

第 1 章 数学建模简介

马克思曾强调,一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步。^① 随着大数据和人工智能时代的到来,数学不仅在工程技术、自然科学等领域发挥越来越重要的作用,而且在经济、金融、生物、医疗、环境、人口、交通等众多领域的应用也逐渐拓宽和加深。我国著名的数学家王梓坤院士曾说过:“今天的数学兼有科学和技术两种品质,数学科学是授人以能力的技术。”数学作为一门技术,现已成为高新技术的重要组成部分,也是未来高素质创新人才必须具备的一门技术。数学建模活动是实现数学技术的有效途径,也正是数学建模活动为大学的数学教学改革打开了一个重要的突破口。

1.1 数学模型与数学建模

1.1.1 数学模型

模型是对原型的一种抽象或模拟,这种抽象或模拟正是要抓住原型的本质,并且抛弃次要部分。由此可以得出,模型可以反映原型,但不等于原型,可以说是对原型的近似。

数学模型(Mathematical Model)可以表述为:基于现实世界的一个特定对象,为某个特定目标,根据其特有的内在规律,做出一些必要的简化假设,再运用适当的数学工具而得到的一个数学结构。事实上,人们所了解的微积分、柯西积分公式、万有引力定律、能量转换定律、相对论等都是非常具有代表性的数学模型。

数学模型目前还没有统一的定义,站在不同的角度可以有不同的定义,例如:

(1) 当一个数学结构作为某种形式语言(包括常用符号、函数符号、谓词符号等符号集合)解释时,该数学结构就称为数学模型。

(2) 数学模型一般是实际事物的一种数学简化。为了使描述更具科学性、逻辑性、客观性和可重复性,人们采用一种普遍认为比较严格的语言描述各种现象,这种语言就是数学。使用数学语言描述的事物就称为数学模型。

(3) 数学模型是为一定目的而做的一种关于部分现实世界抽象、简化的数学结构,简言之,数学模型是用数学术语对部分现实世界进行的描述。

总之,数学模型既源于现实,又高于现实,它运用数理逻辑方法和数学语言对实际问题进行简化和概括,方便人们更好地理解所要解决的实际问题。

数学模型可以根据不同的方式进行分类,下面介绍几种常用的分类方式。

^① 中共中央马克思恩格斯列宁斯大林著作编译局. 回忆马克思[M]. 北京: 人民出版社, 2005: 191.

(1) 按模型使用的数学方法,可分为几何模型、图论模型、微分方程模型、概率模型、最优控制模型、规划论模型、马氏链模型等类型。

(2) 按模型的时间关系,可分为静态模型和动态模型、定常参数模型和时变参数模型。

(3) 按变量的性质,可分为离散变量模型和连续变量模型、确定型变量模型和随机型变量模型、单变量模型和多变量模型、线性模型和非线性模型。

(4) 按模型的应用领域,可分为人口发展模型、交通模型、经济模型、生态模型、资源模型、环境模型等模型。

(5) 按建模的目的,可分为分析模型、预测模型、优化模型、决策模型、控制模型等类型。

(6) 按对模型结构的了解程度,可分为白箱模型、灰箱模型、黑箱模型等类型。

1.1.2 数学建模

数学建模是一种数学的思考方法,是运用数学语言和方法,通过抽象、简化建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段。数学建模架起了数学与现实问题之间联系的桥梁,是数学在各个领域广泛应用的媒介,是数学技术转化为应用的重要体现。如今,数学建模在科学技术发展中的重要作用日益凸显,越来越受工程技术、自然科学等领域的普遍重视,已成为现代科技工作者必备的重要能力之一。

为了适应当今高科技发展的需要,数学建模开始进入大学教育的视线。国内外越来越多的高校开始进行“数学建模”这门课程的教学,并且举办数学建模大赛来培养学生的数学素养,提高学生建立数学模型和运用计算机技术解决实际问题的综合能力,鼓励广大学生踊跃参加课外科技活动,拓宽知识面,培养创造精神和合作意识,推动大学数学教学体系、教学内容和方法的改革。为了满足培养高质量、高层次科技人才,许多院校逐步转变自己的教学方式,将抽象与具体、理论与实践相结合,努力探索更加有效的数学建模教学方法。“数学建模”课程与我国其他课程相比,难度更大,创新点更多,涉及面更广,因此对教师和学生的能力水平要求更高、更加严格。数学建模是一个“探索、发现、建模、求解、验证、完善”的过程,这要求我们摆脱过去以教师为核心、以授课为主要途径的传统教学模式,取而代之的是以学生为核心、以提高创新能力为目标、以动手操作为主要方法的新型教学模式。数学建模的教学与实践,不仅开阔了学生的视野,而且有利于培养创造力、思维能力、自学能力、综合应用知识能力、计算机应用能力、写作能力及团结合作精神,使学生能够在工作、学习中用数学思维解决问题,提高应用计算机软件的能力,将数学与计算机相结合来解决实际问题。

1.2 数学建模的步骤

数学建模是富有创造性的过程,其具有一定的阶段性:首先,对现实问题进行分析,研究如何将问题转化为数学语言;其次,对转化后的实际问题用数学方法进行分析研究,求出正确结果;最后,再次回到实际问题中,运用求出的模型解决和解释实际问题。数学建模的步骤如图 1-1 所示。

1. 模型准备

数学建模的问题通常都是来自现实生活中各个领域的实际问题,没有固定的方法和标

准答案。因此,数学建模的第一步是对问题所给的条件和数据进行分析,厘清对象的特征,明确要解决的问题、所要做的工作与所要完成的目标;同时,还要明确题目所给条件和数据的实际背景,从而可以清楚解决问题的意义和作用。

2. 模型假设

模型假设是指根据问题的实际意义,在明确研究对象的特征和建模目的的基础上,对所研究的问题进行必要的、合理的简化,用准确简练的语言进行表述,这是数学建模的重要一步。合理假设在数学建模中除了起着简化问题的作用外,还对模型的求解方法和使用范围起着限定作用。模型假设的合理性是评价一个模型优劣的重要指标之一,也是模型建立成败的关键所在。

假设合理性原则如下。

(1) 目的性原则:根据对象的特征和建模的目的,简化那些与建立模型无关或关系不大的因素。

(2) 适当性原则:所给出的假设条件过于简单或过于详细都可能使模型建立失败,因此要求假设条件简单、准确。

(3) 真实性原则:假设条件要符合情理,简化带来的误差应在实际问题所能允许的误差范围内,不合理的假设会导致模型失败。

需要注意的是,实际中要想做出合适的假设,需要一定的经验和探索。有时不一定一次就能成功,如果假设合理,则认为模型与实际问题比较吻合;如果假设与实际问题不吻合,就需要在建模过程中对已做的假设进行补充和修改。

3. 模型建立

在合理的假设之下,根据所给条件和数据,探索问题中相关变量或因素之间的数学规律,利用对象的内在规律和适当的数学工具构造各个变量之间的关系。在建立模型时究竟采用什么数学工具,要根据问题的特征、建模的目的及建模者的数学特长而定。数学的任何分支都能应用到建模过程中,而同一实际问题也可采用不同数学方法建立起不同的模型。

4. 模型求解

构造出数学模型之后,需根据已知条件和数据对模型的特征和结构特点进行分析。不同的数学模型的求解方法一般是不同的,通常涉及不同数学分支的专门知识和方法,这就要求我们除了熟练地掌握解方程、证明定理、逻辑运算、数值计算等各种传统数学知识和方法外,还应具备在必要时针对实际问题学习新知识的能力;同时,应具备熟练的计算机操作能力,熟练掌握一门编程语言和一两个数学工具软件包的使用,这会有助于高效、准确地解决问题。

5. 分析检验

由于数学模型是在一定的假设下建立的,而且利用计算机近似求解,其结果产生一定的误差是必然的,因此对于所求出的解,必须进行分析。首先是数学上的分析,有时要根据问题的性质,分析各变量之间的依赖关系或解的结果稳定性;有时要根据所得结果对实际问题的发展趋势进行预测;有时要给出数学上的最优决策或控制。除此之外,还需要进行误差分析、模型对数据的灵敏度分析等。其次需要对实际意义进行分析,即模型的解在实际中

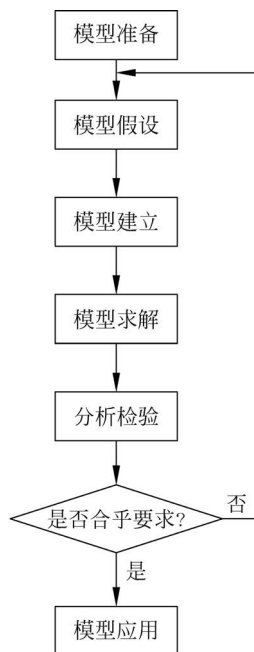


图 1-1 数学建模的步骤

说明了什么、效果怎样、模型的适用范围如何等。

6. 模型应用

对于所建立的数学模型及求解结果,只有放到实际问题中应用,通过了实践检验才能被证明是正确的。数学模型的应用非常广泛,而且越来越多地渗透到社会科学、生命科学、环境科学等领域中。由于建模是预测的基础,而预测又是决策与控制的前提,因此可应用数学模型对许多部门的实际工作进行指导,如节省开支、减少浪费、增加收入,特别是可以对未来进行预测和估计,这对促进科学技术和工农业生产的发展具有深远意义。

1.3 数学建模的作用

1.3.1 数学建模课程的思政作用

《高等学校课程思政建设指导纲要》指出,培养什么人、怎样培养人、为谁培养人是教育的根本问题,立德树人成效是检验高校一切工作的根本标准。全面推进课程思政建设,就是要寓价值观引导于知识传授和能力培养之中,帮助学生塑造正确的世界观、人生观、价值观,这是人才培养的应有之义,更是必备内容。数学建模课程也在不断地探索与思政相结合的教育模式,与习近平新时代中国特色社会主义思想、社会主义核心价值观、家国情怀、社会责任、文化自信、人文情怀、工匠精神等思想政治元素有机融合,从而达到立德树人的目标。数学建模课程的思政作用主要体现在以下几方面。

(1) 数学建模能增强学生的爱国意识。数学建模立足于解决经济、医学、环境、地质、人口、交通等领域中的问题,通过分析建模问题,把实际问题与数学联系起来,可以加深学生对国情的认识,引导学生关注国家发展、社会时事,树立正确的价值观、理想信念和家国情怀。

(2) 数学建模突出培育学生求真务实、实践创新、精益求精的工匠精神,锤炼踏实严谨、耐心专注、吃苦耐劳、追求卓越等优秀品质,使学生成长为心系社会、有责任、有担当的专业人才。在建模过程中,由于实际问题解决方案的非唯一性,学生在运用不同的数学方法解决问题的过程中不断试错,不断改进,进而从科学认识规律的角度掌握数学创新的思维及方法。另外,在数学建模中,学生需要秉持诚信的原则,坚决杜绝抄袭行为,这有利于学生形成诚实守信的优良品德及严谨治学的学术态度。

(3) 数学建模可以培养学生的科学素养和创新意识。建立一个合理的数学模型不是一蹴而就的,而是需要进行不断的推敲和尝试。在解决问题的过程中,每一步公式的推导、每一个问题的求解、每一个模型的优化,都在潜移默化地提高学生运用数学解决问题的能力,提升学生的科学素养。在建模过程中,学生可以体会到对现实问题由浅入深、由表及里的探索过程,并且愿意研究现实生活中隐藏的奥秘。

(4) 数学建模可以培养学生的团队协作能力。大学生数学建模竞赛要求以队为单位参赛,参赛队由指导教师和若干名队员组成。任何团队工作的顺利进行都离不开团队合作和团队精神,团队成员之间的有效沟通对工作的开展至关重要。参赛过程中,每一名队员都需要明确自己的工作。多人组成的团队必须合理分工,取长补短,充分发挥每名队员的聪明才智,达到个人与团队的有机结合,实现“人力资源”的最大化利用。

(5) 数学建模中处处体现着数学美。描述问题时精练语言之美、数学公式创新之美、数

学模型解法的奇异之美、数学建模过程的和谐之美都是数学美的体现。另外,同一个问题可以建立多个数学模型,这些模型也是审美意识的具体应用。数学的神秘性使人产生幻想和揭示其奥妙的欲望,它也可以激发学生探求未知的欲望和对美的不懈追求。

1.3.2 数学建模对大学生能力的培养作用

随着我国高等教育的快速发展,大学已经成为我国高层次创新型人才的主要培养基地和高科技领域原始创新的源头。在数学建模过程中,学生需要用数学语言表达问题,需要用数学方法构建模型解决实际问题,需要在不断的头脑风暴中求索,需要经受脑力和体力的考验,因此数学建模能够培养学生多方面的能力。

(1) 文献检索和信息收集能力。数学建模是多学科知识、技能和能力的高度综合,对学生来说涉及许多未知领域,这就要求具备丰富的知识储备。学生需要自学掌握文献检索和信息收集技能,广泛查阅资料,加深对问题的了解,这大大锻炼和提高了学生的文献检索和信息收集能力。

(2) 知识拓展和综合运用能力。数学建模问题大多来源于实际问题,其背景可能涉及经济、生物、医学、环境、人口、交通等各个领域。全国大学生数学建模竞赛的时间仅有三天,学生必须在较短时间内通过自学掌握自己从未涉及的相关知识,并且灵活地把相关领域的知识与数学方法、计算机应用快速有效地结合起来,这就拓展了学生的知识领域并提高了学生对知识的综合运用能力。

(3) 数学软件的应用能力。在对数学模型的求解过程中需要大量的编程、计算、作图等工作,以处理建模所用到的数据。熟练应用 MATLAB、Python、R 等软件完成复杂的数学计算,是参加数学建模的参赛者必须具备的技能,这也是对每一名参赛者的要求。因此,数学建模活动对提高学生的计算机操作能力及编程能力的作用是不言而喻的。

(4) 逆向思维能力。逆向思维主要在于思维的独特性和新颖性,甚至打破常规思维。在数学建模过程中,有时如果打破“时空顺序”,颠倒问题发生、发展的顺序,沿着相反的思路对问题进行展开,会产生意想不到的效果。因此,数学建模有利于培养学生的逆向思维。

(5) 科研创新能力。由于建模主题来自实际问题,因此没有标准答案,具有很大的灵活性,学生可以从不同角度分析问题,运用不同方法解决问题,有利于提高学生的创新能力。

1.4 数学建模论文的撰写

当参加数学建模竞赛时,竞赛论文是评价小组建模工作的唯一依据,而竞赛要求在三天内完成建模的所有工作,包括论文写作。因此,在赛前学习如何撰写建模论文是非常必要的。参赛者既要熟悉数学建模论文各部分内容的写作方法,又要具备良好的掌握时间节奏的能力。

数学建模竞赛章程规定,对论文的主要评价标准为“假设的合理性,建模的创造性,结果的正确性和文字表述的清晰程度”,所以在论文中应尽力诠释这些特点。下面简单介绍数学建模论文的主要组成部分及各部分内容的撰写方法。

1. 题目

论文题目是一篇论文给出的涉及论文范围及水平的第一个重要信息,既要准确表达论文内容,恰当反映所研究的范围和深度,又要尽可能概括、精练。

2. 摘要

摘要是论文内容的简短陈述,其作用是使读者不必阅读论文全文即能获得必要的信息。在数学建模论文中,摘要是非常重要的部分。数学建模论文的摘要应包含以下内容:所研究的实际问题、建立的模型、求解模型的方法、获得的基本结果及对模型的检验或推广。论文摘要需要用概括、简练的语言反映这些内容,尤其要突出论文的优点,如巧妙的建模方法、快速有效的算法、合理的推广等。全国大学生数学建模竞赛的摘要字数在300字以内为宜,从2001年开始,为了提高论文评选效率,大赛组委会要求论文第一页上只写题目和摘要,对摘要字数已无明确限制,故在摘要中也可适当出现反映结果的图、表和数学公式。

3. 问题重述

数学建模比赛要求解决给定的问题,所以论文中应叙述给定的问题。撰写这部分内容时,不要照抄原题,而应把握问题的实质,用简短精练的语言叙述问题。

4. 模型假设

建模时,要根据问题的特征和建模目的抓住问题的本质,对问题进行必要的简化,做出一些合理的假设。论文中的假设要以严格、确切的数学语言来表达,使读者不产生任何曲解。假设做得不合理或太简单,会导致模型无用或者错误;假设做得过于详尽,试图把复杂对象的众多因素都考虑进去,会使工作变难甚至无法继续下去。因此,在做出假设后应验证假设的合理性,选择最恰当的假设。

5. 分析与建立模型

这部分内容要根据假设,用数学语言符号抽象而确切地描述对象的内在规律,通过一定的数学方法建立方程式或归纳为其他形式的数学问题。在撰写这部分时,需要用分析和论证的方法,让评审专家清楚地了解建立模型的过程;对所用的变量符号、计量单位应做解释,特定的变量和参数应在文中保持一致,使模型易懂。总之,要把得到模型的过程表达清楚,方便评审专家更快地判断该模型的合理性。

6. 模型求解

模型是使用各种数学方法或软件包求解的。此部分应包括求解过程的公式推导、算法步骤及计算结果。为求解而编写的计算机程序应放在附录部分,有时需要对求解结果进行数学上的分析,如结果的误差分析、模型对数据的稳定性或灵敏度分析等。

7. 模型检验

把求解和分析结果反演到实际问题,与实际对象的现象、数据进行比较,检验模型的可靠性、合理性和适用性。如果结果不合理,需要对模型进行补充修正,甚至重新建模,这一步十分关键。

8. 模型推广

将该问题的模型推广到解决更多的类似问题,或讨论给出该模型的更一般情况下的解法,或指出可能的深化、推广及进一步研究的建议。

9. 参考文献

在正文中提及或直接引用的文献或原始数据应注明出处,并将相应的出版信息列在参

考文献中,参考文献的具体格式可参照数学建模竞赛的有关规定。

10. 附录

附录是正文的补充,与正文有关而又不便于写入正文的内容都收集在这里(如果有需要就保留,不需要可以舍弃),包括计算机程序、比较重要但数据量较大的中间结果等。为便于阅读,应在源程序中加入必要的注释和说明语句。

1.5 数学建模竞赛

1.5.1 全国大学生数学建模竞赛

全国大学生数学建模竞赛(以下简称“竞赛”)始于1992年,每年一届,是中国工业与应用数学学会(China Society for Industrial and Applied Mathematics,CSIAM)主办的面向全国大学生的群众性科技活动,旨在激励学生学习数学的积极性,提高学生建立数学模型和运用计算机技术解决实际问题的综合能力,鼓励广大学生踊跃参加课外科技活动,拓宽知识面,培养创造精神及合作意识,推动大学数学教学体系、教学内容和方法的改革。

竞赛题目一般来源于科学与工程、人文与社会科学(含经济管理)等领域,是经过适当简化加工的实际问题,不要求参赛者预先掌握深入的专门知识,只需要学过高等学校的数学基础课程。题目有较大的灵活性,供参赛者发挥其创造能力。参赛者应根据题目要求,完成一篇包括模型假设、建立和求解、计算方法的设计和计算机实现、结果的分析和检验、模型的改进等方面的论文(答卷)。竞赛评奖以假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表述的清晰程度为主要标准。

1.5.2 中国研究生数学建模竞赛

中国研究生数学建模竞赛是一项面向在校研究生进行数学建模应用研究的学术竞赛活动,是广大在校研究生提高建立数学模型和运用互联网信息技术解决实际问题能力,培养科研创新精神和团队合作意识的大平台。其因综合性、创新性和实践性等特性吸引优秀人才加入,参赛队伍规模不断壮大。

中国研究生数学建模竞赛起源于2003年,最初是由东南大学发起并主办的“南京及周边地区高校研究生数学建模竞赛”,2004年更名为“全国研究生数学建模竞赛”,2013年被纳入教育部学位中心主办的中国研究生创新实践系列大赛。2017年参赛高校扩大到国外高校,再次更名为“中国研究生数学建模竞赛”。2020年,由华东理工大学承办第17届竞赛,共吸引了来自国内外的523所高校和部分研究院的17219支队伍51657名研究生报名参赛,该赛事已从地区性活动发展为全国性甚至是国际性活动,受到了广泛的关注。

1.5.3 美国大学生数学建模竞赛

美国大学生数学建模竞赛(Mathematical Contest in Modeling/Interdisciplinary Contest in Modeling,MCM/ICM)由美国数学及其应用联合会主办,是国际性数学建模竞赛,也是世界范围内最具影响力的数学建模竞赛。MCM始于1985年,ICM始于1999年,MCM/ICM着重强调研究和解决方案的原创性、团队合作、交流及结果的合理性。

MCM/ICM 的宗旨是鼓励大学师生对范围并不固定的各种实际问题予以阐明、分析并提出解法,强调实现完整的模型构造过程。MCM/ICM 是一种完全公开的竞赛,每年选取若干个来自不同领域的实际问题,学生以 3 人一队的形式参赛,在 4 天内任选一题,完成该实际问题的数学建模全过程,并就问题的重述、简化、假设及其合理性,数学模型的建立和求解(及软件)、检验和改进,模型的优缺点及其可能的应用范围等内容写出论文。由专家组成的评阅组评出优秀论文,并给予参赛者某种奖励。MCM/ICM 规定,在竞赛期间参赛者不得与队外任何人(包括指导教师)讨论赛题,但可以利用各种图书资料、互联网上的资料、计算机和软件等,为充分发挥参赛者的创造性提供了广阔的空间。

第2章 Python简介

重点内容

- ◇ Python 的安装和启动。
- ◇ Python 的基本数据类型。
- ◇ 条件判断及循环结构。

难点内容

- ◇ 类的定义及使用。
- ◇ 使用 NumPy 库处理高维数组。
- ◇ 使用 Matplotlib 库绘制图形。

Python 是一种具有动态语义、面向对象的解释型高级编程语言。Python 语法和动态类型,以及解释型语言的本质,使其成为多数平台上写脚本和快速开发应用的编程语言。随着 Python 版本的不断更新和新功能的添加,其逐渐被用于独立的、大型项目的开发。Python 功能强大,可以满足数学建模的需要,因此本书中的数学模型的编程实现以 Python 语言为主。本章思维导图如图 2-1 所示。

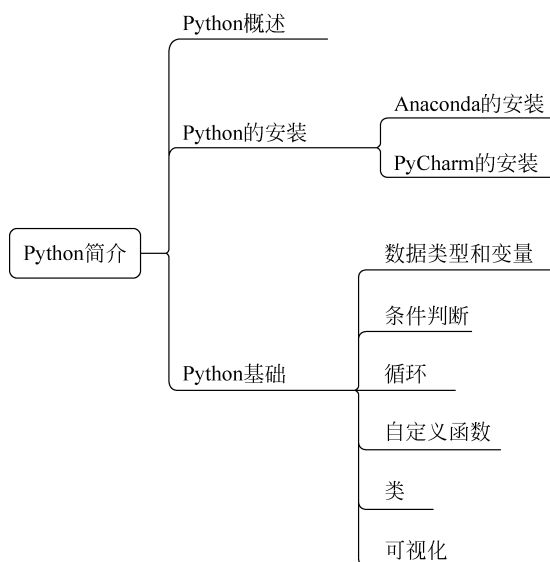


图 2-1 本章思维导图

2.1 Python 概述

Python 的设计理念强调代码的可读性和语法的简洁性,尤其是使用空格缩进划分代码块,而非使用花括号或者关键词,让开发者能够用更少的代码表达想法。不管是小型还是大型程序,都试图让程序的结构清晰明了。由于语法简洁而清晰,且具有丰富和强大的类库,Python 往往能够用几行简单的代码就可以驱动操作系统及实现应用程序的多样化功能。Python 能够将不同语言编写的程序拼在一起,因此它又被称为胶水语言。

Python 是由 Guido van Rossum 于 20 世纪 80 年代末 90 年代初,在荷兰国家数学和计算机科学研究所设计出来的。Python 有很多版本,用一个 Python 版本编写的程序未必与用另一个 Python 版本编写的程序兼容。

Python 2.0 于 2000 年 10 月 16 日发布,其增加了完整的垃圾回收功能,并且支持 Unicode。Python 3.0 于 2008 年 12 月 3 日发布,此版不完全兼容之前的 Python 源代码。不过,Python 3.0 的很多新特性后来也被移植到旧的 Python 2.6/2.7 版本,相对于 Python 的早期版本,这是一个较大的升级。Python 3.x 版本(x 表示不断递增的编号)也十分优秀,其去除了很多容易让人混淆的语言功能。目前来看,Python 3.x 的设计理念更加人性化,大规模普及和应用已经是大势所趋。

在科学领域,特别是在机器学习、统计建模、数据科学领域,Python 也被广泛使用。Python 除了具有高性能之外,凭借着 NumPy、SciPy 等优秀的数值计算、统计分析库,在数据科学领域占有不可动摇的地位。

2.2 Python 的安装

要使用 Python 语言进行程序开发,必须安装其开发环境,即 Python 解释器。由于 Python 自身缺少 NumPy、Matplotlib(绘图库)、SciPy、Scikit-learn 等一系列包,因此需要安装 pip 来导入这些包才能进行相应运算,但每次进入 Python 时都需要重新导入所需的包,这就使得操作略微烦琐。对于初学者而言,可以利用第三方 Python 集成开发环境(Integrated Development Environment, IDE)进行程序设计,本书推荐直接安装 Anaconda。

2.2.1 Anaconda 的安装

Anaconda 是 Anaconda 公司提供的 Python 集成版,当在计算机上安装好 Anaconda 3 时,就相当于安装好 Python,以及 NumPy、SciPy、Pandas、IPython、Matplotlib、Scikit-learn 和 NLTK 等一些常用的库。

以 Windows 操作系统为例,进入 Anaconda 官网(<https://www.anaconda.com>),根据操作系统是 32 位还是 64 位选择对应的版本进行下载。下载好后运行该文件,按照提示进行安装即可。安装完 Anaconda 后,就可以使用其中的 Spyder 和 Jupyter Notebook 集成开发环境。