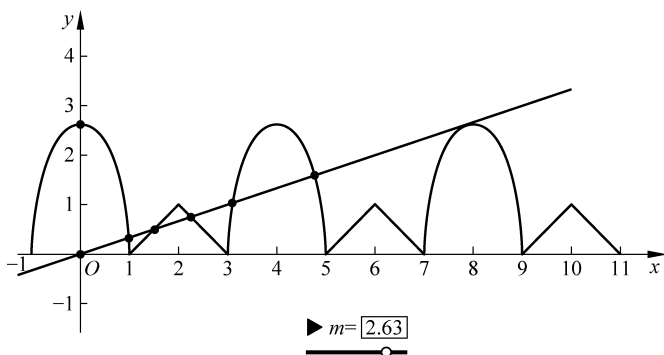


图 3.2.4

练习 1 (2014 江苏) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 3 的函数, 当 $x \in [0, 3)$ 时, $f(x) = \left| x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right|$, 若函数 $y = f(x) - a$ 在区间 $[-3, 4]$ 上有 10 个零点 (互不相同), 则实数 a 的取值范围是_____。

编号: 175415



答案: $0 < a < \frac{1}{2}$

练习 2 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-4) = -f(x)$, 且在区间 $[0, 2]$ 上是增函数, 若方程 $f(x) = m (m > 0)$ 在区间 $[-8, 8]$ 上有四个不同的根 x_1, x_2, x_3, x_4 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$ _____。

编号: 177450



答案: -8

练习 3 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(x+5) = 16$, 当 $x \in (-1, 4]$ 时, $f(x) = x^2 - 2^x$, 则函数 $f(x)$ 在 $[0, 2013]$ 上的零点个数是_____。

编号: 177453



答案: 604



3.3 分段函数的零点

例 1 (2019 浙江) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有 3 个零点, 则()。

- A. $a < -1, b < 0$ B. $a < -1, b > 0$ C. $a > -1, b < 0$ D. $a > -1, b > 0$

【解析】

当 $x < 0$ 时, $y = f(x) - ax - b = (1-a)x - b$, 最多一个零点; 当 $x > 0$ 时, $y = f(x) - ax - b = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 - b$, $y' = x^2 - (a+1)x$ 。

当 $a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -1$ 时, $y' > 0$, $y = f(x) - ax - b$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增, $y = f(x) - ax - b$ 最多一个零点, 不合题意。

当 $a+1 > 0$, 即 $a > -1$ 时, 令 $y' > 0$ 得 $x \in (a+1, +\infty)$, 函数递增, 令 $y' < 0$ 得 $x \in (0, a+1)$, 函数递减, 函数最多有 2 个零点; $f(x)_{\min} = f(a+1) = \frac{1}{3}(a+1)^3 - \frac{1}{2}(a+1) \cdot (a+1)^2 - b$, 函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有 3 个零点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x) - ax - b$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有一个零点, 在 $[0, +\infty)$ 上有 2 个零点, 如图 3.3.2 所示。

$$\text{则 } \frac{b}{1-a} < 0 \text{ 且 } \begin{cases} -b > 0 \\ \frac{1}{3}(a+1)^3 - \frac{1}{2}(a+1)^3 - b < 0 \end{cases}, \text{解得 } b < 0, 1-a > 0, b > -\frac{1}{6}(a+1)^3,$$

故选 C。

▶ 简要评注

分段函数的零点还是要分段处理。具体处理每一段时, 需要画出函数的图像进行分析, 画图之前要弄明白函数的变化趋势(主要指单调性), 导数法研究函数的单调性是通法。

动感体验

编号: 175427



扫描二维码, 打开课件, 如图 3.3.1、图 3.3.2 所示, 红色实线为函数 $y = f(x) - ax - b$ 的图像。拖动变量 a, b 的滑杆改变实数 a, b 的值, 考察函数 $y = f(x) - ax - b$ 的单调性, 探究函数 $y = f(x) - ax - b$ 的图像与 x 轴的交点变化情况, 理解解析中的解法。

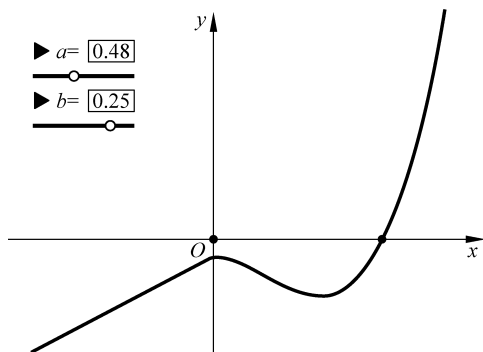


图 3.3.1

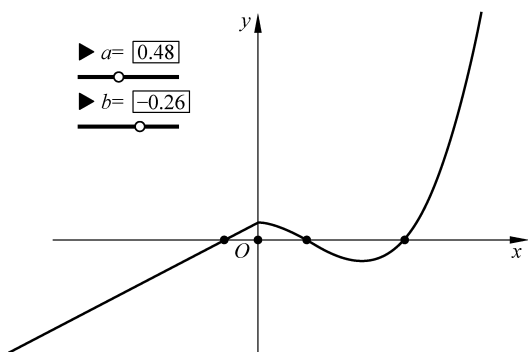


图 3.3.2

例 2(2014 重庆) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} - 3, & x \in (-1, 0] \\ x, & x \in (0, 1] \end{cases}$ 且 $g(x) = f(x) - mx - m$

m 在 $(-1, 1]$ 内有且仅有两个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是()。

- A. $\left(-\frac{9}{4}, -2\right] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left(-\frac{11}{4}, -2\right] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$
C. $\left(-\frac{9}{4}, -2\right] \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$ D. $\left(-\frac{11}{4}, -2\right] \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$

【解析】

$g(x) = f(x) - mx - m$ 在 $(-1, 1]$ 内有且仅有两个不同的零点, 即函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $y = m(x+1)$ 的图像有两个交点, 在同一直角坐标系内作出函数 $f(x) =$

$\begin{cases} \frac{1}{x+1} - 3, & x \in (-1, 0] \\ x, & x \in (0, 1] \end{cases}$ 和函数 $y = mx + m$ 的图像, 如图 3.3.3、图 3.3.4 所示。

当直线 $y = mx + m$ 与 $y = \frac{1}{x+1} - 3, x \in (-1, 0]$ 和 $y = x, x \in (0, 1]$ 都相交时, $0 < m \leq$

$\frac{1}{2}$; 当直线 $y = mx + m$ 与 $y = \frac{1}{x+1} - 3, x \in (-1, 0]$ 有两个交点时, 由 $\begin{cases} y = mx + m \\ y = \frac{1}{x+1} - 3 \end{cases}$ 消元得

$\frac{1}{x+1} - 3 = mx + m$, 即 $m(x+1)^2 + 3(x+1) - 1 = 0$, 化简得 $mx^2 + (2m+3)x + m+2 = 0$ 。

当 $\Delta = 9 + 4m = 0$, 即 $m = -\frac{9}{4}$ 时, 直线 $y = mx + m$ 与 $y = \frac{1}{x+1} - 3, x \in (-1, 0]$ 相切,

当直线 $y = mx + m$ 过点 $(0, -2)$ 时, $m = -2$, 所以 $m \in \left(-\frac{9}{4}, -2\right]$ 。

综上, 实数 m 的取值范围为 $\left(-\frac{9}{4}, -2\right] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 。故选 A。

简要评注

本题与例 1 的区别在于 $y = f(x)$ 中不含参数, 图像是不变的, 所以应该把函数 $g(x)$ 的零点转化为两个函数图像的交点, 还要注意到直线 $y = mx + m$ 恒过定点 $(-1, 0)$, 这样做就将本题的难度大大降低。直线与 $f(x)$ 左支相切时的 m 值采用 Δ 法, 也大大降低了计算量。

动感体验

编号: 175489



扫描二维码, 打开课件, 如图 3.3.3、图 3.3.4 所示, 红色实线为函数 $f(x)$ 的图像, 蓝色实线为函数 $y = mx + m$ 的图像。拖动变量 m 的滑杆或 y 轴上的蓝色实心点, 改变实数 m 的值, 观察两函数图像的交点变化情况, 探究两函数有且只有 2 个交点的条件。

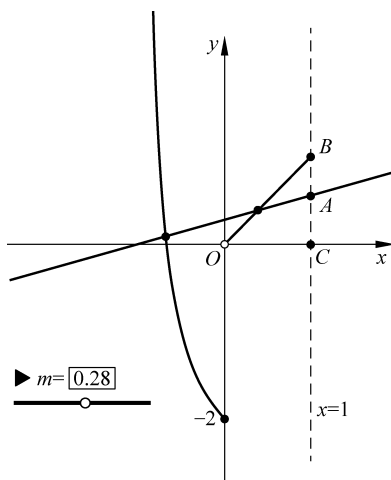


图 3.3.3

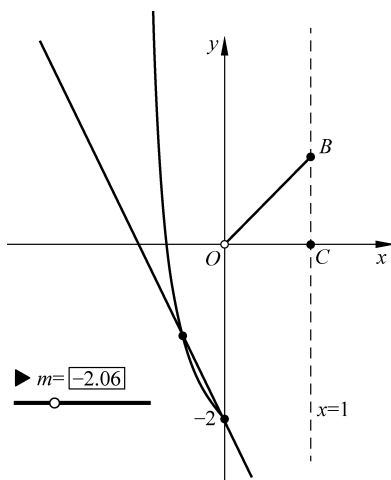


图 3.3.4

例 3(2015 天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$, 函数 $g(x) = b - f(2-x)$, 其中 $b \in \mathbf{R}$, 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 恰有 4 个零点, 则 b 的取值范围是()。

A. $\left(\frac{7}{4}, +\infty\right)$

B. $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right)$

C. $\left(0, \frac{7}{4}\right)$

D. $\left(\frac{7}{4}, 2\right)$

【解析】

由 $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$ 得 $f(2-x) = \begin{cases} 2-|2-x|, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$, 则 $y = f(x) + f(2-x) =$

$$\begin{cases} 2-|x|+x^2, & x < 0 \\ 4-|x|-|2-x|, & 0 \leq x \leq 2, \text{ 即 } y = f(x) + f(2-x) = \begin{cases} x^2+x+2, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x \leq 2. \\ x^2-5x+8, & x > 2 \end{cases} \end{cases}$$

$y = f(x) - g(x) = f(x) + f(2-x) - b$, 则 $y = f(x) - g(x)$ 恰有 4 个零点等价于方程 $f(x) + f(2-x) - b = 0$ 有 4 个不同的解, 即函数 $y = b$ 与函数 $y = f(x) + f(2-x)$ 的图像的 4 个公共点, 由图像可知 $\frac{7}{4} < b < 2$. 故选 D.

动感体验

编号: 175488



扫描二维码, 打开课件, 如图 3.3.5、图 3.3.6 所示, 红色实线为函数 $f(x)$ 的图像, 蓝色实线为函数 $y = b$ 的图像。拖动变量 b 的滑杆或 y 轴上的蓝色点改变实数 b 的值, 观察两函数图像的交点变化情况, 探究两函数图像有 4 个交点的条件。

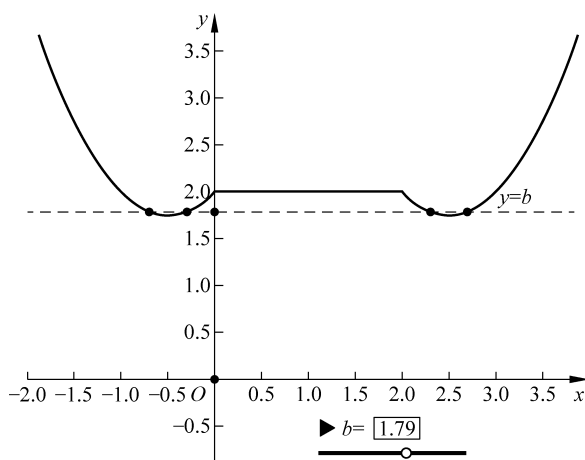


图 3.3.5

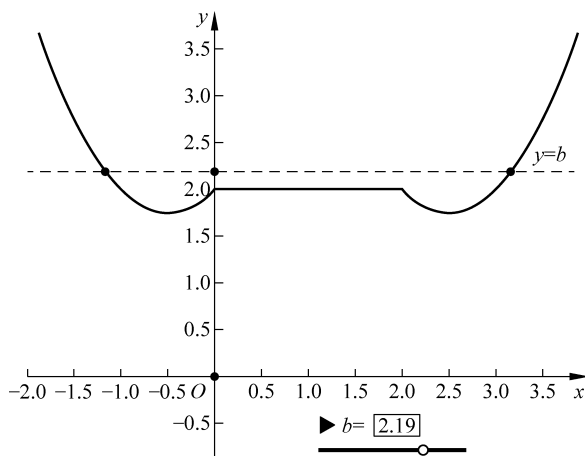


图 3.3.6

例 4 已知函数 $f(x) = \begin{cases} kx+k, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ (其中 $k \geq 0$), 若函数 $y = f[f(x)] + 1$ 有 4 个零点, 求实数 k 的取值范围。

【解析】

函数 $y = f[f(x)] + 1$ 的 4 个零点即方程 $f[f(x)] = -1$ 的解的个数。

当 $x > 1$ 时, $f[f(x)] = \ln(\ln x) = -1$, 即 $\ln x = \frac{1}{e} > 0$, 方程 $f[f(x)] = -1$ 有 1 解。

(1) 当 $k=0$ 时, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f[f(x)] = 0$, 方程 $f[f(x)] = -1$ 无解; 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 0$, $f[f(x)] = 0$, 方程 $f[f(x)] = -1$ 无解; 故 $k=0$ 不合题意。

(2) 当 $k > 0$ 时, 当 $0 < x < 1$ 时, $f[f(x)] = k \cdot \ln x + k = -1$, 即 $\ln x = -1 - \frac{1}{k} < 0$, 方程 $f[f(x)] = -1$ 有 1 解。

当 $-1 < x \leq 0$ 时, $f[f(x)] = \ln(kx+k) = -1$, 即 $kx+k = \frac{1}{e}$, 解得 $x = -1 + \frac{1}{ke} > -1$,
由 $-1 + \frac{1}{ke} \leq 0$ 得 $k \geq \frac{1}{e}$, 所以当 $k \geq \frac{1}{e}$ 时, 方程 $f[f(x)] = -1$ 有 1 解。

当 $x \leq -1$ 时, 由 $f[f(x)] = k(kx+k) + k = k^2x + k^2 + k = -1$ 得 $x = -\frac{k^2+k+1}{k^2} \leq -1$, 方程 $f[f(x)] = -1$ 有 1 解。

故当 $k \geq \frac{1}{e}$ 时, 方程 $f[f(x)] = -1$ 有 4 解。

综上, 实数 k 的取值范围为 $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 。

简要评注

本题的解答过程繁琐, 计算量大, 易错; 令 $f(x) = t$, 则方程 $f[f(x)] + 1 = 0$ 即为 $\begin{cases} t = f(x) \\ f(t) = -1 \end{cases}$, 从而将方程 $f[f(x)] + 1 = 0$ 有 4 解转化为 $f(x) = t$ 有 4 解, 借助函数 $t = f(x)$, $f(t) = -1$ 的图像易求解。

编号: 177458



动感体验

扫描二维码, 打开课件, 如图 3.3.7 所示, 黑色实线为函数 $y = f(t)$ 的图像, 紫色虚线为函数 $y = -1$ 的图像, 拖动变量 k 的滑杆或 y 轴上的红色点改变实数 k 的值, 考察函数 $y = f(t)$ 的图像与直线 $y = -1$ 的交点个数。

点击按钮 , 如图 3.3.8 所示, 黑色实线为函数 $t = f(x)$ 的图像, 粉色虚线为函数 $t = -1 - \frac{1}{k}$, $t = \frac{1}{e}$ 的图像, 拖动变量 k 的滑杆或 y 轴上的红色点改变实数 k 的值, 观察函数 $t = f(x)$ 的图像与直线 $t = -1 - \frac{1}{k}$, $t = \frac{1}{e}$ 的交点个数, 探究有 4 个交点时的条件。

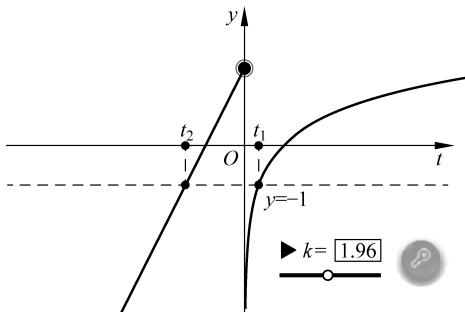


图 3.3.7

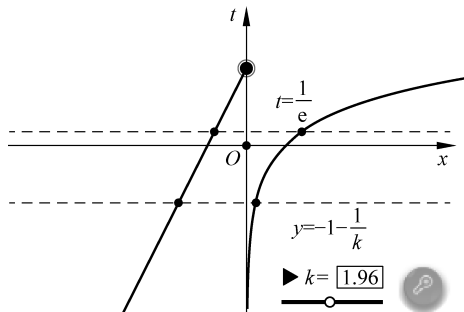


图 3.3.8

练习 1(2018 新课标全国) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = f(x) + x + a$ 。若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围是()。

- A. $[-1, 0)$ B. $[0, +\infty)$
C. $[-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

编号: 175486



答案: C

练习 2 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 + t, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$, 若函数 $g(x) = f(f(x) - 1)$ 恰有 4 个不同的零点, 则 t 的取值范围为_____。

编号: 177479



答案: $[-4, 0)$

练习 3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2, & x \geq 0 \\ -\frac{4}{3}x, & x < 0 \end{cases}$, 函数 $g(x) = f(x) + \sqrt{1-x^2} + |f(x) - \sqrt{1-x^2}| - 2ax + 4a$ 有三个零点, 则实数 a 的取值范围为_____。

编号: 177502



答案: $\left[-\frac{4}{9}, -\frac{4}{13}\right)$

练习 4(2016 天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a-3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - x$ 恰好有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是()。

- A. $\left(0, \frac{2}{3}\right]$ B. $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$
C. $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right] \cup \left\{\frac{4}{3}\right\}$ D. $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$

编号: 177512



答案: D

练习 5(2011 天津) 对实数 a, b 定义新运算 " $a \otimes b$ ": $a \otimes b = \begin{cases} a, & a - b \leq 1 \\ b, & a - b > 1 \end{cases}$, 设函数 $f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - x^2)$, $x \in \mathbf{R}$, 若函数 $y = f(x) - c$ 的图像与 x 轴恰有两个公共点, 则

实数 c 的取值范围是()。

- A. $(-\infty, -2] \cup (-1, \frac{3}{2})$ B. $(-\infty, -2] \cup (-1, -\frac{3}{4})$
 C. $(-\infty, -\frac{1}{4}] \cup (\frac{1}{4}, +\infty)$ D. $(-\infty, -\frac{3}{4}] \cup (\frac{1}{4}, +\infty)$

编号: 177515



答案: B



3.4 探索方程的根的个数

例 1 关于 x 的方程 $(x^2-1)^2 - |x^2-1| + k = 0$, 给出下列四个命题。

- ① 存在实数 k , 使得方程恰有 2 个不同的实根;
 ② 存在实数 k , 使得方程恰有 4 个不同的实根;
 ③ 存在实数 k , 使得方程恰有 5 个不同的实根;
 ④ 存在实数 k , 使得方程恰有 8 个不同的实根。

其中假命题的个数是()。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【解析】

令 $t = |x^2-1|$, 则原方程为 $t^2 - t + k = 0$ 。

(1) 当 $\Delta = 1 - 4k < 0$, 即 $k > \frac{1}{4}$ 时, 方程 $t^2 - t + k = 0$ 无实数解, 则原方程无实根。

(2) 当 $\Delta = 1 - 4k = 0$, 即 $k = \frac{1}{4}$ 时, 方程 $t^2 - t + k = 0$ 有 1 解, 得 $t = \frac{1}{2}$, 方程 $|x^2-1| = \frac{1}{2}$

有 4 解, 即原方程有 4 个不同的实根。

(3) 当 $0 < k < \frac{1}{4}$ 时, 方程 $t^2 - t + k = 0$ 有 2 解, $t_1, t_2 \in (0, 1)$, 方程 $|x^2-1| = t_1$ 有 4 解, 方程 $|x^2-1| = t_2$ 有 4 解, 此时原方程有 8 个不同的实根。

(4) 当 $k = 0$ 时, 方程 $t^2 - t + k = 0$ 有 2 解, $t_1 = 0, t_2 = 1$, 方程 $|x^2-1| = 0$ 有 2 解, 方程 $|x^2-1| = 1$ 有 3 解, 此时原方程有 5 个不同的实根。

(5) 当 $k < 0$ 时, 方程 $t^2 - t + k = 0$ 有 2 解, $t_1 < 0, t_2 > 1$, 方程 $|x^2-1| = t_1$ 无解, 方程 $|x^2-1| = t_2$ 有 2 解, 此时原方程有 2 个不同的实根。

综上, ①②③④均正确, 故选 A。

➤ 简要评注

1. 设 $t = |x^2-1|$, 则关于 x 的方程 $(x^2-1)^2 - |x^2-1| + k = 0$ 化为 $t^2 - t + k = 0$, 将关于 x 的方程 $(x^2-1)^2 - |x^2-1| + k = 0$ 解的个数问题转化为关于 t 的方程 $t^2 - t + k = 0$ 解的个数。

2. 借助网络画板动态演示函数图像,更利于理解和解决问题。

动感体验



编号: 175493



扫描二维码,打开课件,如图 3.4.1~图 3.4.5 所示,左侧紫色实线为函数 $y=t^2-t+k$ 的图像,右侧红色实线为函数 $t=|x^2-1|$ 的图像,蓝色虚线为直线 $t=t_1, t=t_2$ 。

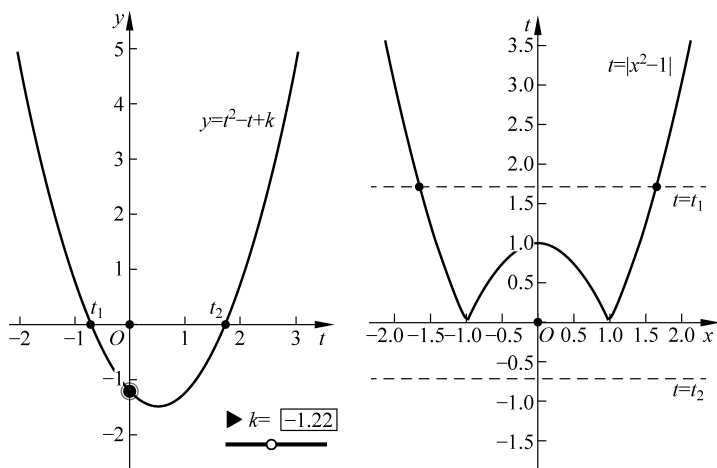


图 3.4.1

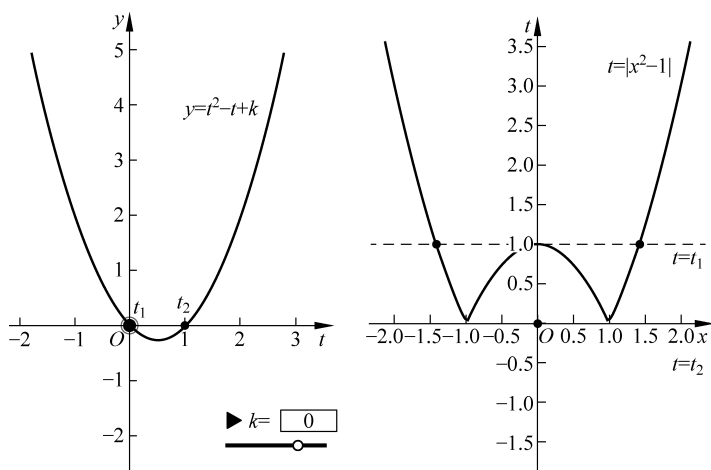


图 3.4.2

拖动变量点 k 的滑杆或左侧 y 轴上的红色实心点改变 k 的值,观察左侧函数图像与 t 轴交点个数及交点横坐标 t_1, t_2 的取值,探究右侧函数 $t=|x^2-1|$ 的图像与直线 $t=t_1, t=t_2$ 交点的个数。

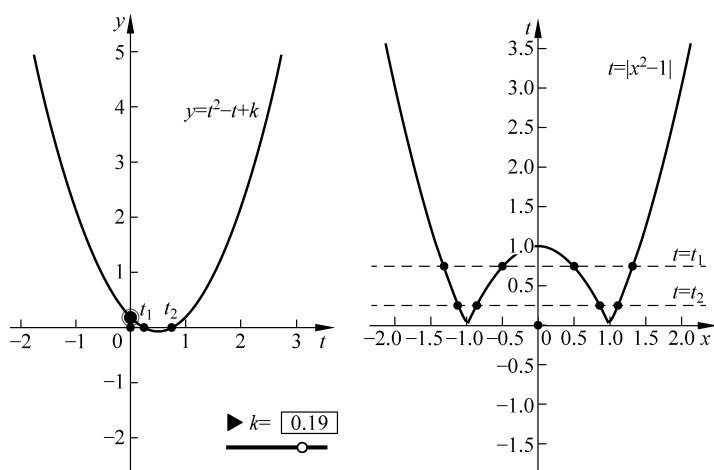


图 3.4.3

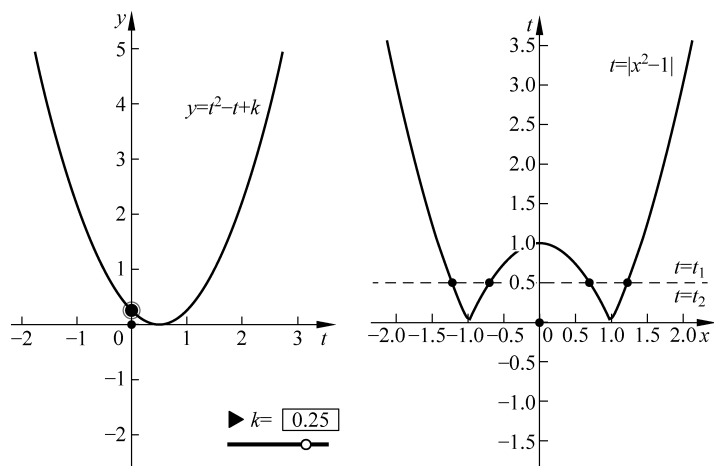


图 3.4.4

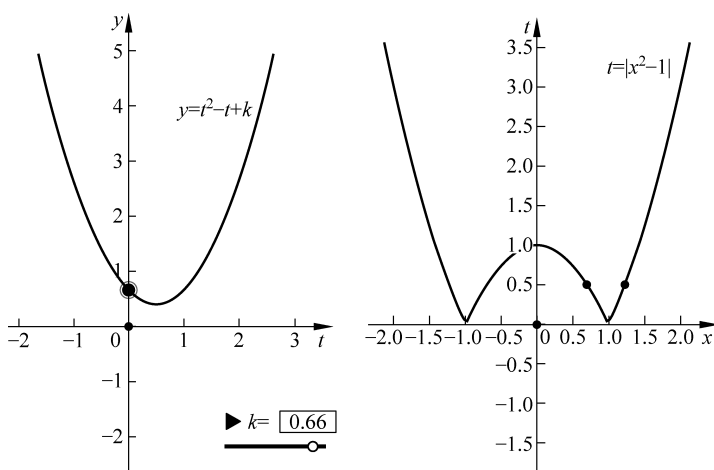


图 3.4.5

例 2 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg|x-1||, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, 则关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个不同实数解的充要条件是()。

A. $b < 0$ 且 $c > 0$

B. $b > 0$ 且 $c < 0$

C. $b < 0$ 且 $c = 0$

D. $b \geq 0$ 且 $c = 0$

【解析】

令 $f(x) = t$, 则 $t \geq 0$, 方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 即 $t^2 + bt + c = 0$ 。

若方程 $t^2 + bt + c = 0$ 有负根, 则 $t = f(x)$ 无解, 即原方程无解。

若方程 $t^2 + bt + c = 0$ 有两正根 t_1, t_2 , 则方程 $t_1 = f(x), t_2 = f(x)$ 各有 4 解, 原方程有 8 个不同实数解。

因为关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个不同实数解, 所以方程 $t^2 + bt + c = 0$ 有 1 根为 0, 1 根为正, 故 $c = 0, b < 0$ 。故选 C。

▶ 简要评注

1. 通过函数的性质掌握函数图像的特点, 对解题大有帮助。对于复合函数来说, 往往需要通过换元将问题分解, 需要注意的是函数换元后中间变量的取值范围。

2. 设 $t = f(x)$, 方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的根是 t , 问题转化为探索 t 取不同的值时, 关于 x 的方程 $t = f(x)$ 解的情况。

动感体验

编号: 175561



扫描二维码, 打开课件, 如图 3.4.6~图 3.4.9 所示, 红色实线为函数 $y = |\lg|x-1||$ 的图像, 蓝色虚线为函数 $y = t$ 的图像, 拖动变量 t 的滑杆改变 t 的值, 观察两个函数图像交点的个数。

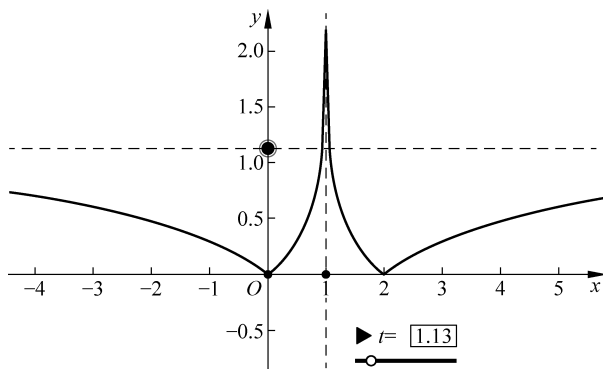


图 3.4.6

容易知道: 对于方程 $t = f(x)$, 如图 3.4.7 所示, 当 $t > 0$ 时, 方程有 4 个实根; 如图 3.4.8 所示, 当 $t = 0$ 时, 方程有 3 个实根; 如图 3.4.9 所示, 当 $t < 0$ 时, 方程没有实根。

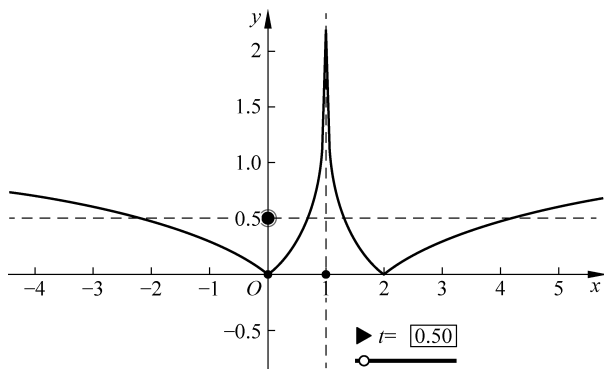


图 3.4.7

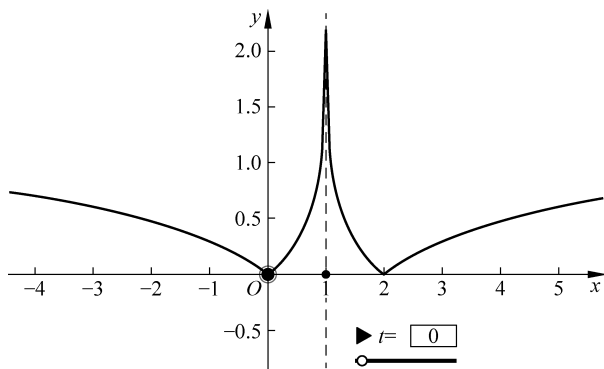


图 3.4.8

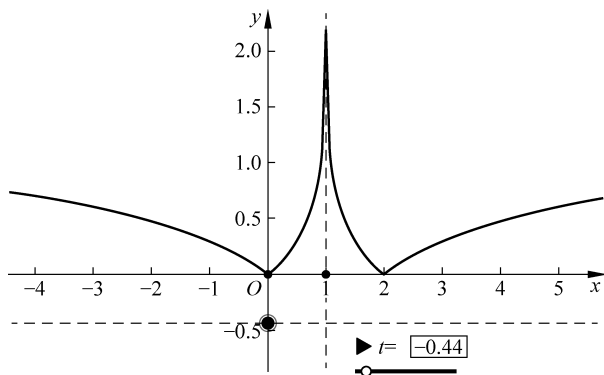


图 3.4.9

若关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个实根,则需要关于 t 的方程 $t^2 + bt + c = 0$ 有两个实根 t_1, t_2 , 并且 $t_1 > 0, t_2 = 0$, 由 $t_2 = 0$ 得到 $c = 0$, 则方程 $t^2 + bt + c = 0$ 化简为 $t(t+b) = 0$, 则由 $t_1 = -b > 0$ 得 $b < 0$ 。故选 C。

例 3 (2016 山东) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m \end{cases}$, 其中 $m > 0$, 若存在实数

b , 使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根, 则 m 的取值范围是_____。

【解析】

由题意得, 当 $x > m$ 时, $f(x) = x^2 - 2mx + 4m = (x-m)^2 + 4m - m^2$, 其顶点为 $(m, 4m - m^2)$; 当 $x \leq m$ 时, 函数 $f(x)$ 的图像与直线 $x=m$ 的交点为 $Q(m, |m|)$ 。

① 当 $\begin{cases} m > 0 \\ 4m - m^2 \geq m \end{cases}$, 即 $0 < m \leq 3$ 时, 函数 $f(x)$ 的图像如图 3.4.10 所示, 此时直线 $y=b$ 与函数 $f(x)$ 的图像有一个或两个不同的交点, 不符合题意。

② 当 $\begin{cases} m > 0 \\ 4m - m^2 < m \end{cases}$, 即 $m > 3$ 时, 函数 $f(x)$ 的图像如图 3.4.11 所示, 则存在实数 b 满足 $4m - m^2 < b \leq m$, 使得直线 $y=b$ 与函数 $f(x)$ 的图像有三个不同的交点, 符合题意。

综上, m 的取值范围为 $(3, +\infty)$ 。

▶ 简要评注

数形结合是本题的切入点, 对两种情况的图像进行准确的代数描述是得到准确结果的关键。

编号: 175496



动感体验

扫描二维码, 打开课件, 如图 3.4.10、图 3.4.11 所示, 红色实线为函数 $f(x)$ 的图像, 蓝色虚线为函数 $y=b$ 的图像。拖动变量 m, b 的滑杆或 x 轴、 y 轴上的红色实心点, 改变实数 m, b 的值, 观察两函数图像的交点变化情况, 探究有 3 个交点时的条件。

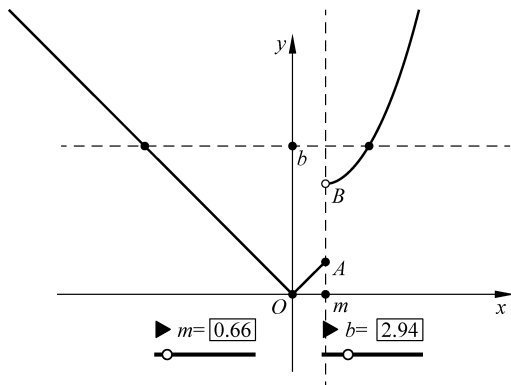


图 3.4.10

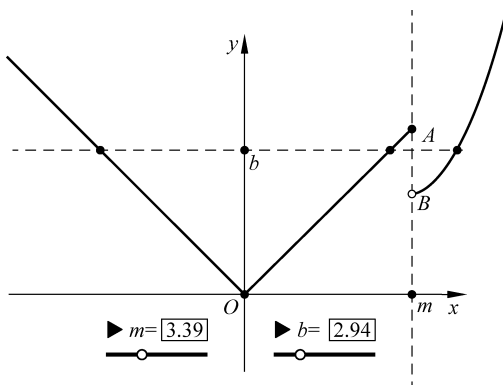


图 3.4.11

例 4 已知 $f(x) = |x^2 - 1| + x^2 + kx$, 若关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 2)$ 上有两个解 x_1, x_2 , 求 k 的取值范围, 并证明 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 4$ 。

【解析】

$$\text{设 } g(x) = -|x^2 - 1| - x^2 = \begin{cases} -2x^2 + 1, & x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1 \\ -1, & -1 < x < 1 \end{cases}, h(x) = kx.$$

当直线 $h(x) = kx$ 经过点 $(1, -1)$ 时, 函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有一个交点, 这时解得 $k = -1$ 。

当直线 $h(x) = kx$ 经过点 $(2, g(2))$ 时, 函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有一个交点, 这时由 $2k = g(2) = -7$, 解得 $k = -\frac{7}{2}$ 。

因此, 当 $-\frac{7}{2} < k < -1$ 时, 函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有两个交点; 当函数 $k \geq -1$ 或 $k \leq -\frac{7}{2}$ 时, $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上少于两个交点。因为 $0 < x_1 \leq 1 < x_2 < 2$, 所以 $k = -\frac{1}{x_1}$, $2x_2^2 + kx_2 - 1 = 0$, 消去 k 得 $2x_1x_2^2 - x_1 - x_2 = 0$, 即 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2x_2$, 又 $x_2 < 2$, 所以 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 4$ 。

简要评注

1. 对于那些我们不容易绘制其图像的函数来说, 在求函数零点的过程中, 可以将该函数分解成我们熟悉的、容易作图的两个初等函数, 通过求这两个初等函数的交点得到题设中非初等函数的零点。

2. 本题借助网络画板动态演示 $h(x)$ 图像与 $g(x)$ 的图像交点更易于理解和解决。

编号: 175502



动感体验

扫描二维码, 打开课件, 如图 3.4.12~图 3.4.15 所示, 黑色虚线为函数 $g(x) = -|x^2 - 1| - x^2$ 的图像, 红色实线为函数 $g(x) = -|x^2 - 1| - x^2 (x \in (0, 2))$ 的图像, 蓝色实线为函数 $h(x) = kx$ 的图像。拖动变量 k 的滑杆改变 k 的值, 观察和研究蓝色实线与红色实线交点的个数, 探究有 2 个交点横坐标时的取值范围。

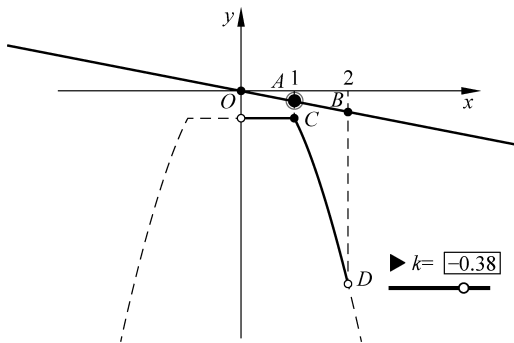


图 3.4.12

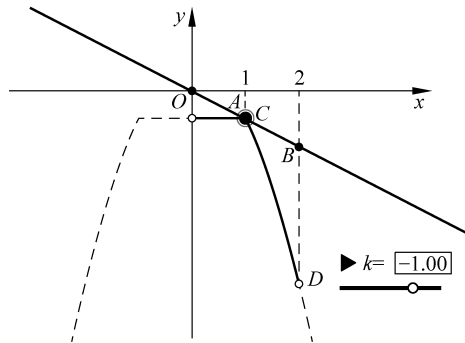


图 3.4.13

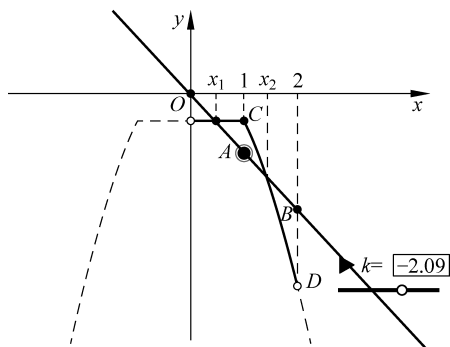


图 3.4.14

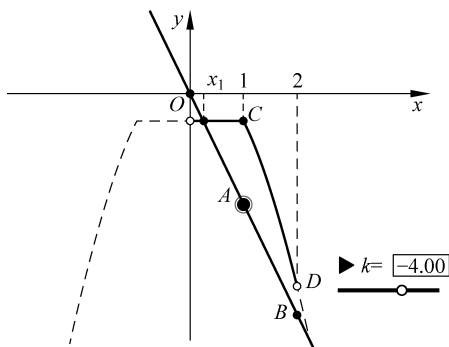


图 3.4.15

练习 1(2018 天津) 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = ax$ 恰有 2 个互异的实数解, 则 a 的取值范围是_____。

编号: 175495



答案: $4 < a < 8$

练习 2(2014 山东) 已知函数 $f(x) = |x - 2| + 1$, $g(x) = kx$, 若方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是()。

A. $(0, \frac{1}{2})$

B. $(\frac{1}{2}, 1)$

C. $(1, 2)$

D. $(2, +\infty)$

编号: 175499



答案: B

练习 3(2012 福建) 对于实数 a 和 b 定义运算 “ $*$ ”: $a * b = \begin{cases} a^2 - ab, & a \leq b \\ b^2 - ab, & a > b \end{cases}$, 设 $f(x) = (2x - 1) * (x - 1)$, 且关于 x 的方程 $f(x) = m$ ($m \in \mathbf{R}$) 恰有三个互不相等的实数根 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1 x_2 x_3$ 的取值范围是_____。

编号: 175504



答案: $(\frac{1 - \sqrt{3}}{16}, 0)$

3.5 两个函数图像的交点

例 1 已知函数 $f(x) = -x^2 + 8x$, $g(x) = 6 \ln x + m$, 是否存在实数 m , 使得 $y = f(x)$ 的图像与 $y = g(x)$ 的图像有且只有三个不同的交点? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由。

在,说明理由。

【解析】

$f'(x) = -2x + 8, g'(x) = \frac{6}{x}$, 由 $f'(x) = g'(x)$, 解得 $x = 1$ 或者 $x = 3$ 。

当 $x = 1$ 时, 由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相切, 如图 3.5.2 所示, 可知 $f(1) = g(1)$, 解得 $m = 7$ 。当 $x = 3$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 相切, 得 $m = 15 - 6\ln 3$ 。

可知当 $7 < m < 15 - 6\ln 3$ 时, 函数 $f(x)$ 的图像与函数 $g(x)$ 的图像有三个交点; 当 $m = 7$ 或者 $m = 15 - 6\ln 3$ 时, $f(x)$ 的图像与函数 $g(x)$ 的图像有两个交点; 当 $m < 7$ 或者 $m > 15 - 6\ln 3$ 时, $f(x)$ 的图像与函数 $g(x)$ 的图像有一个交点。

综上所述, 当 $7 < m < 15 - 6\ln 3$ 时, $f(x)$ 的图像与函数 $g(x)$ 的图像有三个交点。

➤ 简要评注

本题对作图的要求很高, 利用网络画板可以帮助我们观察函数图像变化的过程以及两个函数图像交点变化的规律, 反过来帮助我们深刻理解对数函数和二次函数的性质以及它们之间的关系。

编号: 175555



动感体验

扫描二维码, 打开课件, 如图 3.5.1~图 3.5.4 所示, 蓝色实线为函数 $f(x) = x^2 - 8x + m$ 的图像, 红色实线为函数 $g(x) = -6\ln x$ 的图像, 拖动变量 m 的滑杆改变实数 m 的值, 研究 $y = f(x)$ 的图像与 $y = g(x)$ 的图像的交点情况。

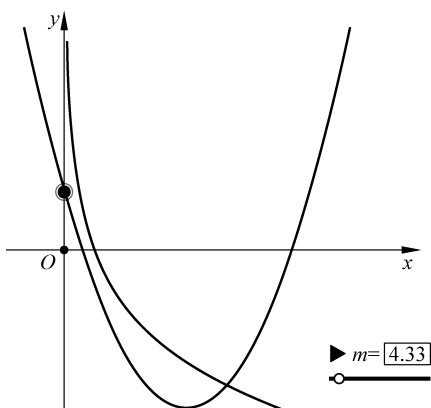


图 3.5.1

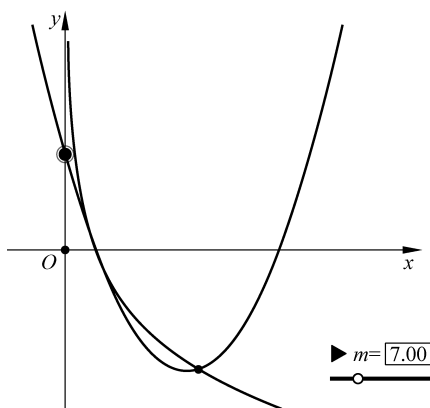


图 3.5.2

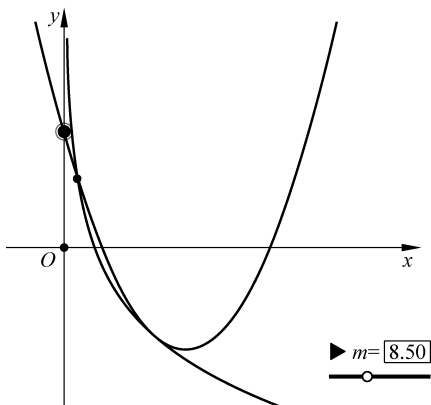


图 3.5.3

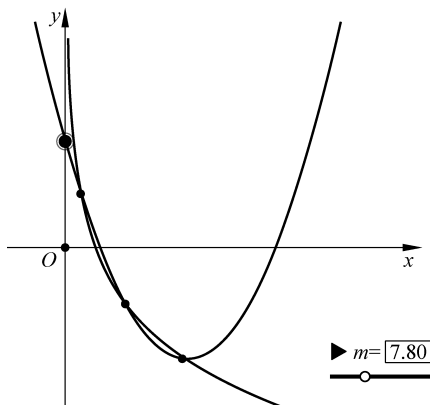


图 3.5.4

例 2 已知函数 $f(x) = -x^2 - x + a$, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 2 \\ f(x-1) + 2, & x > 2 \end{cases}$, 函数 $y = g(x)$ 与 $y = ax$ 恰有三个不同交点, 求实数 a 的取值范围。

【解析】

由条件可知 $f(x-1) = -x^2 + x + 2 + a$, 则 $g(x) = \begin{cases} -x^2 - x + a, & x \leq 2 \\ -x^2 + x + 2 + a, & x > 2 \end{cases}$.

又函数 $y = g(x)$ 与 $y = ax$ 恰有三个不同交点, 如图 3.5.5 所示, 当 $a \geq 0$ 时, $g(2) = a \leq 2a$, 故两函数图像不可能有 3 个交点, 所以 $a < 0$.

函数 $y = g(x)$ 与 $y = ax$ 恰有三个不同交点, 当且仅当 $x < 2$ 时, 有两个交点, 即方程 $x^2 + (a+1)x - a = 0$ 在 $(-\infty, 2]$ 上有两不等实根, 易求得 $2\sqrt{2} - 3 < a < 0$.

简要评注

本题利用函数图像, 将两函数图像恰有三个交点问题转化函数 $\varphi(x) = -x^2 - x + a$ 与 $y = ax$ 在 $(-\infty, 2]$ 上有两个不同交点, 进而转化为一元二次方程实根的分布问题。

编号: 177486



动感体验



扫描二维码, 打开课件, 如图 3.5.5、图 3.5.6 所示, 红色实线为函数 $g(x)$ 的图像, 黑色实线为函数 $y = ax$ 的图像, 拖动变量 a 的滑杆或红色空心点改变实数 a 的值, 观察两函数图像的位置关系, 探究恰有 3 个交点时的条件。

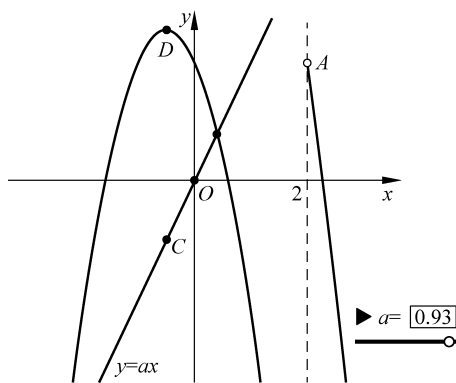


图 3.5.5

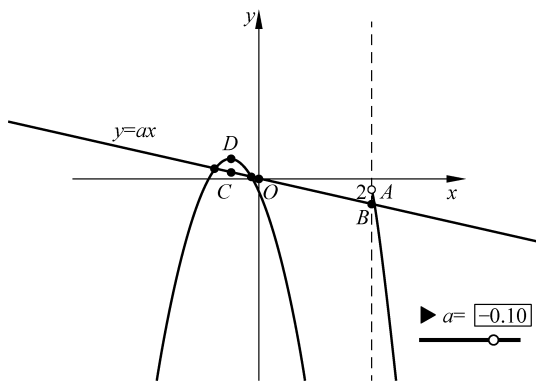


图 3.5.6

例 3(2017 山东) 已知当 $x \in [0, 1]$ 时, 函数 $y = (mx - 1)^2$ 的图像与 $y = \sqrt{x} + m$ 的图像有且只有一个交点, 则正实数 m 的取值范围是()。

- A. $(0, 1] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$ B. $(0, 1] \cup [3, +\infty)$
C. $(0, \sqrt{2}] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$ D. $(0, \sqrt{2}] \cup [3, +\infty)$

【解析】

当 $0 < m \leq 1$ 时, $\frac{1}{m} \geq 1$, 函数 $y = f(x) = (mx - 1)^2$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 函数 $y = g(x) = \sqrt{x} + m$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增。

因为 $f(0) = 1, g(0) = m, f(1) = (m - 1)^2, g(1) = 1 + m$, 所以 $f(0) > g(0), f(1) < g(1)$, 此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 内有一个交点。

当 $m > 1$ 时, 函数 $y = f(x) = (mx - 1)^2$, 在 $[0, \frac{1}{m}]$ 上单调递减, 在 $[\frac{1}{m}, 1]$ 上单调递增, 此时 $f(0) < g(0)$, 在 $[0, \frac{1}{m}]$ 内无交点, 要使两个函数的图像有一个交点, 需 $f(1) \geq g(1)$, 即 $(m - 1)^2 \geq 1 + m$, 解得 $m \geq 3$ 。

故选 B。

简要评注

抓住两函数的单调性是解决本题的关键,若借助网络画板动态演示两函数图像,更易探究两函数图像交点情况。

动感体验

编号: 175558



扫描二维码,打开课件,如图 3.5.7、图 3.5.8 所示,红色实线、蓝色实线分别为函数 $y = (mx-1)^2$ 与 $y = \sqrt{x}+m$ 在 $x \in [0, 1]$ 上的图像,拖动变量 m 的滑杆或 y 轴上的蓝色实心点改变实数 m 的值,研究两函数图像的交点情况。

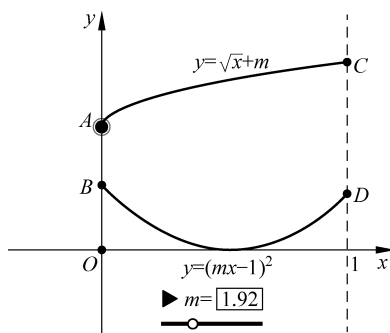


图 3.5.7

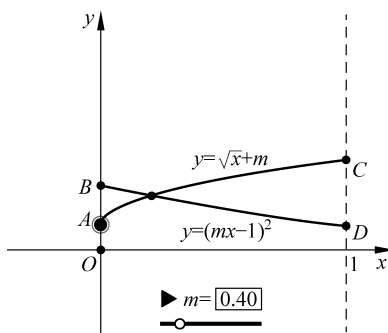


图 3.5.8

例 4 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x^2$,当 $x > 1$ 时, $f(x+1) = f(x) + f(1)$ 。若直线 $y = kx$ 与函数 $y = f(x)$ 的图像恰有 5 个不同的公共点,求实数 k 的值。

【解析】

$f(1) = 1$, $f(x+1) = f(x) + f(1) = f(x) + 1$,当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = f(x-1) + 1 = (x-1)^2 + 1$,直线 $y = kx$ 与 $y = f(x)$ 图像都关于原点对称,从而原问题等价于直线 $y = kx$ 与 $y = f(x)$ 在 x 轴右边恰有 2 个交点(原点除外)。

$y = kx$ 与 $y = (x-1)^2 + 1$ 在 $1 \leq x \leq 2$ 上有唯一交点,即 $x^2 - 2x + 2 = kx$ 有 1 解,由 $\Delta = (k+2)^2 - 8 = 0$ 得 $k = -2 \pm 2\sqrt{2}$,又 $k > 0$,故 $k = 2\sqrt{2} - 2$ 。

简要评注

本题利用奇函数图像关于原点对称,将两函数图像在 $\mathbf{R}$ 上的交点问题转化为在 $(0, +\infty)$ 上的交点;根据 $f(x)$ 函数特征,将问题再转化为 $y = kx$ 与 $y = (x-1)^2 + 1$ 在 $1 \leq x \leq 2$ 上有唯一交点。

动感体验



编号: 177510



扫描二维码,打开课件,如图 3.5.9~图 3.5.12 所示,红色实线、蓝色实线分别为函数 $f(x), x \in [0, 2]$ 与 $y=kx$ 的图像,拖动变量 k 的滑杆或蓝色实心点,改变实数 k 的值,考察两函数图像的交点个数,探究恰有 2 个交点的条件。

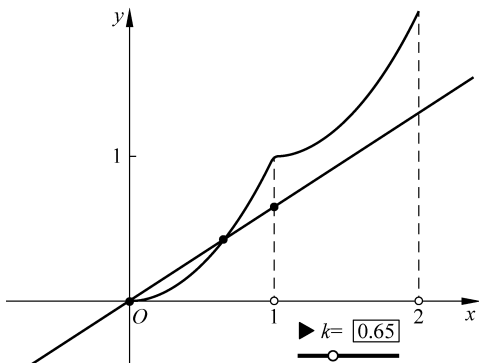


图 3.5.9

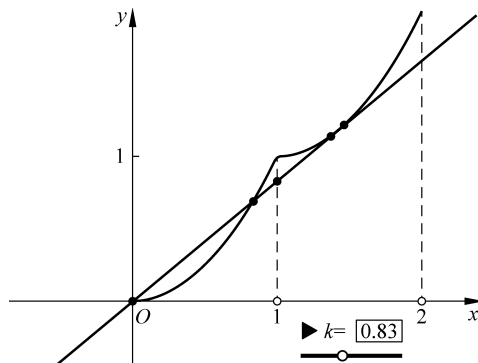


图 3.5.10

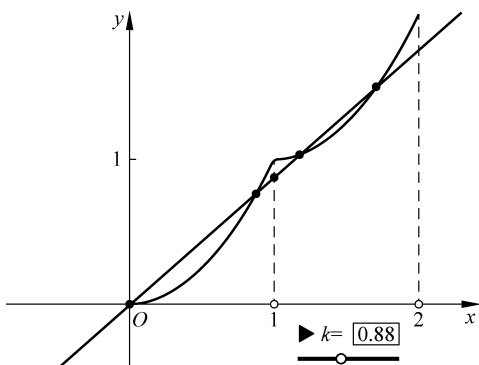


图 3.5.11

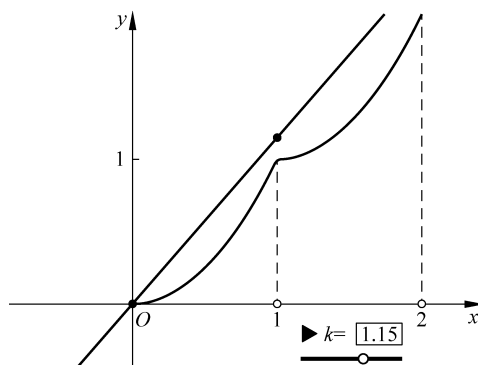


图 3.5.12

练习 1 (2011 新课标全国) 函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的图像与函数 $y = 2\sin\pi x (-2 \leq x \leq 4)$ 的图像所有交点的横坐标之和等于()。

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

编号: 177517



答案: B

练习 2 函数 $y = 2^x$ 与 $y = x^2$ 图像的交点个数为()。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 以上都不对

编号：177519



答案：C

练习3 已知函数 $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ ，若函数 $f(x)$ 的图像与 $y = x + a$ 至少有三个交点，则实数 a 的取值范围是()。

- A. $a \leq -1$ B. $-1 \leq a \leq -\frac{3}{4}$ C. $-1 < a \leq -\frac{3}{4}$ D. $a \geq -\frac{3}{4}$

编号：177526



答案：B

练习4(2014 天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 5x + 4|, & x \leq 0 \\ 2|x - 2|, & x > 0 \end{cases}$ ，若函数 $y = f(x)$ 与 $y = a|x|$ 恰有 4 个交点，则实数 a 的取值范围是_____。

编号：177531



答案：(1,2)