绪论　条件充分性判断题

条件充分性判断是管理类联考数学部分第二题型，引自于国外GMAT考试。该题型主要考查学生的逆向思维能力，需结合数学和逻辑推理知识求解，要求较高，很多考生做此类题型时错误率极高。本部分将详细介绍此种题型的解法。

一、充分性定义

两个命题A和B，若由命题A成立，可以肯定推出命题B也成立（即 $A \Rightarrow B$ 为真命题），则称命题A是命题B成立的充分条件。

二、解题说明及选项含义

条件充分性判断题由一个结论、两个条件和五个选项组成。此类题要求判断所给的条件是否能够完全肯定地推出题干中的条件，即只需要分析条件是否充分即可。五个选项是固定的，其所规定的含义严格按照考试大纲给出的标准定义，呈现如下：

若条件(1)充分，但条件(2)不充分，选A；

若条件(1)不充分，但条件(2)充分，选B；

若条件(1)和(2)单独都不充分，但条件(1)和(2)联合起来充分，选C；

若条件(1)充分，条件(2)也充分，选D；

若条件(1)和(2)单独都不充分，条件(1)和(2)联合起来也不充分，选E。

三、基本解法

(1) 自下而上：由条件推导结论，这是最基本的解法，但需保证条件的所有情况都可以肯定推出结论，则条件才是充分的。

(2) 自上而下：如果结论比较复杂，找不到条件和结论的关联，可以先从结论出发，找到结论的同义替换，再从条件推导结论（其本质仍然回归到自下而上）。

四、解题技巧

(1) 特值法：从条件中取特值，代入结论验证。此种情况需要注意：从条件中取特值代入结论符合，但条件不一定充分。

(2) 反例法：从条件中找到一个反例推翻了结论，则条件一定不充分。

注意：基础阶段只需要掌握前两种技巧即可，下面的技巧需要经过大量题型训练之后，再学习利用，否则效果不佳。

(3) 两条件矛盾型：当两个条件矛盾时，一般考虑选A、B、D、E。

(4) 两条件等价型：当两个条件为等价命题时，一般考虑选D，E。

(5) 两条件包含型：当两条件具备包含关系时，比如条件(2)的范围包含了条件(1)的范围，一般考虑选 A、D、E。

(6) 两条件红花绿叶型：当其中的一个条件是等量表达式(红花)，另一个条件是范围限定(绿叶)，一般考虑选 C、E。

(7) 当两个条件至少有一个是充分的，不再考虑联合，一般考虑选 A、B、D。

(8) 当两个条件都不充分时，才考虑联合，一般考虑选 C、E。

五、例题精讲

【例 1】$1<x<10$。

(1) $2<x<6$。　　(2) $x=4$。

【解析】条件(1)，x 的范围被包含在结论里，充分；条件(2)，$x=4$ 在结论范围里，也充分，答案选 D。

【例 2】$3<x<16$。

(1) $1<x<8$。　　(2) $5<x<18$。

【解析】条件(1)，举反例 $x=2$，推不出结论，不充分；条件(2)，举反例 $x=17$，推不出结论，也不充分；考虑联合，取其交集为 $5<x<8$，此时是结论的子集，联合充分，答案选 C。

【例 3】$|x|=1$。

(1) $x=1$。　　(2) $x=-1$。

【解析】把条件(1)和(2)中的 x 值都代入结论符合，两个条件都充分，答案选 D。

【例 4】$x=\pm 1$。

(1) $x=1$。　　(2) $x=-1$。

【解析】$x=\pm 1$ 表示 $x=1$ 或 $x=-1$，包含两种情况，条件(1)和(2)均为结论的子集，都充分，答案选 D。

【例 5】$x\geqslant 1$。

(1) $x>1$。　　(2) $x=1$。

【解析】$x\geqslant 1$ 表示 $x>1$ 或 $x=1$，包含两种情况，条件(1)和(2)均为结论的子集，都充分，答案选 D。

【例 6】$x>5$。

(1) $x\geqslant 5$。　　(2) $x\geqslant 6$。

【解析】条件(1)，举反例 $x=5$，不能推出结论，不充分；条件(2)，$x\geqslant 6$ 是结论的子集，充分，答案选 B。

【例 7】$(x+3)(x-5)=0$。

(1) $x=\pm 5$。　　(2) $x>0$。

【解析】结论为 $x=-3$ 或 $x=5$。条件(1)，举反例 $x=-5$，不能推出结论，不充分；条件(2)，$x>0$，也不充分；条件(1)和(2)联合取交集为 $x=5$，是结论的子集，充分，答案选 C。

第1章　实数、绝对值、比例和平均值

- 算术
  - 实数
    - 【考点1】奇数、偶数、质数、合数
    - 【考点2】有理数、无理数性质
      - 【题型1】判定数是有理数还是无理数
      - 【题型2】有理数和无理数的组合性质
      - 【题型3】无理数的整数部分及小数部分
      - 【题型4】无理式去根号
      - 【题型5】无限循环小数化分数
    - 【考点3】整除、余数问题
    - 【考点4】公倍数与公约数
      - 【题型1】利用公式求公倍数与公约数
      - 【题型2】公倍数与公约数的应用
  - 绝对值
    - 【考点5】绝对值的代数意义
    - 【考点6】绝对值的非负性
      - 【题型1】配方型非负性
      - 【题型2】定义域型非负性
      - 【题型3】两式型非负性
      - 【题型4】利用非负性求最值
    - 【考点7】绝对值的自比性
    - 【考点8】绝对值三角不等式
    - 【考点9】绝对值的几何意义
  - 比例
    - 【考点10】基本比例计算问题
    - 【考点11】合（分）比定理
    - 【考点12】等比定理
    - 【考点13】正比反比
  - 平均值
    - 【考点14】平均值基本定义
    - 【考点15】平均值定理求最值
      - 【题型1】凑系数型
      - 【题型2】凑项型
      - 【题型3】凑指数型
      - 【题型4】分离型（分式求最值）

1.1　知识要点归纳

一、实数的基本概念和应用

1. 整数、自然数

整数：$-2,-1,0,1,2$这样的数称为整数。整数包含正整数、0和负整数，符号为$\mathbf{Z}$。

自然数：$0,1,2,3,\cdots$，符号为$\mathbf{N}$(最小的自然数是0)。

2. 奇数、偶数

奇数：不能被2整除的数，一般用$2n+1(n\in \mathbf{Z})$表示。

偶数：能被2整除的数，一般用$2n(n\in \mathbf{Z})$表示。注意0能被2整除，所以0是偶数。

奇偶组合性质如下。

奇数＋奇数＝偶数；奇数＋偶数＝奇数；偶数＋偶数＝偶数；

奇数×奇数＝奇数；奇数×偶数＝偶数；偶数×偶数＝偶数。

3. 质数、合数

质数：除了1和它本身以外，不能被其他自然数整除的正整数，如5只能被1和5整除。

合数：除了1和它本身以外，还能被其他自然数整除的正整数，如4不仅能被1和4整除，还能被2整除。

质数、合数的重要性质如下。

(1) 小于20的质数：2,3,5,7,11,13,17,19。

(2) 最小的质数是2,2既是质数也是偶数,2是唯一的质偶数，除2以外的质数都是奇数。

(3) 若两个正整数a,b满足$a\times b=$质数，则a,b中必有一个为1(质数只能分解为1和它本身相乘)。

(4) 如果两个质数的和或者差是奇数，则其中必有一个是2；如果两个质数的积是偶数，则其中也必有一个是2。

(5) 最小的合数是4，把一个合数分解成几个质数乘积的形式，称为分解质因数，如$30=5\times 3\times 2$。

(6) 互质数：公约数只有1的两个数称为互质数，如9和16。

4. 有理数、无理数

实数是有理数和无理数的统称。

有理数包括整数、有限小数和无限循环小数。

无理数指无限不循环小数。

实数的具体分类见图1-1。

常见的无理数有：

(1) 圆周率π，自然对数e；

(2) 带有根号，如$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$；

(3) 对数函数，如$\log_2 3$。

- 实数
  - 有理数（有限小数、无限循环小数）
    - 正有理数
      - 正整数
      - 正分数
    - 0
    - 负有理数
      - 负整数
      - 负分数
  - 无理数（无限不循环小数）
    - 正无理数
    - 负无理数

图 1-1　实数的分类

5. 整除、倍数、约数

整除：当整数 a 除以非零整数 b，商是整数时，则称 a 能被 b 整除。

整除特点如下。

(1) 能被 2 整除的数：个位为 0，2，4，6，8；

(2) 能被 3(9)整除的数：各数位的数字之和必能被 3(9)整除；

(3) 能被 4(8)整除的数：末两(三)位数字必能被 4(8)整除；

(4) 能被 5 整除的数：个位为 0 或 5；

(5) 能被 6 整除的数：同时能被 2 和 3 整除；

(6) 能被 10 整除的数：个位必为 0；

(7) 能被 11 整除的数：从右向左，奇数位的数字之和减去偶数位的数字之和能被 11 整除(包括 0)。

倍数、约数：当 a 能被 b 整除时，则 a 是 b 的倍数，b 是 a 的约数。

最小公倍数：几个数公有的倍数称为公倍数，其中最小的一个数称为这几个数的最小公倍数。a，b 两个数的最小公倍数可以表示成 $[a,b]$，如 6，9 的最小公倍数为 $[6,9]=18$。

最大公约数：几个数公有的约数称为公约数(又称公因数)，其中最大的一个数称为最大公约数。a，b 两个数的最大公约数可以表示成 (a,b)，如 6，9 的最大公约数为 $(6,9)=3$。

求最小公倍数有以下两种方法。

(1) 公式法。两数乘积＝最大公约数×最小公倍数，即 $a\times b=(a,b)\times[a,b]$。若已知两数乘积及这两数的最大公约数，则可利用此公式求最小公倍数；若要求三个数的最小公倍数，仍可利用上述公式，先求得其中两个数的最小公倍数，再求这个最小公倍数与第三个数的最小公倍数即为所求结果。

(2) 短除法。先用这几个数的公约数除以每一个数，再用部分数的公约数去除，并把不能整除的数移下来，一直除到所有的商中每两个数都是互质的为止，然后把所有的除数和商连乘起来，所得的积就是这几个数的最小公倍数。

二、绝对值

1. 代数定义

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

2. 几何定义

$|a|$表示在数轴上a点到原点0的距离；

$|a-b|$表示数轴上a点到b点的距离。

3. 绝对值的性质

(1) 对称性：$|-a|=|a|$；

(2) 等价性：$\sqrt{a^2}=|a|,|a|^2=|a^2|=a^2$；

(3) 自比性：$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,\dfrac{|a|}{a}=\dfrac{a}{|a|}=\begin{cases}1, & a>0\\ -1, & a<0\end{cases}$；

(4) 非负性：$|a|\geqslant 0,a^2\geqslant 0,a^4\geqslant 0,\cdots,\sqrt{a}\geqslant 0,\sqrt[4]{a}\geqslant 0,\cdots$。

4. 绝对值基本不等式

$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$($x$到原点的距离小于$a$)；

$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x<-a$或$x>a$($x$到原点的距离大于$a$)。

5. 绝对值三角不等式

基本公式为$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$，等号成立的条件见表1-1。

表1-1　三角不等式中等号成立的条件

表达式	成立条件	举　例
$\lvert a+b\rvert=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	$ab\geqslant 0$	$\lvert 3+2\rvert=\lvert 3\rvert+\lvert 2\rvert$
$\lvert a-b\rvert=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	$ab\leqslant 0$	$\lvert 3-(-2)\rvert=\lvert 3\rvert+\lvert(-2)\rvert$
$\lvert a+b\rvert=\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$	$ab\leqslant 0$且$\lvert a\rvert\geqslant\lvert b\rvert$	$\lvert 3+(-2)\rvert=\lvert 3\rvert-\lvert(-2)\rvert$
$\lvert a-b\rvert=\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$	$ab\geqslant 0$且$\lvert a\rvert\geqslant\lvert b\rvert$	$\lvert 3-2\rvert=\lvert 3\rvert-\lvert 2\rvert$

三、比和比例

1. 比

两个数a,b相除又可称为这两个数的比，即$a:b=\dfrac{a}{b}$。若a除以b的商为k，则称k为$a:b$的比值。

2. 比例

如果$a:b$和$c:d$的比值相等，则称a,b,c,d成比例，记做$a:b=c:d$或$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$。其中$a$和$d$叫作比例外项，$b$和$c$叫作比例内项，当$a:b=b:c$时，称$b$为$a$和$c$的比例中项。

3. 正比和反比

正比：若$y=kx(k\neq 0,k$为常数$)$，则称y与x成正比，k为比例系数；

反比：若$y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0,k$为常数$)$，则称y与x成反比，k为比例系数。

4. 比例基本定理

(1) 更比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$；

(2) 反比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$；

(3) 合比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$(等式左右同加1)；

(4) 分比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$(等式左右同减1)；

(5) 合分比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$((3)式除以(4)式)；

(6) 等比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}(b+d+f\neq 0)$。

四、平均值

1. 平均值基本定义

(1) 算术平均值

有 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，称 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 为这 n 个数的算术平均值，记为 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$。

(2) 几何平均值

有 n 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，称 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 为这 n 个数的几何平均值，记为 $x_g=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$。

2. 平均值定理

有 n 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其算术平均值大于等于其几何平均值，即 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$(当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，取等号)。

3. 平均值定理的运用

对于两个数：$a>0,b>0,\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时，取等号)。

转化(1)：$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$(当 a,b 两数乘积为定值时，可得两数之和的最小值)；

转化(2)：$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$(当 a,b 两数之和为定值时，可得两数乘积的最大值)；

转化(3)：$a+\frac{1}{a}\geqslant 2(a>0)$；$a+\frac{1}{a}\leqslant -2(a<0)$；

转化(4)：$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$。

对于三个数：$a>0,b>0,c>0,\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$（当且仅当$a=b=c$时，取等号）。

求最值口诀：一正，二定，三相等。

1.2　基础精讲例题

一、奇数、偶数、质数、合数

【例 1-1】如果a,b均为质数，且$3a+7b=97$，则$a+b=$(　　)。

A. 14　　B. 15　　C. 16　　D. 17　　E. 18

【解析】97为奇数，一奇一偶相加所得，又a,b均为质数，所以a,b必有一个为2，当$a=2$时，$b=13$；当$b=2$时，$a=\frac{83}{3}$，不符合，因此$a+b=15$，答案选B。

【套路】此类题是奇、偶、质、合联合考查，应先根据已知数据的奇偶性判定未知变量的奇偶性，再通过质、合，讨论确定数值。

【例 1-2】(2014-1)若几个质数(素数)的乘积为770，则它们的和为(　　)。

A. 85　　B. 84　　C. 28　　D. 26　　E. 25

【解析】分解质因数，$770=11\times7\times5\times2$，其和为$11+7+5+2=25$，答案选E。

【例 1-3】(2015-1)设m,n是小于20的质数，满足条件$|m-n|=2$的$\{m,n\}$共有(　　)。

A. 2组　　B. 3组　　C. 4组　　D. 5组　　E. 6组

【解析】小于20的质数分别是2,3,5,7,11,13,17,19，满足条件的集合有$\{3,5\},\{5,7\},\{11,13\},\{17,19\}$，由于集合具有无序性，因此共有4组，答案选C。

【例 1-4】(2021-1)设p,q是小于10的质数，则满足条件$1<\frac{q}{p}<2$的p,q有(　　)组。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 6

【解析】10以内的质数有2,3,5,7，则满足条件的有$\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{5}$，共3组，答案选B。

二、有理数、无理数性质

【例 1-5】设$m=\sqrt{5}+2$，则$m+\frac{1}{m}$的整数部分为(　　)。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 以上结论均不正确

【解析】$m+\frac{1}{m}=\sqrt{5}+2+\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}+2+\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2=2\sqrt{5}<5$，其整数部分是4，答案选C。

【例 1-6】如果$(2+\sqrt{2})^2=a+b\sqrt{2}$($a,b$为有理数)，那么$a-b$等于(　　)。

A. 2　　B. 3　　C. 8　　D. 10　　E. 以上结论均不正确

【解析】$(2+\sqrt{2})^2=6+4\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$，则$a=6,b=4,a-b=2$，答案选A。

【套路】已知a,b,c,d为有理数，$\sqrt{c},\sqrt{d}$为无理数，满足$a+\sqrt{c}=b+\sqrt{d}$，利用“门当

户对"原则，则 $a=b,c=d$。

三、整除、余数问题

【例 1-7】三个数的和是 312，这三个数分别能被 7，8，9 整除，而且商都相同，则最大的数与最小的数相差(　　)。

A. 18　　B. 20　　C. 22　　D. 24　　E. 26

【解析】设商都为 n，则三个数分别为 $7n,8n,9n$，$7n+8n+9n=312$，解得 $n=13$，最大的数与最小的数相差 $9n-7n=2n=2\times13=26$，答案选 E。

【例 1-8】若 n 是正整数，则 n^3-n 一定有约数(　　)。

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8　　E. 12

【解析】$n^3-n=n(n^2-1)=n(n+1)(n-1)$，根据定理：连续 n 个整数乘积一定能被 $n!$ 整除，又 $n(n+1)(n-1)$ 是三个连续的整数乘积，因此一定能被 $3!=6$ 整除，答案选 B。

【技巧】特值法排除，令 $n=2$，$n^3-n=6$；令 $n=3$，$n^3-n=24$，观察选项都有约数 6，答案选 B。

【例 1-9】自然数 n 的 13 倍除以 10 的余数为 9，则 n 的个位数字为(　　)。

A. 2　　B. 3　　C. 5　　D. 7　　E. 9

【解析】被除数 = 除数 × 商 + 余数，则 $13n=10\times$ 商 $+9$，即 $13n-9=10\times$ 商，所以 $13n-9$ 是 10 的倍数，可以推出 $13n$ 的个位数字为 9，因此 n 的个位数字为 3，答案选 B。

【套路】被除数 = 除数 × 商 + 余数，可以转化为被除数 − 余数 = 除数 × 商。余数问题可以转化为整除问题进行求解。

【技巧】通过代入法排除，当 $n=3$ 时，$13n=39$，除以 10 的余数为 9，答案选 B。

四、公倍数与公约数

【例 1-10】甲每 9 天进城一次，乙每 12 天进城一次，丙每 15 天进城一次，某天三人在城里相遇，那么距离下次相遇的时间至少是(　　)天。

A. 60　　B. 180　　C. 270　　D. 300　　E. 360

【解析】要求距离下次相遇的最少天数，即求 9，12，15 的最小公倍数，$[9,12,15]=180$，答案选 B。

【例 1-11】将长为 18cm，宽为 12cm 的长方形截成若干个相同的正方形(边长是整厘米数)且没有剩余，则所截得的正方形最少为(　　)个。

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8　　E. 12

【解析】截成的正方形的边长应尽可能大，即求 18 和 12 的最大公约数。$(18,12)=6$，则所截得的正方形最少为 $\dfrac{18}{6}\times\dfrac{12}{6}=6$ 个，答案选 C。

五、绝对值的代数意义

【例 1-12】已知 $t^2-3t-18\leqslant0$，则 $|t+4|+|t-6|=$(　　)。

A. $2t-2$　　B. 10　　C. 3　　D. $2t+2$　　E. 以上结论均不正确

【解析】根据题意，$(t+3)(t-6)\leqslant0$，解得 $-3\leqslant t\leqslant6$，则 $t+4>0$，$t-6\leqslant0$，去掉绝

对值符号可得$|t+4|+|t-6|=(t+4)+(6-t)=10$，答案选B。

【技巧】特值法，当$t=0$时，符合不等式，代入原式结果为10，答案选B。

【例1-13】已知$\left|\dfrac{5x-3}{2x+5}\right|=\dfrac{3-5x}{2x+5}$，则实数$x$的取值范围为(　　)。

A. $x<-\dfrac{5}{2}$或$x\geqslant\dfrac{3}{5}$　　B. $-\dfrac{5}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{5}$　　C. $-\dfrac{5}{2}<x\leqslant\dfrac{3}{5}$

D. $-\dfrac{3}{5}\leqslant x<\dfrac{5}{2}$　　E. 以上结论均不正确

【解析】已知$\left|\dfrac{5x-3}{2x+5}\right|=\dfrac{3-5x}{2x+5}$，去掉绝对值变为了相反数，则绝对值里面的数$\dfrac{5x-3}{2x+5}\leqslant 0$，即$\begin{cases}(5x-3)(2x+5)\leqslant 0\\ 2x+5\neq 0\end{cases}$，解得$-\dfrac{5}{2}<x\leqslant\dfrac{3}{5}$，答案选C。

【套路】①若$|a|=-a$，则$a\leqslant 0$；②$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant(\leqslant)0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\geqslant(\leqslant)0\\ g(x)\neq 0\end{cases}$。

【技巧】通过特值法排除，$x=0$符合等式，排除A；分母不能为零，即$x\neq-\dfrac{5}{2}$，排除B；$x=2$不符合等式，排除D，答案选C。

【例1-14】(2019-1)设a,b满足$ab=6$，$|a+b|+|a-b|=6$，则$a^2+b^2=$(　　)。

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13　　E. 14

【解析】$ab=6>0$，则a,b同号。令$a>b>0$，去掉绝对值符号，则$|a+b|+|a-b|=(a+b)+(a-b)=2a=6$，则$a=3$，$b=\dfrac{6}{a}=2$，因此$a^2+b^2=13$，答案选D。

【技巧】特值法，由$ab=6$很容易想到$ab=6=1\times 6=2\times 3$，代入$|a+b|+|a-b|=6$验证，得到$a=2$，$b=3$，符合，因此$a^2+b^2=13$，答案选D。

六、绝对值的非负性

【例1-15】已知$|x-y+1|+(2x-y)^2=0$，那么$\log_y x=$(　　)。

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 2　　E. 3

【解析】利用非负性得$\begin{cases}x-y+1=0\\ 2x-y=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$，则$\log_y x=\log_2 1=0$，答案选C。

【套路】具有非负性式子：$|a|\geqslant 0$，$a^2\geqslant 0$，$\sqrt{a}\geqslant 0$。

非负性基本题型模板：若$|a|+b^2+\sqrt{c}=0$，则$a=b=c=0$。

【例1-16】(2008-10)$|3x+2|+2x^2-12xy+18y^2=0$，则$2y-3x=$(　　)。

A. $-\dfrac{14}{9}$　　B. $-\dfrac{2}{9}$　　C. 0　　D. $\dfrac{2}{9}$　　E. $\dfrac{14}{9}$

【解析】配方得$|3x+2|+2(x-3y)^2=0$，利用非负性得：$3x+2=0$，$x-3y=0$，解得$x=-\dfrac{2}{3}$，$y=-\dfrac{2}{9}$，则$2y-3x=2\times\left(-\dfrac{2}{9}\right)-3\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{14}{9}$，答案选E。

七、绝对值的自比性

【例1-17】a,b,c是非零实数,则$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$的所有值共有(   )种情况。

A. 1   B. 2   C. 3   D. 4   E. 5

【解析】分以下几种情况讨论。

① 三个正:令$a>0,b>0,c>0$,则原式$=1+1+1+1=4$;

② 两正一负:令$a>0,b>0,c<0$,则原式$=1+1-1-1=0$;

③ 两负一正:令$a>0,b<0,c<0$,则原式$=1-1-1+1=0$;

④ 三个负:令$a<0,b<0,c<0$,则原式$=-1-1-1-1=-4$。

综上,所有取值共有3个,答案选C。

【套路】绝对值的自比性$\frac{a}{|a|}=\frac{|a|}{a}=\begin{cases}1 & a>0\\ -1 & a<0\end{cases}$,核心是正、负符号的判定。

【扩展】如果在题干前加入限定条件$a+b+c=0$,此时三个数只能为两正一负或两负一正,原式的值为0。

八、绝对值三角不等式

【例1-18】已知$|a|=5,|b|=7,ab<0$,则$|a-b|=$(   )。

A. 2   B. -2 C. 12   D. -12 E. 以上结论均不正确

【解析】方法(1),根据题意$\begin{cases}a=5\\ b=-7\end{cases}$或$\begin{cases}a=-5\\ b=7\end{cases}$,则$|a-b|=12$,答案选C。

方法(2),根据三角不等式公式,因为$ab<0$,则$|a-b|=|a|+|b|=5+7=12$,答案选C。

【例1-19】已知$|x-a|\leqslant 1,|y-x|\leqslant 1$,则有(   )。

A. $|y-a|\leqslant 2$ B. $|y-a|\leqslant 1$ C. $|y+a|\leqslant 2$

D. $|y+a|\leqslant 1$ E. 以上结论均不正确

【解析】根据三角不等式公式,可得$|y-a|=|(x-a)+(y-x)|\leqslant|x-a|+|y-x|\leqslant 2$,答案选A。

九、绝对值的几何意义

【例1-20】设$y=|x-1|+|x-3|$,则下列结论正确的是(   )。

A. y没有最小值

B. 只有一个x可使y取到最小值

C. 有无穷多个x可使y取到最大值

D. 有无穷多个x可使y取到最小值

E. 以上结论均不正确

【解析】$|x-1|+|x-3|$表示x到1和3的距离之和。分段讨论:当$1\leqslant x\leqslant 3$时,x到1

的距离与x到3的距离之和等于2(即1到3的距离);当$x<1$时,x到1的距离与x到3的距离之和必然大于2;当$x>3$时,x到1的距离与x到3的距离之和必然大于2,综上:当$1\leqslant x\leqslant 3$时,$|x-1|+|x-3|$有最小值为$|1-3|=2$,答案选D。

【套路】形如$|x-a|+|x-b|$(令$a<b$)表示x到a,b的距离之和,当$a\leqslant x\leqslant b$时,有最小值为$|a-b|$,无最大值。

十、基本比例计算问题

【例1-21】(2015-1)若实数a,b,c满足$a:b:c=1:2:5$,且$a+b+c=24$,则$a^2+b^2+c^2=$(　　)。

A. 30　　B. 90　　C. 120　　D. 240　　E. 270

【解析】待定系数法,设$a=k$,$b=2k$,$c=5k$,则$a+b+c=k+2k+5k=24$,解得$k=3$,则$a=3$,$b=6$,$c=15$,因此$a^2+b^2+c^2=3^2+5^2+15^2=270$,答案选E。

【例1-22】设$\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}=4:5:6$,则使$x+y+z=74$成立的$y$值是(　　)。

A. 24　　B. 36　　C. $\frac{74}{3}$　　D. $\frac{37}{2}$　　E. 以上结论均不正确

【解析】方法(1),$x:y:z=\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}$,利用待定系数法,令$x=\frac{1}{4}a$,$y=\frac{1}{5}a$,$z=\frac{1}{6}a$,则$x+y+z=\frac{1}{4}a+\frac{1}{5}a+\frac{1}{6}a=74$,解得$a=120$,则$y=\frac{1}{5}a=24$,答案选A。

方法(2),$x:y:z=\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}=\frac{1}{4}\times 60:\frac{1}{5}\times 60:\frac{1}{6}\times 60=15:12:10$,又$x+y+z=74$,观察得到$y=24$,答案选A。

【套路】对于$x:y:z=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$($a,b,c$为常数)的多比例题型,有以下两种方法。

方法(1),待定系数法,令$x=\frac{1}{a}k$,$y=\frac{1}{b}k$,$z=\frac{1}{c}k$,根据题干的等量关系式求出k值。

方法(2),求出分母a,b,c的最小公倍数,将分数比化为整数比,通过观察分数对应的具体数值,直接找到答案。

十一、合(分)比定理

【例1-23】若$a=\frac{2011}{2012}$,$b=\frac{2012}{2013}$,$c=\frac{2013}{2014}$,则a,b,c的大小关系为(　　)。

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<b<a$

D. $c<a<b$　　E. 以上结论均不正确

【解析】利用分比定理,则有$a=1-\frac{1}{2012}$,$b=1-\frac{1}{2013}$,$c=1-\frac{1}{2014}$,明显$a<b<c$,答案选A。

【技巧】分子比分母小1,由于$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$,则$a<b<c$,答案选A。

十二、等比定理

【例 1-24】$\frac{a+b}{c}=\frac{a+c}{b}=\frac{b+c}{a}=$(　　)。

A. 2　　B. -1　　C. 2 或 -1　　D. 1　　E. 1 或 2

【解析】方法(1)，当 $a+b+c\neq 0$ 时，利用等比定理，可得 $\frac{a+b}{c}=\frac{a+c}{b}=\frac{b+c}{a}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$；当 $a+b+c=0$ 时，代入题干，$\frac{a+b}{c}=\frac{-c}{c}=-1$，答案选 C。

方法(2)，待定系数法。令 $\frac{a+b}{c}=\frac{a+c}{b}=\frac{b+c}{a}=k$，则 $\begin{cases}a+b=kc\\a+c=kb\\b+c=ka\end{cases}$，三式相加得：$2(a+b+c)=k(a+b+c)$，整理 $(a+b+c)(k-2)=0$，则 $k=2$ 或 $a+b+c=0$。当 $a+b+c=0$ 时，$k=\frac{a+b}{c}=\frac{-c}{c}=-1$，综上所述，$k=2$ 或 $k=-1$，答案选 C。

【套路】解分式连等式题型方法如下。

(1) 等比定理 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}\left(b+d+f\neq 0\right)$，需要讨论分母是否为零；

(2) 待定系数法，连等分式全部拆开并化为整式，再整合成一个式子，求出待定系数。

十三、正比、反比

【例 1-25】已知 $y=y_1-y_2$，且 y_1 与 $\frac{1}{2x^2}$ 成反比例，y_2 与 $\frac{3}{x+2}$ 成正比例。当 $x=0$ 时，$y=-3$；当 $x=1$ 时，$y=1$，那么 y 与 x 的表达式是(　　)。

A. $y=\frac{3x^2}{2}-\frac{3}{x+2}$　　B. $y=3x^2-\frac{6}{x+2}$　　C. $y=3x^2+\frac{6}{x+2}$

D. $y=-\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{x+2}$　　E. $y=-3x^2-\frac{3}{x+2}$

【解析】根据题意，$y_1=\frac{k_1}{\frac{1}{2x^2}}=2k_1x^2$，$y_2=\frac{3}{x+2}k_2$，则 $y=2k_1x^2-\frac{3}{x+2}k_2$。将 $(0,-3)$，$(1,1)$ 代入得 $\begin{cases}-3=-\frac{3}{2}k_2\\1=2k_1-\frac{3}{1+2}k_2\end{cases}$，解得 $k_1=\frac{3}{2}$，$k_2=2$，因此 $y=3x^2-\frac{6}{x+2}$，答案选 B。

【技巧】特值法验证排除，将 $x=0$，$y=-3$ 代入五个选项中，只有 B 选项符合，答案选 B。

十四、平均值基本定义

【例 1-26】(2017-1)在 1 到 100 之间，能被 9 整除的整数的平均值是(　　)。

A. 27　　B. 36　　C. 45　　D. 54　　E. 63

【解析】由题意可得，最小为 9，最大为 99，则平均数为 $\frac{9+18+\cdots+99}{11}=\frac{9\times(1+2+\cdots+11)}{11}=54$，答案选 D。

【技巧】对于等差数列，平均数为 $\frac{S_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}=\frac{9+99}{2}=54$，答案选 D。

【例 1-27】如果 x_1,x_2,x_3 三个数的算术平均值为 5，则 x_1+2,x_2-3,x_3+6 与 8 的算术平均值为(　　)。

A. $3\frac{1}{4}$　　B. 6　　C. 7　　D. $7\frac{1}{2}$　　E. $9\frac{1}{5}$

【解析】根据题意，$x_1+x_2+x_3=15$，则 x_1+2,x_2-3,x_3+6 与 8 的算术平均值为 $\frac{(x_1+2)+(x_2-3)+(x_3+6)+8}{4}=\frac{15+13}{4}=7$，答案选 C。

【技巧】x_1,x_2,x_3 的算术平均值为 5，直接令 $x_1=x_2=x_3=5$ 代入求值。

十五、平均值定理求最值

【例 1-28】已知 $a+b=4$，则 3^a+3^b 的最小值为(　　)。

A. $3\sqrt{2}$　　B. 18　　C. 9　　D. $2\sqrt{2}$　　E. $\sqrt{6}$

【解析】根据平均值定理，$3^a+3^b\geqslant 2\sqrt{3^a\times 3^b}=2\sqrt{3^{a+b}}=2\sqrt{3^4}=18$，答案选 B。

【例 1-29】已知 $x>0,y>0,x+y=1$，则 $\frac{4}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为(　　)。

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 12　　E. 14

【解析】$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)=5+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4y}{x}\times\frac{x}{y}}=5+2\sqrt{4}=9$，答案选 B。

【例 1-30】已知 $x>0,y>0$，且满足 $4x+3y=12$，则 xy 的最大值为(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 6

【解析】根据均值不等式，$4x+3y=12\geqslant 2\sqrt{4x\times 3y}$，解得 $xy\leqslant 3$（当且仅当 $4x=3y=6$，即 $x=\frac{3}{2},y=2$ 时，取到等号），答案选 C。

1.3　基础巩固习题

1. 已知 p,q 均为质数，且满足 $3p-5q=11$，则 $p+q=$(　　)。

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11　　E. 12

2. 若 a,b 都是质数，且 $a^2+b=2003$，则 $a+b$ 的值等于(　　)。

A. 1999　　B. 2000　　C. 2001　　D. 2002　　E. 2003

3. 三名小孩中有一名学龄前儿童(年龄不足 6 岁)，他们的年龄都是质数(素数)，且依次相差 6 岁，他们的年龄之和为(　　)。

A. 21　　B. 27　　C. 33　　D. 39　　E. 51

4.(2012-1)已知m,n是正整数,则m是偶数。

(1) $3m+2n$是偶数。

(2) $3m^2+2n^2$是偶数。

5.(2013-10)m^2n^2-1能被2整除。

(1) m是奇数。

(2) n是奇数。

6.已知a,b为整数,能确定$a+b$为偶数。

(1) $a-b$为偶数。

(2) a^2-b^2为偶数。

7.代数式$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$的值为$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。

(1) x是$\sqrt{5}$的小数部分,$xy=1$。

(2) y是$\sqrt{5}$的小数部分,$x=\dfrac{1}{y}$。

8.若a为整数,则a^2+a一定能被(　　)整除。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 6

9.一个小于200的正整数,除以24或36都有余数16,则这个正整数的取值有(　　)种。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

10.(2019-1)设n为正整数,则能确定n除以5的余数。

(1) 已知n除以2的余数。

(2) 已知n除以3的余数。

11.(2008-10)$\dfrac{n}{14}$是一个整数。

(1) n是一个整数,且$\dfrac{3n}{14}$也是一个整数。

(2) n是一个整数,且$\dfrac{n}{7}$也是一个整数。

12.m是一个整数。

(1) 若$m=\dfrac{p}{q}$,其中p与q为非零的整数,且m^2是一个整数。

(2) 若$m=\dfrac{p}{q}$,其中p与q为非零的整数,且$\dfrac{2m+4}{3}$是一个整数。

13.老师将100名学生分别抽签编号,依次分别为1,2,…,100,已知编号为5或7的倍数的学生可以获得免费的图书礼券一张,老师应送出(　　)张图书礼券。

A. 30　　B. 31　　C. 32　　D. 33　　E. 以上结论均不正确

14.若$\dfrac{x}{|x|-1}=1$,则$\dfrac{|x|+1}{2x}$的值为(　　)。

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}$　　E. $-\dfrac{3}{2}$

15. 对任意实数$x\in\left(\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{7}\right)$,代数式$|1-2x|+|1-3x|+|1-4x|+\cdots+|1-$

$10x|=($　　$)$。

A. 1　　B. 3　　C. 4　　D. 6　　E. 10

16. (2008-10) $-1<x\leqslant\frac{1}{3}$。

(1) $\left|\frac{2x-1}{x^2+1}\right|=\frac{1-2x}{x^2+1}$。　　(2) $\left|\frac{2x-1}{3}\right|=\frac{2x-1}{3}$。

17. $\frac{|a|}{a+a^2}=-\frac{1}{1+a}$。

(1) $a<0$。　　(2) $a<-1$。

18. $|b-a|+|c-b|-|c|=a$。

(1) 实数 a,b,c 在数轴上的位置见图 1-2。

(2) 实数 a,b,c 在数轴上的位置见图 1-3。

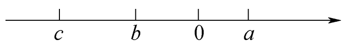

图 1-2

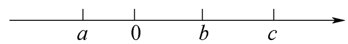

图 1-3

19. 方程 $|5-3x|-|3x-2|=3$ 的解是空集。

(1) $x>\frac{5}{3}$。　　(2) $\frac{7}{6}<x<\frac{5}{3}$。

20. (2011-1) 若实数 a,b,c 满足 $|a-3|+\sqrt{3b+5}+(5c-4)^2=0$，则 $abc=($　　$)$。

A. -4　　B. $-\frac{5}{3}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $\frac{4}{5}$　　E. 3

21. $\frac{|x-1|}{1-x}+\frac{|x-2|}{x-2}$ 的值为 -2。

(1) $1<x<2$。　　(2) $2<x<3$。

22. x,y 是实数，则 $|x|+|y|=|x-y|$。

(1) $x>0,y<0$。　　(2) $x<0,y>0$。

23. (2009-10) 设 $y=|x-a|+|x-20|+|x-a-20|$，其中 $0<a<20$，则对于满足 $a\leqslant x\leqslant 20$ 的 x 值，y 的最小值是(　　)。

A. 10　　B. 15　　C. 20　　D. 25　　E. 30

24. (2008-10) 若 $a:b=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$，则 $\frac{12a+16b}{12a-8b}=($　　$)$。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. -3　　E. -2

25. 三个实数 $1,x-2$ 和 x 的几何平均值等于 $4,5$ 和 -3 的算术平均值，则 x 的值为(　　)。

A. -2　　B. 4　　C. 2　　D. -2 或 4　　E. 2 或 4

26. $x>0,y>0$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$。

(1) x,y 的算术平均值为 6，比例中项为 $\sqrt{3}$。

(2) x^2,y^2 的算术平均值为 7，几何平均值为 1。

27. (2020-1) 若 a,b,c 是实数，则能确定 a,b,c 的最大值。

(1) 已知 a,b,c 的平均值。

(2)已知a,b,c的最小值。

28. 若$x>0,y>0$,且$x+2y=4$,则$\lg x+\lg y$的最大值为(　　)。

A. lg2　　B. 2lg2　　C. $\frac{1}{2}$lg2　　D. 3lg2　　E. lg3

29. 已知$x>0$,则$y=\frac{x^2+9}{x}$的最小值为(　　)。

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 8　　E. 10

30. 若正实数x,y满足$x+2y+2xy-8=0$,则$x+2y$的最小值为(　　)。

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8　　E. 9

基础巩固习题详解

1.【解析】$3p-5q=11$,则$3p-5q$为奇数,可以推出p,q为一奇一偶,又p,q均为质数,所以p,q必有一个为2,显然$q=2$,此时$p=7$,所以$p+q=9$,答案选B。

【套路】两数相减是奇数,则这两个数是一奇一偶。

2.【解析】$a^2+b=2003$,2003是奇数,说明等式左边是一奇一偶,又a,b都是质数,所以必有一个是2,当$b=2$时,$a=\sqrt{2001}$,不符合要求;当$a=2$时,$b=1999$,均为质数,符合要求,所以$a+b=2001$,答案选C。

3.【解析】小于6的质数为2,3,5,讨论可得三个小孩的年龄为5,11,17符合要求,则年龄之和$5+11+17=33$,答案选C。

4.【解析】条件(1),$3m+2n$是偶数,又已知$2n$为偶数,则$3m$是偶数,3是奇数,所以m是偶数,充分;条件(2),$3m^2+2n^2$是偶数,又已知$2n^2$是偶数,则$3m^2$是偶数,3是奇数,则m^2是偶数,所以m是偶数,充分,答案选D。

5.【解析】m^2n^2-1能被2整除,1是奇数,所以m^2n^2必然是奇数,条件(1)和(2)联合可得m^2n^2为奇数,联合充分,答案选C。

6.【解析】由于$(a-b)+(a+b)=2a\in$偶数,因此$a-b$与$a+b$同奇或同偶。条件(1),$a-b$为偶数,则$a+b$也为偶数,充分;条件(2),$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$为偶数,也能确定$a+b$为偶数,也充分,答案选D。

7.【解析】$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{x+y}{x-y}$。条件(1),$x=\sqrt{5}-2,y=\sqrt{5}+2$,代入得到$\frac{x+y}{x-y}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$,不充分;条件(2),$x=\sqrt{5}+2,y=\sqrt{5}-2$,代入得到$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,充分,答案选B。

8.【解析】连续n个整数的乘积一定能被$n!$整除,$a^2+a=a(a+1)$,是连续两个整数的乘积,因此一定能被$2!=2$整除,答案选A。

9.【解析】这个数减去16,即为24和36的公倍数,由于24和36的最小公倍数为72,因此此数为$72k+16(k\in\mathbf{Z})$;又$0<72k+16<200$,解得$k=0,1,2$,则此数为16,88或160,共有3种取值,答案选C。

【套路】①余数都相同时,“余同加余”;②当被除数小于除数时,商为0,余数就是被除数本身,如16除以24,商0余16。

10.【解析】显然单独都不充分,联合起来,可以举反例,假设n除以2和除以3的余数都为0,则n是6的倍数,$n=6,12,18,\cdots$,此时n除以5的余数仍然在变化,不是唯一确定的数值,联合也不充分,答案选E。

11.【解析】条件(1),$\frac{3n}{14}$是一个整数,因为3与14互质,所以n是14的倍数,充分;条件(2),$\frac{n}{7}$是一个整数,则n是7的倍数,举反例,当$n=7$时,推不出结论,不充分,答案选A。

12.【解析】条件(1),$m=\frac{p}{q}$为整数或分数,即m是有理数,又m^2是一个整数,所以m一定是整数,充分;条件(2),设k法,令$\frac{2m+4}{3}=k(k\in\mathbf{Z})$,则$m=\frac{3k}{2}-2$,当$k$是偶数时,$m$是整数;当$k$是奇数时,$m$不是整数,不充分,答案选A。

【技巧】条件(2),举反例,当$m=-\frac{1}{2}$时,$\frac{2m+4}{3}$是一个整数,但m不是整数,不充分。

13.【解析】考查公倍数,1~100中5的倍数共有20个,7的倍数共有14个,5和7公有的倍数有35和70两个,所以编号为5或7的倍数共有$20+14-2=32$个,答案选C。

14.【解析】$\frac{x}{|x|-1}=1$整理为$x=|x|-1$,当$x\geqslant 0$时,$x=x-1$,方程无解;当$x<0$时,$x=-x-1$,解得$x=-\frac{1}{2}$,代入$\frac{|x|+1}{2x}=\frac{\frac{1}{2}+1}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{3}{2}$,答案选E。

15.【解析】因为$\frac{1}{8}<x<\frac{1}{7}$,则$7x<1$,$8x>1$。原式去掉绝对值符号为$(1-2x)+(1-3x)+\cdots+(1-7x)+(8x-1)+(9x-1)+(10x-1)=6-3=3$,答案选B。

16.【解析】条件(1),$\frac{2x-1}{x^2+1}\leqslant 0$,解得$x\leqslant\frac{1}{2}$,推不出结论,不充分;条件(2),$\frac{2x-1}{3}\geqslant 0$,解得$x\geqslant\frac{1}{2}$,推不出结论,也不充分;联合可得$x=\frac{1}{2}$,仍然不充分,答案选E。

【套路】若$|a|=a$,则$a\geqslant 0$;若$|a|=-a$,则$a\leqslant 0$。

17.【解析】$\frac{|a|}{a+a^2}=\frac{|a|}{a(1+a)}=-\frac{1}{1+a}$,则$a<0$且$a\neq -1$,条件(1)不充分,条件(2)充分,答案选B。

18.【解析】条件(1),$c<b<0<a$,则$|b-a|+|c-b|-|c|=(a-b)+(b-c)+c=a$,充分;条件(2),$a<0<b<c$,则$|b-a|+|c-b|-|c|=(b-a)+(c-b)-c=-a\neq a$,不充分,答案选A。

19.【解析】条件(1),$x>\frac{5}{3}$,去掉绝对值符号,则$(3x-5)-(3x-2)=3$,明显方程无

解，充分；条件(2)，$\frac{7}{6}<x<\frac{5}{3}$，去掉绝对值符号，则$(5-3x)-(3x-2)=3$，解得$x=\frac{2}{3}$，不在条件的区间范围内，方程无解，也充分，答案选 D。

20.【解析】由非负性可得，$a=3,b=-\frac{5}{3},c=\frac{4}{5}$，则$abc=3\times\left(-\frac{5}{3}\right)\times\frac{4}{5}=-4$，答案选 A。

21.【解析】条件(1)，原式$=\frac{(x-1)}{1-x}+\frac{(2-x)}{x-2}=-1-1=-2$，充分；条件(2)，原式$=\frac{(x-1)}{1-x}+\frac{(x-2)}{x-2}=-1+1=0$，不充分，答案选 A。

22.【解析】考查三角不等式，$|x|+|y|=|x-y|$，只需满足x,y异号即可。条件(1)和(2)都充分，答案选 D。

23.【解析】由于$a\leqslant x\leqslant 20$，则$y=(x-a)+(20-x)+(20+a-x)=40-x$，当$x=20$时，$y$取到最小值为 20，答案选 C。

【技巧】形如$|x-a|+|x-b|+|x-c|$(令$a<b<c$)表示x到a,b,c距离之和，当$x=b$时，有最小值为$|a-c|$。由于三个零点分别为$a,20,a+20$，明显当$x=20$时，y取到最小值为 20，答案选 C。

24.【解析】方法(1)，待定系数法，设$a=\frac{1}{3}k,b=\frac{1}{4}k$，则原式$=\frac{12\times\frac{1}{3}k+16\times\frac{1}{4}k}{12\times\frac{1}{3}k-8\times\frac{1}{4}k}=4$，答案选 C。

方法(2)，$a:b=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=4:3$，特值法，令$a=4,b=3$，则原式$=\frac{12\times4+16\times3}{12\times4-8\times3}=4$，答案选 C。

25.【解析】根据题意，$\sqrt[3]{1(x-2)x}=\frac{4+5-3}{3}$，解得$x=-2$或 4。由于几何平均值概念中，要求每个元素都要为正数，则$x=-2$不符合，答案选 B。

26.【解析】条件(1)，$x+y=12,xy=3$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{12}{3}=4$，充分；条件(2)，$x^2+y^2=14,xy=1$，则$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=14+2=16$，又$x>0,y>0$，所以$x+y=4$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{4}{1}=4$，也充分，答案选 D。

27.【解析】显然两个条件单独都不充分，考虑联合。设$a\leqslant b\leqslant c$，a,b,c的平均值已知，设为k，则$a+b+c=3k$；三个数的最小值a已知，由于b不能确定，仍然不能确定最大的数c的值，联合不充分，答案选 E。

28.【解析】根据平均值定理，$4=x+2y\geqslant 2\sqrt{x\times 2y}$，解得$xy\leqslant 2$，因此$\lg x+\lg y=\lg xy\leqslant\lg 2$，答案选 A。

29.【解析】根据均值不等式，则$\frac{x^2+9}{x}=x+\frac{9}{x}\geqslant 2\sqrt{x\times\frac{9}{x}}=6$(当且仅当$x=\frac{9}{x}$，即

$x=3$时，取到等号$\Big)$，答案选C。

30.【解析】根据均值不等式，$8-(x+2y)=2xy=x\cdot 2y\leqslant\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2$，令$x+2y=t$ $(t>0)$，即$8-t\leqslant\left(\frac{t}{2}\right)^2$，整理为$(t+8)(t-4)\geqslant 0$，解得$t\geqslant 4$或$t\leqslant -8$(舍去)，因此$x+2y$的最小值为4，答案选B。

1.4　强化精讲例题

一、奇数、偶数、质数、合数

【例1-31】20以内的质数中，两个质数之和还是质数的共有(　　)种。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 6

【解析】20以内的质数有2，3，5，7，11，13，17，19。质数＋质数＝质数，则等式右边的质数大于2，大于2的质数又都是奇数，所以等式左边两个质数是一奇一偶，则其中必有一个质数是2，另外一个质数通过讨论为3，5，11，17，共4种，答案选C。

【例1-32】若A,B,C为三个小于20的质数，且满足$A+B+C=30$，则这三个数的乘积为(　　)。

A. 372　　B. 374　　C. 376　　D. 378　　E. 380

【解析】三个数的和为偶数，又三个数均为小于20的质数，只能是奇数＋奇数＋偶数＝偶数，因此必有一个为2，通过列举，另外两个数分别为11和17，所以三个数的乘积为$2\times 11\times 17=374$，答案选B。

二、有理数、无理数性质

1. 判定数是有理数还是无理数

【例1-33】在$0.2,\frac{1}{2},\frac{2}{7},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{16},2.\dot{7},\pi,0.1010010001\cdots,\log_2 3$这十个实数中，无理数的个数为(　　)个。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

【解析】有理数包含整数、有限小数和无限循环小数，其中有限小数和无限循环小数均可以化为分数，而无理数是无限不循环小数，根据定义得$\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\pi,0.1010010001\cdots,\log_2 3$这5个数均是无理数，答案选E。

2. 有理数和无理数的组合性质

【例1-34】(2009-10)若x,y是有理数，且满足$(1+2\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y-2+5\sqrt{3}=0$，则$x,y$的值分别为(　　)。

A. 1，3　　B. -1，2　　C. -1，3　　D. 1，2　　E. 以上结论均不正确

【解析】整理为$(x+y-2)+\sqrt{3}(2x-y+5)=0$,根据无理数性质有$\begin{cases}x+y-2=0\\2x-y+5=0\end{cases}$,解得$\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$,答案选 C。

【套路】已知a,b为有理数,$\sqrt{m}$为无理数,若满足$a+b\sqrt{m}=0$,则$a=0,b=0$。

3. 无理数的整数部分及小数部分

【例 1-35】若$\frac{1}{3-\sqrt{7}}$的整数部分是a,小数部分是b,则$a^2+(1-\sqrt{7})ab$的值等于(　　)。

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9　　E. 10

【解析】$\frac{1}{3-\sqrt{7}}=\frac{3+\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$,又$2<\frac{3+\sqrt{7}}{2}<3$,因此整数部分$a=2$,小数部分$b=\frac{3+\sqrt{7}}{2}-2=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$,则$a^2+(1+\sqrt{7})ab=2^2+(1+\sqrt{7})\times2\times\frac{\sqrt{7}-1}{2}=4+6=10$,答案选 E。

【套路】无理数的整数部分:小于数本身的最大整数;无理数的小数部分:数本身减去整数部分,如$\sqrt{5}$的整数部分是 2,小数部分是$\sqrt{5}-2$。

4. 无理式去根号

【例 1-36】已知a,b,c为有理数,且$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c$,则$a+b+c=$(　　)。

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1　　E. 3

【解析】配方去根号,$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,即$\sqrt{3}-\sqrt{2}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c$,利用对应项系数相等,则$a=-1,b=1,c=0$,因此$a+b+c=0$,答案选 C。

5. 无限循环小数化分数

【例 1-37】将纯循环小数$0.\dot{1}4\dot{4}$化为最简分数,分母比分子大(　　)。

A. 855　　B. 655　　C. 105　　D. 95　　E. 85

【解析】$0.\dot{1}4\dot{4}=\frac{144}{999}=\frac{16}{111}$,分母比分子大$111-16=95$,答案选 D。

【套路】有限小数化分数:如$0.3=\frac{3}{10}$,$0.23=\frac{23}{100}$;

纯循环小数化分数:分子是循环节,循环节有几位,分母就是几个 9,最后进行约分,如$0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$,$0.\dot{2}\dot{3}=\frac{23}{99}$;

混循环小数化分数：分子为小数点后的数字减去不循环的部分，循环节有几位，分母就是几个9，循环节前有几位，分母中的9后面就有几个0，如$0.2\dot{3}\dot{4}=\frac{234-2}{990}=\frac{232}{990}=\frac{116}{495}$。

三、整除、余数问题

【例1-38】设n为整数，则$(2n+1)^2-25$一定能被(　　)整除。

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8　　E. 9

【解析】$(2n+1)^2-25=(2n+1+5)(2n+1-5)=4(n+3)(n-2)$，又$(n+3)+(n-2)=2n+1$，两数之和为奇数，则$(n+3)$和$(n-2)$必然是一奇一偶，而偶数是2的倍数，因此$4(n+3)(n-2)$一定是8的倍数，答案选D。

【技巧】特值法，$n=3$时，$(2n+1)^2-25=24$，排除A，C，E；$n=4$时，$(2n+1)^2-25=56$，排除B，答案选D。

【例1-39】一个小于100的正整数，除以5余1，除以6余1，则满足条件的数有(　　)个。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

【解析】这个数减去1，即为5和6的公倍数，由于5和6的最小公倍数为30，因此此数为$30k+1(k\in \mathbf{Z})$。又$0<30k+1<100$，解得$k=0,1,2,3$，则此数为1，31，61，91，共有四种情况，答案选D。

【套路】余数都相同时，“余同加余”。

【例1-40】一个小于100的正整数，除以5余4，除以6余5，则满足条件的数有(　　)个。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

【解析】此数加1，即为5和6的公倍数，由于5和6的最小公倍数为30，所以此数为$30k-1(k\in \mathbf{Z})$。又$0<30k-1<100$，解得$k=1,2,3$，则此数为29，59，89，共有三种情况，答案选C。

【套路】除数与余数的差值都相等时，“差同减差”。

【例1-41】一个小于100的正整数，除以5余2，除以6余1，则满足条件的数有(　　)个。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

【解析】此数减去7，即为5和6的公倍数，由于5和6的最小公倍数为30，所以此数为$30k+7(k\in \mathbf{Z})$。又$0<30k+7<100$，解得$k=0,1,2,3$，则此数为7，37，67，97，共有四种情况，答案选D。

【套路】除数与余数的和都相等时，“和同加和”。

四、公倍数与公约数

1. 利用公式求公倍数与公约数

【例1-42】甲数是36，甲、乙两数的最大公约数是4，最小公倍数是288，求乙数为(　　)。

A. 18　　B. 20　　C. 28　　D. 30　　E. 32

【解析】公式法：两数乘积＝最大公约数×最小公倍数，即$a\times b=(a,b)\times[a,b]$，可得$36\times$乙数$=4\times 288$，因此乙数为32，答案选E。

2. 公倍数与公约数的应用

【例 1-43】甲、乙、丙三人沿着环形跑道跑步，甲跑完一圈需要 90s，乙跑完一圈需要 80s，丙跑完一圈需要 72s，三人同时、同向、同地起跑，当三人第一次在出发点相遇时，甲、乙、丙三人各跑的圈数之和为(　　)。

A. 27　　B. 30　　C. 36　　D. 39　　E. 42

【解析】此时每个人跑的都是整数圈，即求三人时间的最小公倍数：$[90,80,72]=720$s，因此甲跑了$\frac{720}{90}=8$圈，乙跑了$\frac{720}{80}=9$圈，丙跑了$\frac{720}{72}=10$圈，三人各跑的圈数之和为$8+9+10=27$圈，答案选 A。

【例 1-44】有三根铁丝，长度分别是 120cm，180cm，300cm，现在要把它们截成相等的小段，每根都不能有剩余，每小段最长为 $a$cm，一共可以截成 b 段，则 $a+b=$(　　)cm。

A. 55　　B. 60　　C. 65　　D. 70　　E. 75

【解析】截成相等的最长小段，每根都不能有剩余，即求 120，180，300 的最大公约数。$a=(120,180,300)=60$，$b=\frac{120}{60}+\frac{180}{60}+\frac{300}{60}=10$，答案选 D。

五、绝对值的代数意义

【例 1-45】(2011-1)设 a,b,c 是小于 12 的三个不同的质数(素数)，且 $|a-b|+|b-c|+|c-a|=8$，则 $a+b+c=$(　　)。

A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 15　　E. 19

【解析】设 $a>b>c$，则 $|a-b|+|b-c|+|c-a|=(a-b)+(b-c)+(a-c)=2(a-c)=8$，即 $a-c=4$。又因为小于 12 的质数有 2，3，5，7，11，只有 $a=7,b=5,c=3$ 才能满足，答案选 D。

【例 1-46】(2011-10)已知 $g(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$f(x)=|x-1|-g(x)|x+1|+|x-2|+|x+2|$，则 $f(x)$ 是与 x 无关的常数。

(1) $-1<x<0$。　　(2) $1<x<2$。

【解析】条件(1)，$-1<x<0$，则 $g(x)=-1$，$f(x)=(1-x)+(x+1)+(2-x)+(x+2)=6$，充分；条件(2)，$1<x<2$，则 $g(x)=1$，$f(x)=(x-1)-(x+1)+(2-x)+(x+2)=2$，也充分，答案选 D。

【例 1-47】(2021-1)设 a,b 为实数，则能确定 $|a|+|b|$ 的值。

(1) 已知 $|a+b|$ 的值。

(2) 已知 $|a-b|$ 的值。

【解析】条件(1)，举反例，$|a+b|=2$，则当 $a=b=1$ 时，$|a|+|b|=2$；当 $a=4,b=-2$ 时，$|a|+|b|=6$，因此不能确定 $|a|+|b|$ 的值，不充分；同理条件(2)也不充分；考虑联合，设 $\begin{cases}|a+b|=m\\ |a-b|=n\end{cases}$，则 $\begin{cases}a+b=m\\ a-b=n\end{cases}$，$\begin{cases}a+b=m\\ a-b=-n\end{cases}$，$\begin{cases}a+b=-m\\ a-b=n\end{cases}$，$\begin{cases}a+b=-m\\ a-b=-n\end{cases}$，不管是哪一组，$|a|+|b|=\frac{|m+n|}{2}+\frac{|m-n|}{2}$，结果为定值，联合充分，答案选 C。

六、绝对值的非负性

1. 配方型非负性

【例 1-48】已知$\left|x^2+4xy+5y^2\right|+\sqrt{z+\frac{1}{2}}=-2y-1$，则$(4x-10y)^z=($　　$)$。

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　D. 2　　E. 3

【解析】整理得$\left|x^2+4xy+4y^2\right|+\sqrt{z+\frac{1}{2}}+y^2+2y+1=0$，配方为$(x+2y)^2+\sqrt{z+\frac{1}{2}}+(y+1)^2=0$，利用非负性，则$x=2,y=-1,z=-\frac{1}{2}$，因此$(4x-10y)^z=[4\times2-10\times(-1)]^{-\frac{1}{2}}=18^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，答案选C。

【套路】通过配方构造平方形式，转化为$|a|+b^2+\sqrt{c}=0$的基本模型。

2. 定义域型非负性

【例 1-49】x,y,z满足$|x-y+z|+(x-z)^2=\sqrt{x+y-3}+\sqrt{3-x-y}$，则$x+y+z=($　　$)$。

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2　　E. 1

【解析】$\sqrt{x+y-3}$与$\sqrt{3-x-y}$都有意义，则$x+y-3\geqslant0,3-x-y\geqslant0$，则$x+y-3=0$，因此$|x-y+z|+(x-z)^2=0$，利用非负性得：$x-y+z=0,x-z=0$，解得$x=1,y=2,z=1,x+y+z=1+2+1=4$，答案选B。

【套路】当$\sqrt{a}$与$\sqrt{-a}$同时出现时，$a=0$。

3. 两式型非负性

【例 1-50】(2009-1)已知实数a,b,x,y满足$y+\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|=1-a^2$和$|x-2|=y-1-b^2$，则$3^{x+y}+3^{a+b}=($　　$)$。

A. 25　　B. 26　　C. 27　　D. 28　　E. 29

【解析】两式相加得：$y+\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|+|x-2|=1-a^2+y-1-b^2$，整理得$|x-2|+\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|+a^2+b^2=0$，利用非负性得：$x=2,a=0,b=0$，代入得到$y=1$，则$3^{x+y}+3^{a+b}=3^{2+1}+3^{0+0}=28$，答案选D。

【套路】非负性的量分散到两个等式中，通过两式相加(减)转化为$|a|+b^2+\sqrt{c}=0$的基本模型。

4. 利用非负性求最值

【例 1-51】设实数x,y满足等式$x^2-4xy+4y^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-6=0$，则$x+y$的最大值为(　　)。

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$　　E. $3\sqrt{3}$

【解析】原式配方为$(x-2y)^2+\sqrt{3}(x+y)-6=0$,将目标表达式分离得$\sqrt{3}(x+y)=-(x-2y)^2+6$,利用平方的非负性得$-(x-2y)^2+6\leqslant 6$,则$x+y\leqslant\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$,即$x+y$的最大值为$2\sqrt{3}$,答案选C。

七、绝对值的自比性

【例1-52】可以确定$\frac{|x+y|}{x-y}=2$。

(1) $\frac{x}{y}=3$。　　(2) $\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$。

【解析】条件(1),$x=3y$,则$\frac{|x+y|}{x-y}=\frac{4|y|}{2y}=\begin{cases}2, & y>0\\ -2, & y<0\end{cases}$,不充分;条件(2),$y=3x$,则$\frac{|x+y|}{x-y}=\frac{4|x|}{-2x}=\begin{cases}-2, & x>0\\ 2, & x<0\end{cases}$,也不充分;联合无交集,仍然不充分,答案选E。

【技巧】$\frac{|x+y|}{x-y}=2>0$,由于分子$|x+y|$为正,则必须要求分母$(x-y)$也为正,而条件(1)和(2)均不能确定x,y的大小关系,因此两个条件都不充分,答案选E。

八、绝对值三角不等式

【例1-53】已知$|x|\leqslant\frac{1}{4},|y|\leqslant\frac{1}{6}$,则$|2x-3y|$的最大值为(　　)。

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. 1　　E. $\frac{4}{3}$

【解析】$|2x-3y|\leqslant|2x|+|3y|\leqslant 2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{6}=1$,答案选D。

【例1-54】(2013-1)已知a,b是实数,则$|a|\leqslant 1,|b|\leqslant 1$。

(1) $|a+b|\leqslant 1$。　　(2) $|a-b|\leqslant 1$。

【解析】方法(1),条件(1),反例$a=100,b=-100$,不充分;条件(2),反例$a=b=100$,也不充分;条件(1)和(2)联合,根据绝对值三角不等式,$2|a|=|(a-b)+(a+b)|\leqslant|a-b|+|a+b|\leqslant 2$,所以$|a|\leqslant 1$,同理$2|b|=|(a-b)-(a+b)|\leqslant|a-b|+|a+b|\leqslant 2$,所以$|b|\leqslant 1$,联合充分,答案选C。

方法(2),条件(1)和(2)联合,$\begin{cases}a^2+2ab+b^2\leqslant 1\\ a^2-2ab+b^2\leqslant 1\end{cases}$,相加整理得$2(a^2+b^2)\leqslant 2$,即$a^2+b^2\leqslant 1$,则必有$|a|\leqslant 1$且$|b|\leqslant 1$,联合充分,答案选C。

【例1-55】(2015-1)已知x_1,x_2,x_3为实数,$\overline{x}$为x_1,x_2,x_3的平均值,则$|x_k-\overline{x}|\leqslant 1$,$k=1,2,3$。

(1) $|x_k|\leqslant 1, k=1,2,3$。　　　　(2) $x_1=0$。

【解析】当 $k=1$ 时，$|x_k-\bar{x}|=|x_1-\bar{x}|=\left|x_1-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right|=\left|\frac{2x_1-x_2-x_3}{3}\right|$，以此类推，结论为 $\left|\frac{2x_1-x_2-x_3}{3}\right|\leqslant 1$ 且 $\left|\frac{2x_2-x_1-x_3}{3}\right|\leqslant 1$ 且 $\left|\frac{2x_3-x_1-x_2}{3}\right|\leqslant 1$。条件(1)，$|x_1|\leqslant 1, |x_2|\leqslant 1, |x_3|\leqslant 1$，举出反例，当 $x_1=1, x_2=-1, x_3=-1$ 时，$\left|\frac{2x_1-x_2-x_3}{3}\right|=\left|\frac{2\times 1-(-1)-(-1)}{3}\right|=\frac{4}{3}>1$，不充分；条件(2)，$x_1=0$，不能确定 x_2, x_3 的值，也不充分；条件(1)和(2)联合，则 $\left|\frac{2x_1-x_2-x_3}{3}\right|=\left|\frac{2\times 0-x_2-x_3}{3}\right|=\left|\frac{x_2+x_3}{3}\right|\leqslant\frac{|x_2|}{3}+\frac{|x_3|}{3}\leqslant\frac{2}{3}$，同理，$\left|\frac{2x_2-x_1-x_3}{3}\right|=\left|\frac{2x_2-x_3}{3}\right|\leqslant\frac{2|x_2|}{3}+\frac{|x_3|}{3}\leqslant 1$，$\left|\frac{2x_3-x_1-x_2}{3}\right|=\left|\frac{2x_3-x_2}{3}\right|\leqslant\frac{2|x_3|}{3}+\frac{|x_2|}{3}\leqslant 1$，能推出结论，联合充分，答案选 C。

九、绝对值的几何意义

1. 形如 $|x-a|+|x-b|$

【例 1-56】$f(x)$ 有最小值 2。

(1) $f(x)=\left|x-\frac{5}{12}\right|+\left|x-\frac{1}{12}\right|$。

(2) $f(x)=|x-2|+|4-x|$。

【解析】形如 $|x-a|+|x-b|$ 有最小值 $|a-b|$。条件(1)，$f(x)$ 的最小值为 $\left|\frac{5}{12}-\frac{1}{12}\right|=\frac{1}{3}$，不充分；条件(2)，$f(x)=|x-2|+|x-4|$ 的最小值为 $|2-4|=2$，充分，答案选 B。

2. 形如 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$

【例 1-57】$|x-1|+|x-2|+|x-3|$ 的最小值为(　　)。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 4

【解析】$|x-1|+|x-2|+|x-3|$ 表示 x 到 1,2,3 的距离之和。当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，由于 $|x-1|+|x-3|$ 有最小值 2，要使 $|x-1|+|x-2|+|x-3|$ 取到最小，则只需 $|x-2|$ 取最小值，即 $x=2$ 时，取到最小值为 $|1-3|=2$，答案选 C。

【套路】形如 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$（令 $a<b<c$）表示 x 到 a,b,c 距离之和，当 $x=b$ 时，有最小值为 $|a-c|$，无最大值。

3. 形如 $|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$

【例 1-58】$|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$ 的最小值为(　　)。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 4

【解析】$|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$表示x到1,2,3,4的距离之和,由于$|x-1|+|x-4|$在$1\leqslant x\leqslant 4$取最小值$|1-4|$,$|x-2|+|x-3|$在$2\leqslant x\leqslant 3$取最小值$|2-3|$,所以当$2\leqslant x\leqslant 3$时,$|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$取最小值$|1-4|+|2-3|=4$,答案选E。

【套路】形如$|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$(令$a<b<c<d$)表示x到a,b,c,d距离之和,当$b\leqslant x\leqslant c$时,有最小值$|a-d|+|b-c|$,无最大值。

4. 形如$|x-a|-|x-b|$

【例 1-59】$|x-2|-|x-5|$的最大值和最小值分别为(　　)。

A. 3,4　　B. 3,−7　　C. 4,−3　　D. 4,−5　　E. 3,−3

【套路】$|x-2|-|x-5|$表示x到2的距离与x到5的距离的差。当$x>5$时,x到2的距离与x到5的距离的差均为3,见图1-4;当$x<2$时,x到2的距离与x到5的距离的差均为−3,见图1-5;当$2\leqslant x\leqslant 5$时,x从2移动到5,x到2的距离与x到5的距离的差从−3逐渐变成3,答案选E。

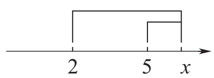

图　1-4

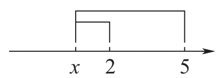

图　1-5

【套路】形如$|x-a|-|x-b|$表示x到a,b距离之差,最大值为$|a-b|$,最小值为$-|a-b|$。

【例 1-60】(2017-1)已知a,b,c为三个实数,则$\min\{|a-b|,|b-c|,|b-c|\}\leqslant 5$。

(1)$|a|\leqslant 5$,$|b|\leqslant 5$,$|c|\leqslant 5$。　　(2)$a+b+c=15$。

【解析】结论为a到b,b到c,a到c的距离的最小值小于等于5,即三个距离至少有一个小于等于5,或三个不能都大于5。条件(1),见图1-6,根据绝对值的几何意义,点a,b,c到原点的距离都小于等于5,而点a,b,c在−5和5之间任意取值时,两两之间的距离至少有一个小于等于5,因此能推出结论,充分;条件(2),$a+b+c=15$,举出反例$a=5,b=-5,c=15$,此时两两之间的距离都大于5,不能推出结论,不充分,答案选A。

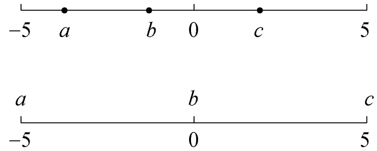

图　1-6

【套路】①绝对值的几何意义:$|m-n|$表示在数轴上m到n的距离;②$\min\{x,y,z\}\leqslant a$表示x,y,z中最小值小于等于a,即三个至少有一个小于等于a,或三个不能都大于a;同理$\max\{x,y,z\}\geqslant a$表示x,y,z中最大值大于等于a,即三个至少有一个大于等于a,或三个不能都小于a。

十、基本比例计算问题

【例 1-61】已知$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$,且$x+y+z=48$,那么$x=$(　　)。

A. 12　　B. 16　　C. 20　　D. 24　　E. 28

【解析】待定系数法,令$x=3k,y=4k,z=5k$,则$x+y+z=3k+4k+5k=48$,解得$k=4$,则$x=3k=12$,答案选A。

十一、合(分)比定理

【例 1-62】a,b,c,d均为正数,且$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,则$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$的值为(　　)。

A. $\frac{a^2}{d^2}$　　B. $\frac{b^2}{d^2}$　　C. $\frac{c^2}{d^2}$　　D. $\frac{b}{d}$　　E. $\frac{d}{b}$

【解析】方法(1),$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$两边平方得$\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$,由合比定理得$\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{c^2+d^2}{d^2}$,更比定理交换内项$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{b^2}{d^2}$,开方得$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{b}{d}$,答案选D。

方法(2),待定系数法,令$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k(k\neq 0)$,则$a=kb,c=kd$,代入$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{\sqrt{(kb)^2+b^2}}{\sqrt{(kd)^2+d^2}}=\frac{\sqrt{k^2+1}\times b}{\sqrt{k^2+1}\times d}=\frac{b}{d}$,答案选D。

【技巧】特值法,$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,令$a=1,b=2,c=3,d=6$,此时$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{1}{3}$,只有D选项符合,答案选D。

十二、等比定理

【例 1-63】$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a+c-b}{b}=\frac{b+c-a}{a}=$(　　)。

A. 1　　B. 1或-2　　C. -1或2　　D. -2　　E. 以上结论均不正确

【解析】方法(1),当$a+b+c\neq 0$时,利用等比定理,可得$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a+c-b}{b}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$;当$a+b+c=0$时,代入题干$\frac{a+b-c}{c}=\frac{-c-c}{c}=-2$,答案选B。

方法(2),待定系数法,令$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a+c-b}{b}=\frac{b+c-a}{a}=k$,则$\begin{cases}a+b-c=kc\\a+c-b=kb,\\b+c-a=ka\end{cases}$三式相加得$(a+b+c)=k(a+b+c)$,整理$(a+b+c)(k-1)=0$,则$k=1$或$a+b+$

$c=0$，当 $a+b+c=0$ 时，$k=\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{-c-c}{c}=-2$。综上所述，$k=1$ 或 $k=-2$，答案选 B。

十三、正比、反比

【例 1-64】若 y 与 $x-1$ 成正比，比例系数为 k_1；y 又与 $x+1$ 成反比，比例系数为 k_2，且 $k_1:k_2=2:3$，则 x 的值为（　　）。

A. $\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　　D. $\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　E. $-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】根据题意，$y=k_1(x-1)$，$y=\dfrac{k_2}{x+1}$，两式相除得 $1=\dfrac{k_1}{k_2}(x-1)(x+1)$，即 $x^2-1=\dfrac{3}{2}$，解得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，答案选 D。

十四、平均值基本定义

【例 1-65】六个数排成一行，它们的平均数是 27，前四个数的平均数是 23，后三个数的平均数是 34，则第四个数是（　　）。

A. 24　　B. 28　　C. 30　　D. 32　　E. 34

【解析】六个数的和是 $27\times6=162$，前四个数的和是 $23\times4=92$，后三个数的和是 $34\times3=102$，则第四个数的值为 $92+102-162=32$，答案选 D。

【例 1-66】(2021-1)某班增加了两名同学，则该班同学的平均身高增加了。

(1) 增加的两名同学的平均身高与原来男同学的平均身高相同。

(2) 原来男同学的平均身高大于女同学的平均身高。

【解析】条件(1)和(2)明显单独都不充分，联立可知，增加的两名同学平均身高＝原来男同学的平均身高＞女同学的平均身高，即增加的两名同学平均身高＞原来班级同学的平均身高，则该班同学的平均身高增加了，答案选 C。

十五、平均值定理求最值

1. 凑系数型

【例 1-67】当 $0<x<4$ 时，$x(8-2x)$ 的最大值为（　　）。

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8　　E. 以上结论均不正确

【解析】利用平均值定理可知和定积最大，通过凑系数让二者之和为定值。$x(8-2x)=\dfrac{1}{2}\times2x\times(8-2x)\leqslant\dfrac{1}{2}\times\left[\dfrac{2x+(8-2x)}{2}\right]^2=8$，答案选 D。

【套路】此类乘积形式无法直接用均值定理，但凑系数后可得到和为定值，从而利用平均值定理 $ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，求其乘积的最值。

2. 凑项型

【例 1-68】已知 $x<\frac{5}{4}$，则 $4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值为(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 以上结论均不正确

【解析】$4x-2$ 凑项为 $(4x-5)+3$，又 $x<\frac{5}{4}$，则 $4x-5<0$，需调整符号，则 $4x-2+\frac{1}{4x-5}=-\left[(5-4x)+\frac{1}{5-4x}\right]+3\leqslant -2+3=1$，当且仅当 $5-4x=\frac{1}{5-4x}$，即 $x=1$ 时，取等号，答案选 A。

【套路】此类题需要凑项构造出 $a+\frac{1}{a}$。利用平均值定理：当 $a>0$ 时，$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$；当 $a<0$ 时，$a+\frac{1}{a}\leqslant -2$，求其和的最值。

3. 凑指数型

【例 1-69】$x+\frac{4}{x^2}(x>0)$ 的最小值为(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 以上结论均不正确

【解析】$x+\frac{4}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{4}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\times\frac{x}{2}\times\frac{4}{x^2}}=3$，当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{x}{2}=\frac{4}{x^2}$，即 $x=2$ 时，取到等号，答案选 C。

【套路】此题关键是凑出乘积为定值。x 与 $\frac{4}{x^2}$ 分母的次数不一样，调整系数是行不通的，只能将二者中次数较低的拆成相等的项，再利用平均值定理 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，求其和的最值。

【扩展】题干若改为"求 $x^2+\frac{4}{x}(x>0)$ 的最小值"，则 $x^2+\frac{4}{x}=x^2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x}\geqslant 3\sqrt[3]{x^2\times\frac{2}{x}\times\frac{2}{x}}=3\sqrt[3]{4}$，当且仅当 $x^2=\frac{2}{x}$，即 $x=\sqrt[3]{2}$ 时，取到等号。

4. 分离型

【例 1-70】求 $\frac{x^2+7x+10}{x+1}(x>-1)$ 的最小值为(　　)。

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9　　E. 以上结论均不正确

【解析】$\frac{x^2+7x+10}{x+1}=\frac{(x+1)^2+5(x+1)+4}{x+1}=(x+1)+\frac{4}{x+1}+5\geqslant 2\sqrt{4}+5=9$，当且仅当 $x+1=\frac{4}{x+1}$，即 $x=1$ 时，取到等号，答案选 D。

【套路】此类题无法直接用平均值定理，可以将分子凑出含有 $(x+1)$ 的项，将其分离，再利用平均值定理：当 $a>0$ 时，$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$；当 $a<0$ 时，$a+\frac{1}{a}\leqslant -2$，求其和的最值。

【扩展】①$y=x+\frac{1}{x}$的图像形如双勾,因此称作双勾函数,见图 1-7。由图可得:当$x>0$时,$y=x+\frac{1}{x}\geqslant 2$;当$x<0$时,$y=x+\frac{1}{x}\leqslant -2$。

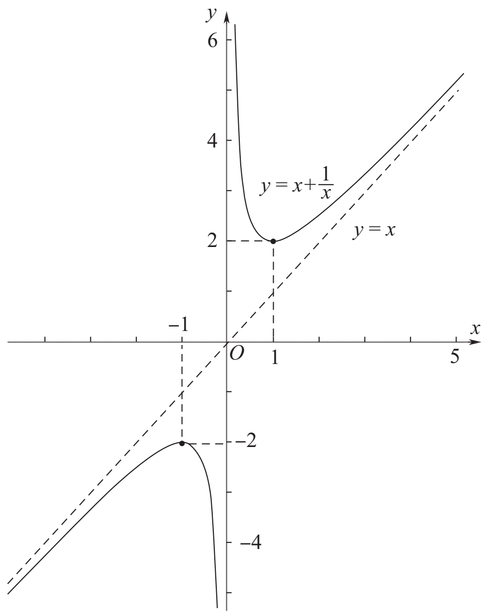

图 1-7 双勾函数

② $y=ax+\frac{b}{x}(a>0,b>0)$:当$x>0$时,$ax+\frac{b}{x}\geqslant 2\sqrt{ab}$,当且仅当$ax=\frac{b}{x}$,即$x=\sqrt{\frac{b}{a}}$时,取到等号;当$x<0$时,$ax+\frac{b}{x}\leqslant -2\sqrt{ab}$,当且仅当$ax=\frac{b}{x}$,即$x=-\sqrt{\frac{b}{a}}$时,取到等号。

【例 1-71】(2019-1)设函数$f(x)=2x+\frac{a}{x^2}(a>0)$在$(0,+\infty)$的最小值为$f(x_0)=12$,则$x_0=$(　　)。

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2　　E. 1

【解析】利用平均值定理$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$(当且仅当$a=b=c$时,取到等号),则$f(x)=2x+\frac{a}{x^2}=x+x+\frac{a}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{x\times x\times\frac{a}{x^2}}=3\sqrt[3]{a}=12$,当且仅当$x=x=\frac{a}{x^2}=4$时,取到等号,即$x_0=4$,答案选 B。

【套路】拆分时,为了保证取到最值,要进行平均拆分。

【例 1-72】(2020-1)设a,b是正实数,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$存在最小值。

(1) 已知ab的值。

(2) 已知a,b是方程$x^2-(a+b)x+2=0$的不同实根。

【解析】条件(1),$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$,$ab$的值已知,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$存在最小值为$2\sqrt{\frac{1}{ab}}$(当且仅

当$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$，即$a=b$时，取到等号$\Big)$，充分；条件(2)，根据韦达定理可得$ab=2$，虽然已知ab的值，但是$a\neq b$，不满足均值不等式取最小值的条件，不充分，答案选A。

【例1-73】(2018-1)设x，y为实数，则$|x+y|\leqslant 2$。

(1) $x^2+y^2\leqslant 2$。　　　　(2) $xy\leqslant 1$。

【解析】方法(1)，结论$|x+y|\leqslant 2\Leftrightarrow(x+y)^2\leqslant 2^2$，即$x^2+2xy+y^2\leqslant 4$。条件(1)，$x^2+y^2\leqslant 2$，根据平均值定理可得，$2xy\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$，则$2xy\leqslant 2$，因此$x^2+y^2+2xy\leqslant 2+2\leqslant 4$，能推出结论，充分；条件(2)，$xy\leqslant 1$，很容易找到反例，当$x=100$，$y=\frac{1}{100}$时，$|x+y|>2$，不充分，答案选A。

方法(2)，针对条件(1)可以采用图像法，如图1-8所示。因为$x+y=\pm 2$是圆$x^2+y^2=2$的上、下两条切线，而$|x+y|\leqslant 2$表示在两条直线之间的所有区域，又因为圆上和圆内所有的点都在两条直线之间，则条件的范围完全被包含在结论的范围中，充分。

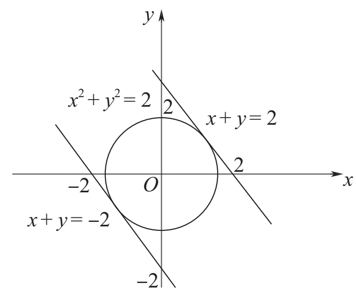

图1-8　图像法

1.5　强化提升习题

1. 某人左右两手分别握了若干个石子，左手中石子数乘3加上右手中石子数乘4之和为29，则右手中石子数是(　　)。

A. 奇数　　B. 偶数　　C. 质数　　D. 合数　　E. 以上结论均不正确

2. 若三个质数(素数)之积恰好等于它们和的5倍，则这三个质数之和为(　　)。

A. 12　　B. 14　　C. 15　　D. 18　　E. 20

3. 已知x为正整数，且$6x^2-19x-7$的值为质数，则这个质数为(　　)。

A. 2　　B. 7　　C. 11　　D. 13　　E. 17

4. (2014-10)m^2-n^2是4的倍数。

(1) m，n都是偶数。　　　　(2) m，n都是奇数。

5. 如果a，b，c是三个连续的奇数，则$a+b=32$。

(1) $10<a<b<c<20$。　　　　(2) b和c为质数。

6. 若整数a，m，n满足$\sqrt{a^2-4\sqrt{2}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$，则$m+n+a$取值有(　　)种。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

7. 纯循环小数$0.\dot{a}b\dot{c}$写成最简分数时，分子与分母之和是58，这个循环小数是(　　)。

A. $0.\dot{5}6\dot{7}$　　B. $0.\dot{5}3\dot{7}$　　C. $0.\dot{5}1\dot{7}$　　D. $0.\dot{5}6\dot{9}$　　E. $0.\dot{5}6\dot{2}$

8. 若1374除以某个质数，余数为9，则这个质数为(　　)。

A. 7　　B. 11　　C. 13　　D. 17　　E. 19

9. 一个盒子装有m($m\leqslant 100$)个小球，每次按照2个、3个、4个的顺序取出，最终盒内都只剩下1个小球，如果每次取出11个，则余4个，求m的各位数上的数字之和为(　　)。

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12　　E. 13

10. 一个自然数除以 2 余 1，除以 3 余 2，除以 5 余 4，满足此条件且介于 100～200 的自然数有（　　）个。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

11. 已知 a 为小于 60 的正整数，则可以确定 a 的值。

（1）72 除以 a 的余数为 3。

（2）118 除以 a 的余数为 3。

12. 已知两个正整数的最大公约数是 6，最小公倍数是 120，求这两个数的和是（　　）。

A. 126　　B. 54　　C. 126 或 54　　D. 124　　E. 124 或 54

13.（2008-10）设 a,b,c 为整数，且 $|a-b|^{29}+|c-a|^{41}=1$，则 $|a-b|+|a-c|+|b-c|=$（　　）。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. -3　　E. -2

14.（2010-1）$a|a-b|\geqslant|a|(a-b)$。

（1）实数 $a>0$。

（2）实数 a,b 满足 $a>b$。

15. 实数 a,b 满足 $|a|(a+b)>a|a+b|$。

（1）$a<0$。　　（2）$b>-a$。

16.（2008-10）$|1-x|-\sqrt{x^2-8x+16}=2x-5$。

（1）$2<x$。　　（2）$x<3$。

17.（2010-10）若实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=9$，则代数式 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 的最大值是（　　）。

A. 21　　B. 27　　C. 29　　D. 32　　E. 39

18.（2008-1）$\dfrac{b+c}{|a|}+\dfrac{c+a}{|b|}+\dfrac{a+b}{|c|}=1$。

（1）实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$。

（2）实数 a,b,c 满足 $abc>0$。

19. 方程 $|2x-11|=|x-3|+|x-8|$ 的解集为（　　）。

A. $3<x<8$　　B. $x\leqslant3$　　C. $x\geqslant8$

D. $x<3$ 或 $x>8$　　E. $x\leqslant3$ 或 $x\geqslant8$

20. 方程 $|3x-4|+|3x+2|=6$ 的整数解有（　　）个。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

21. 已知 $x\leqslant\dfrac{5}{2}$，关于 $|x-1|-|x-3|$ 的最值，下列说法正确的是（　　）。

A. 最大值为 1，最小值为 -1　　B. 最大值为 2，最小值为 -1

C. 最大值为 2，最小值为 -2　　D. 最大值为 1，最小值为 -2

E. 无最大值和最小值

22.（2013-10）方程 $|x+1|+|x+3|+|x-5|=9$ 存在唯一解。

（1）$|x-2|\leqslant3$。　　（2）$|x-2|\geqslant2$。

23. 已知 $\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}$（$a,b,c$ 互不相等），则 $x+y+z=$（　　）。

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 0 或 1　　E. 2

24. 已知$x_1,x_2,\cdots,x_n$的几何平均值为3,前面$n-1$个数的几何平均值为2,则x_n的值是(　　)。

A. $\frac{9}{2}$　　B. $\left(\frac{3}{2}\right)^n$　　C. $2\left(\frac{3}{2}\right)^n$　　D. $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$　　E. $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$

25. (2014-10)a,b,c,d,e五个数满足$a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$,其平均数$m=100$,$c=120$,则$e-a$的最小值是(　　)。

A. 45　　B. 50　　C. 55　　D. 60　　E. 65

26. 已知$x>0$,函数$y=\frac{2}{x}+3x^2$的最小值是(　　)。

A. $2\sqrt{6}$　　B. $3\sqrt[3]{3}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. 6　　E. 以上结论均不正确

27. (2010-1)设a和b为非负实数,则$a+b\leqslant\frac{5}{4}$。

(1) $ab\leqslant\frac{1}{16}$。　　(2) $a^2+b^2\leqslant 1$。

28. (2020-1)设a,b,c,d是正实数,则$\sqrt{a}+\sqrt{d}\leqslant\sqrt{2(b+c)}$。

(1) $a+d=b+c$。　　(2) $ad=bc$。

29. (2009-10)$a+b+c+d+e$的最大值为133。

(1) a,b,c,d,e是大于1的自然数,且$abcde=2700$。

(2) a,b,c,d,e是大于1的自然数,且$abcde=2000$。

30. (2009-10)$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$。

(1) $abc=1$。

(2) a,b,c为不全相等的正数。

强化提升习题详解

1.【解析】左×3+右×4=29,因为29是奇数,右×4是偶数,所以左×3是奇数,则左手中石子数是奇数。通过讨论左手中石子数为3或7时,右手中石子数为5或2,可判定右手的石子数是质数,答案选C。

2.【解析】设三个质数为a,b,c,由题意得$abc=5(a+b+c)$,可知必有一个质数是5。设$a=5$,则$5bc=5(5+b+c)$,即$bc=5+b+c$,整理为$bc-b-c+1=6$,分解得$(b-1)(c-1)=6=2\times3=1\times6$。又因为$b,c$为质数,所以$\begin{cases}b-1=1\\c-1=6\end{cases}$,解得$\begin{cases}b=2\\c=7\end{cases}$,所以$a+b+c=14$,答案选B。

3.【解析】$6x^2-19x-7=(3x+1)(2x-7)$,由于质数只能分解为1和它本身相乘,则$(3x+1)$和$(2x-7)$必有一个为1。明显当$2x-7=1$,即$x=4$时,$6x^2-19x-7=13$,则这个质数为13,答案选D。

4.【解析】$m^2-n^2=(m+n)(m-n)$。条件(1),m和n都是偶数,则$m+n,m-n$也都是偶数,因此m^2-n^2必然是4的倍数,充分;条件(2),m和n都是奇数,则$m+n,m-n$也都是偶数,因此m^2-n^2必然是4的倍数,也充分,答案选D。

5.【解析】条件(1)和(2)显然单独都不充分，考虑联合，三个连续的奇数且 b 和 c 为质数，讨论得 $a=15,b=17,c=19$，所以 $a+b=32$，联合充分，答案选C。

6.【解析】等式两边同时平方去根号：$a^2-4\sqrt{2}=m+n-2\sqrt{mn}$，利用对应项相等，则 $\begin{cases}m+n=a^2\\mn=8(m\geqslant n\geqslant 0)\end{cases}$，又 a,m,n 均为整数，尝试分解法 $mn=8=8\times1=4\times2$，则 $\begin{cases}m=8\\n=1\\a=\pm3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=4\\n=2\\a=\pm\sqrt{6}\end{cases}$（舍弃），则 $m+n+a$ 的取值有两种，答案选B。

7.【解析】$0.\dot{a}b\dot{c}$ 化为分数是 $\frac{abc}{999}$。当化为最简分数时，因为分母大于分子，所以分母大于 $58\div2=29$，即分母是大于29的两位数。由 $999=3\times3\times3\times37$，推知999的分母大于29的两位数的约数只有37，所以分母是37，分子是 $58-37=21$，因为 $\frac{21}{37}=\frac{21\times27}{37\times27}=\frac{567}{999}$，所以这个循环小数是 $0.\dot{5}6\dot{7}$，答案选A。

8.【解析】分解质因数法，$1374-9=1365=3\times5\times7\times13$，因为余数为9，则除数必然大于9，这个质数为13，答案选C。

9.【解析】根据题意，$m-1$ 能被2，3，4整除，因此 $m-1$ 是12的倍数，即 $m-1=12k$，$m=12k+1$，而每次取出11个余4个，$m=12k+1=11k+(k+1)$，则 $k+1=4,k=3$，$m=12\times3+1=37$，因此各数位上的数字之和为10，答案选B。

10.【解析】此数加上1，即为2，3，5的公倍数。由于2，3，5的最小公倍数为30，所以此数为 $30k-1(k\in\mathbf{Z})$。又因为 $100\leqslant 30k-1\leqslant 200$，解得 $k=4,5,6$，则此数为119，149，179，共有三种情况，答案选C。

【套路】除数与余数的差值都相等时，“差同减差”。

11.【解析】条件(1)，72除以 a 的余数为3，则 $a>3$ 且 a 为69的约数，因此 $a=23$，充分；条件(2)，118除以 a 的余数为3，则 $a>3$ 且 a 为115的约数，因此 $a=5$ 或 $a=23$，不能唯一确定，不充分，答案选A。

12.【解析】设这两个正整数分别是 $6m$ 和 $6n$，且 $(m,n)=1$，令 $n>m>0$，则这两个数的最小公倍数是 $6mn=120$，所以 $mn=20=1\times20=4\times5$，则 $\begin{cases}m=1\\n=20\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=4\\n=5\end{cases}$，因此两个数 $\begin{cases}6m=6\\6n=120\end{cases}$ 或 $\begin{cases}6m=24\\6n=30\end{cases}$，$6m+6n=126$ 或54，答案选C。

【套路】若已知两个数的最大公约数为 k，可设这两个数分别为 km 和 kn，且 $(m,n)=1$，则最小公倍数为 kmn，这两个数的乘积为 k^2mn。

13.【解析】采用特值法，令 $a=b=0,c=1$，满足 $|a-b|^{20}+|c-a|^{41}=1$，此时 $|a-b|+|a-c|+|b-c|=0+1+1=2$，答案选A。

14.【解析】条件(1)，$a>0$，不等式左边 $a|a-b|\geqslant0$，一定能推出结论，充分；条件(2) $a>b$，不等式右边 $|a|(a-b)\geqslant0$，可以找到反例：当 $a<0$ 时，$a|a-b|<0$，此时 $a|a-b|<|a|(a-b)$，不充分，答案选A。

【扩展】若结论改为 $a|a-b|>|a|(a-b)$，则必须满足 $\begin{cases}a|a-b|>0\\|a|(a-b)<0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a>0\\a-b<0\end{cases}$，即 $0<a<b$。

15.【解析】$|a|(a+b)>a|a+b|$成立，必须满足$\begin{cases}|a|(a+b)>0\\a|a+b|<0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a+b>0\\a<0\end{cases}$，条件(1)和(2)联合充分，答案选C。

【扩展】若结论改为“$|a|(a+b)\geqslant a|a+b|$”，则只需要满足$a+b\geqslant 0$或$a\leqslant 0$，此时两个条件都充分，答案选D。

16.【解析】$|1-x|-\sqrt{(x-4)^2}=|1-x|-|x-4|$，显然当$1-x\leqslant 0$且$x-4\leqslant 0$时，$|1-x|-|x-4|=(x-1)-(4-x)=2x-5$，因此$1\leqslant x\leqslant 4$，条件(1)和(2)联合充分，答案选C。

17.【解析】代数式展开整理为$2(a^2+b^2+c^2)-(2ab+2ac+2bc)=2\times 9-(2ab+2ac+2bc)$，又因为$2(ab+ac+bc)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$，则$2\times 9-(2ab+2ac+2bc)=2\times 9-\left[(a+b+c)^2-9\right]=27-(a+b+c)^2\leqslant 27$，因此代数式的最大值是27，答案选B。

【技巧】极端赋值法，当$a=\sqrt{4.5}$，$b=-\sqrt{4.5}$，$c=0$时，取到最大值27，答案选B。

18.【解析】条件(1)，$\frac{b+c}{|a|}+\frac{c+a}{|b|}+\frac{a+b}{|c|}=\frac{-a}{|a|}+\frac{-b}{|b|}+\frac{-c}{|c|}$，由于$a,b,c$的正负性不确定，推不出结论，不充分；条件(2)，$abc>0$，没有等量关系，也推不出结论，不充分；条件(1)和(2)联合，可以得到a,b,c必然是两负一正，令$a>0,b<0,c<0$，此时$\frac{-a}{|a|}+\frac{-b}{|b|}+\frac{-c}{|c|}=-1+1+1=1$，联合充分，答案选C。

19.【解析】令$x-3=a$，$x-8=b$，则$2x-11=a+b$，题干方程即为$|a+b|=|a|+|b|$。根据三角不等式，成立的条件为$ab\geqslant 0$，即$(x-3)(x-8)\geqslant 0$，解得$x\leqslant 3$或$x\geqslant 8$，答案选E。

【技巧】特值法排除，$x=3$，$x=8$都是方程的解，排除A，B，C，D，答案选E。

20.【解析】方程可以整理为$\left|x-\frac{4}{3}\right|+\left|x+\frac{2}{3}\right|=2$，根据绝对值几何意义，当$-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$时，$\left|x-\frac{4}{3}\right|+\left|x+\frac{2}{3}\right|$有最小值$\left|\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|=2$，方程的解集即为$-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$，又$x$是整数，因此$x=0$或1，答案选B。

21.【解析】方法(1)，分段讨论法。当$x\leqslant 1$时，$|x-1|-|x-3|=(1-x)-(3-x)=-2$；当$1<x\leqslant\frac{5}{2}$时，$|x-1|-|x-3|=(x-1)-(3-x)=2x-4$，则当$x=\frac{5}{2}$时，有最大值$2\times\frac{5}{2}-4=1$，综上所述，最大值为1，最小值为$-2$，答案选D。

方法(2)，$|x-1|-|x-3|$表示x到1的距离与x到3的距离的差。当$x\leqslant1$时，有最小值$-|1-3|=-2$；当$x\geqslant3$时，有最大值$|1-3|=2$；当$1\leqslant x\leqslant3$时，x从1移动到3，函数值从-2变成2，又因为$x\leqslant\frac{5}{2}$，所以$x=\frac{5}{2}$时，函数有最大值$\left|\frac{5}{2}-1\right|-\left|\frac{5}{2}-3\right|=1$，综上所述，最大值为1，最小值为$-2$，答案选D。

【套路】形如$|x-a|-|x-b|$表示x到a和b距离之差，最大值为$|a-b|$，最小值为$-|a-b|$。

22.【解析】整理为$|x+3|+|x+1|+|x-5|$，表示数轴上点x到点$-3,-1,5$距离之和。当$x=-1$时，最小值为$|-3-5|=8$；当$-3\leqslant x\leqslant5$时，$|x+3|+|x-5|$为定值$|-3-5|=8$，而$|x+3|+|x+1|+|x-5|=9$，则此时点x到点-1距离应为1，即$x=-2$或$x=0$。条件(1)，$|x-2|\leqslant3$，解得$-1\leqslant x\leqslant5$，此时方程$|x+1|+|x+3|+|x-5|=9$在$-1\leqslant x\leqslant5$区间只有唯一解$x=0$，舍去$x=-2$，充分；同理，条件(2)，$|x-2|\geqslant2$，解得$x\geqslant4$或$x\leqslant0$，此时方程在$x\geqslant4$或$x\leqslant0$区间有两个解$x=-2$或$x=0$，不充分，答案选A。

【套路】形如$|x-a|+|x-b|+|x-c|$(令$a<b<c$)表示x到a,b,c距离之和，无最大值，当$x=b$时，有最小值$|a-c|$。

23.【解析】待定系数法，令$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=k$，则$\begin{cases}x=k(a-b)\\y=k(b-c)\\z=k(a-c)\end{cases}$，三式相加得$x+y+z=0$，答案选C。

24.【解析】考查几何平均值的定义，根据题意得$\begin{cases}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=3\\\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}=2\end{cases}$，整理为$\begin{cases}x_1x_2\cdots x_n=3^n\\x_1x_2\cdots x_{n-1}=2^{n-1}\end{cases}$，两式相除得$x_n=\frac{3^n}{2^{n-1}}=2\left(\frac{3}{2}\right)^n$，答案选C。

25.【解析】当e最小且a最大时，$e-a$取得最小值，由于平均数$m<c$，因此a最大不能取到120，应该先考虑e的值，$120=c\leqslant d\leqslant e$，因此$e$最小取120，此时$c=d=e=120$，又$a+b+c+d+e=100\times5=500$，$a\leqslant b$，要使$a$最大，则$a=b=70$，因此$e-a$的最小值是$120-70=50$，答案选B。

26.【解析】利用平均值定理，平均拆分，$y=\frac{2}{x}+3x^2=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+3x^2\geqslant3\sqrt[3]{\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}\times3x^2}=3\sqrt[3]{3}$，当且仅当$\frac{1}{x}=3x^2$，即$x=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$，取到等号，答案选B。

27.【解析】条件(1)，举反例，当$a=0,b=2$时，$a+b=2>\frac{5}{4}$，推不出结论，不充分；条件(2)，举反例，当$a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$a+b=\sqrt{2}>\frac{5}{4}$，推不出结论，也不充分；考虑联合，$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant1+2\times\frac{1}{16}=\frac{18}{16}$，又$a,b$为非负实数，则$a+b\leqslant\sqrt{\frac{18}{16}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}<\frac{5}{4}$，

联合充分,答案选C。

28.【解析】结论的等价形式为$(\sqrt{a}+\sqrt{d})^2\leqslant\sqrt{2(b+c)}^{\,2}$,即$a+d+2\sqrt{ad}\leqslant 2(b+c)$,条件(1),$a+d=b+c$,而$a+d\geqslant 2\sqrt{ad}$,则$a+d+2\sqrt{ad}\leqslant 2(a+d)=2(b+c)$,充分;条件(2),$ad=bc$,仍然确定不了$a+d$和$b+c$的大小关系,因此推不出结论,举反例,当$a=9$,$d=1$,$b=c=3$时,$\sqrt{a}+\sqrt{d}=3+1=4$,$\sqrt{2(b+c)}=2\sqrt{3}$,则$\sqrt{a}+\sqrt{d}>\sqrt{2(b+c)}$,不充分,答案选A。

29.【解析】当几个正数的乘积为定值时,这几个数相差越大,和越大。条件(1),$abcde=2700$,要求a,b,c,d,e的和是最大值,应让这五个数相差尽可能大,则$abcde=2700=2\times2\times3\times3\times75$,和的最大值为$2+2+3+3+75=85\neq133$,不充分;同理,条件(2),$abcde=2000=2\times2\times2\times2\times125$,和的最大值为$2+2+2+2+125=133$,充分,答案选B。

【套路】①平均值定理:当几个正数的乘积为定值时,这几个数越接近,和越小;这几个数相差越大,和越大。②当几个正数的和为定值时,这几个数越接近,乘积越大;这几个数相差越大,乘积越小。

【扩展】结论若改为"求$a+b+c+d+e$的最小值",则条件(1),$abcde=2700=3\times5\times5\times6\times6$,和的最小值为$3+5+5+6+6=25$;条件(2),$abcde=2000=4\times4\times5\times5\times5$,和的最小值为$4+4+5+5+5=23$。

30.【解析】条件(1),举反例$a=b=c=1$,推不出结论,不充分;条件(2),举反例$a=1$,$b=1$,$c=4$,推不出结论,也不充分;联合起来,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{abc}{a}+\frac{abc}{b}+\frac{abc}{c}=bc+ac+ab$,根据平均值定理$bc+ac+ab=\left(\frac{ab}{2}+\frac{ac}{2}\right)+\left(\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}\right)+\left(\frac{ac}{2}+\frac{bc}{2}\right)\geqslant 2\sqrt{\frac{ab}{2}\times\frac{ac}{2}}+2\sqrt{\frac{ab}{2}\times\frac{bc}{2}}+2\sqrt{\frac{ac}{2}\times\frac{bc}{2}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$,又$a,b,c$为不全相等的正数,取不到等号,因此$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$,联合充分,答案选C。