第5章 插 值 法

CHAPTER

抽梁换柱，李代桃僵。——插值函数与被插函数

5.1 引 言

在实际应用中可能遇到某些难求的函数。插值法的主要思想是构造易求的函数，如果易求的函数和难求的函数在某一区间内足够接近，那么在这一区间内就可以用易求的函数代替难求的函数进行计算。插值的几何意义，就是在仅知道函数曲线上若干点的情况下作图，用一条曲线经过这些已知点，尽量使这条曲线接近原来的函数曲线，并把这条曲线近似地认为是原来的函数曲线。如图5.1所示，$y=f(x)$为难求函数，仅知道$y=f(x)$上的4个点$(x_0,f(x_0))$、$(x_1,f(x_1))$、$(x_2,f(x_2))$、$(x_3,f(x_3))$。构造一个易求函数$y=p(x)$，使$y=p(x)$经过这4个点。若误差在允许的范围内，就可以用函数$p(x)$代替$f(x)$。

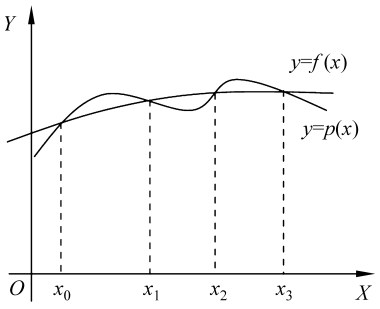

图5.1 插值的几何含义

常常在以下两种情况用插值法求$f(x)$。

情况1：$f(x)$同时满足下列条件。

(1) 不知道或不存在函数$f(x)$的具体形式。

(2) 知道$f(x)$上某些离散的点。

如弹道曲线、人口增长曲线、股票走势曲线等。通过测量等手段，可以得到$f(x)$曲线上某些点，但是不可能测量出$f(x)$上所有点，那么就可以用插值法近似地计算出$f(x)$在已知点之外的点。

情况2：$f(x)$同时满足下列条件。

(1) 知道函数$f(x)$的具体形式。

(2) 对于任意的x求$f(x)$较困难。

(3) 对于某些特定的 x 求 $f(x)$较容易。

例如,$f(x)=\sqrt{x}$(即 $x=f^2(x)$)由 x 求 $f(x)$较困难,由 $f(x)$求 x 较容易。如果已知 x_0 求 $f(x_0)$,那么可以由 $x=f^2(x)$尝试求出 $f(x)$在 x_0 附近的若干点,再进行插值,得到 $f(x_0)$的近似值。

定义 5.1 设 $f(x)$是区间$[a,b]$上的连续函数,已知 $f(x)$在$[a,b]$上 $x=x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的函数值(设 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$,共 $n+1$ 个互异点),若存在函数 $p(x)$,满足 $p(x_i)=f(x_i)$,其中 $i=0,1,2,\cdots,n$,则称:

(1) $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值节点(插值基点),所求点 x 为插值点。

(2) $[a,b]$为插值区间,插值点 $x\in$插值区间$[a,b]$为内插,否则为外推。

(3) $p(x)$为插值函数,$f(x)$为被插函数。

(4) $p(x_i)=f(x_i)$(其中 $i=0,1,2,\cdots,n$)为插值条件。

(5) $R(x)=f(x)-p(x)$为插值余项。

(6) 插值函数的构造方法为插值法。

插值的目的在于用易求的插值函数 $p(x)$代替难求的被插函数 $f(x)$。构造插值函数的依据是插值条件。常见的函数类型有幂函数、指数函数、三角函数等。在选择插值函数的类型时,应尽量遵循以下原则:

(1) 对任意插值条件,插值函数存在且唯一。

(2) 易构造插值函数。

(3) 易估计误差。

幂函数除了满足以上条件之外,还具有高阶可导、可积,易手工计算,易编程实现等优点,是使用较广泛的插值函数。

定义 5.2 代数插值(多项式插值)的插值函数是幂函数。设插值节点共有 $n+1$ 个,依次为 $x_0,x_1,\cdots,x_n$,那么插值函数 $p(x)$是次数不超过 n 次的代数多项式,称 $p(x)$为 n 次(代数)插值多项式,它的一般形式为 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$。

由定义 5.2 可知,可以由待定系数法求解插值多项式 $p(x)$,即求解下列线性方程组:

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=f(x_0) \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=f(x_1) \\ \quad\vdots\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\vdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=f(x_n) \end{cases}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为要确定的系数。若把 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 看作变元,则此线性方程组的系数行列式为范德蒙德行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\neq 0$$

由克拉默法则得知,$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 存在且唯一,所以插值多项式 $p(x)$存在且唯一。

本章介绍代数插值、带导数的埃尔米特插值和分段插值。本章内容是第 6 章数值积分的基础。

5.2　拉格朗日插值

本章介绍的代数插值有拉格朗日插值和牛顿插值。由代数插值的存在唯一性可知，拉格朗日插值多项式和牛顿插值多项式在化为标准形式后是相同的，二者的区别是构造插值多项式的过程不同。

5.2.1　1 次拉格朗日插值

拉格朗日插值(Lagrange 插值)是一种含义直观的代数插值方法。对 2 个插值节点(x_0,y_0)、(x_1,y_1)的 1 次拉格朗日插值(即线性拉格朗日插值)如图 5.2 所示。线性拉格朗日插值函数的一般形式为

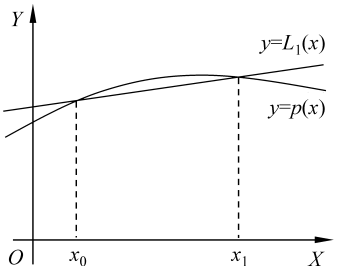

图 5.2　1 次拉格朗日插值

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

令

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

则

$$L_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$$

称 $l_0(x)$、$l_1(x)$为线性拉格朗日插值基函数。

线性拉格朗日插值有明显的几何意义。

两点确定唯一的一条直线。直线 $L_1(x)$的斜率$=\dfrac{L_1(x)-y_0}{x-x_0}=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$，所以

$$L_1(x)-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

继续变形，可得

$$\begin{aligned}L_1(x)&=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)=y_0-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1\\&=\left(1-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1=\frac{x_1-x}{x_1-x_0}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1\\&=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1\end{aligned}$$

也可以由代数插值的存在唯一性证明线性拉格朗日插值函数的一般形式。

证明　(1) 显然 $L_1(x)$是 x 的 1 次多项式。

(2) 下面证明 $L_1(x)$经过插值节点(x_0,y_0)、(x_1,y_1)。

因为

$$L_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

因为当 $x=x_0$ 时，$l_0(x)=1$，$l_1(x)=0$，则 $L_1(x_0)=y_0$，所以 $L_1(x)$经过插值节点(x_0,y_0)。

当 $x=x_1$ 时,$l_0(x)=0$,$l_1(x)=1$,则 $L_1(x_1)=y_1$,所以 $L_1(x)$经过插值节点(x_1,y_1)。

(3) 由代数插值的存在唯一性,$L_1(x)$是经过 2 个插值节点的 1 次拉格朗日插值函数。

5.2.2 2 次拉格朗日插值

对 3 个插值节点(x_0,y_0)、(x_1,y_1)、(x_2,y_2)的 2 次拉格朗日插值(即抛物线拉格朗日插值)如图 5.3 所示。2 次拉格朗日插值函数的一般形式为

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

令

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

则

$$L_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2=\sum_{i=0}^{2}l_i(x)y_i$$

其中,$l_i(x)=\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{2}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$,称 $l_i(x)$ 为 2 次拉格朗日插值基函数。

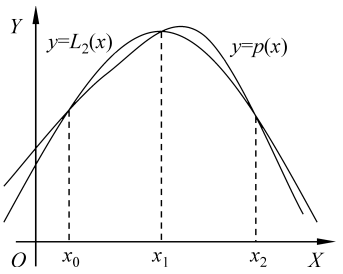

图 5.3 2 次拉格朗日插值

2 次拉格朗日插值的几何意义为 3 点确定一条抛物线,如图 5.3 所示。

可以由代数插值的存在唯一性证明 2 次拉格朗日插值函数的一般形式。

证明 (1) 显然,拉格朗日插值基函数 $l_0(x)$、$l_1(x)$、$l_2(x)$为 2 次多项式,所以 $L_2(x)$是 x 的 2 次多项式。

(2) 下面证明 $L_2(x)$经过插值节点(x_0,y_0)、(x_1,y_1)、(x_2,y_2)。

当 $x=x_0$ 时,$l_0(x)=1$,$l_1(x)=l_2(x)=0$,所以 $L_2(x_0)=y_0$,故 $L_2(x)$经过插值节点(x_0,y_0)。

当 $x=x_1$ 时,$l_1(x)=1$,$l_0(x)=l_2(x)=0$,所以 $L_2(x_1)=y_1$,故 $L_2(x)$经过插值节点(x_1,y_1)。

当 $x=x_2$ 时,$l_2(x)=1$,$l_0(x)=l_1(x)=0$,所以 $L_2(x_2)=y_2$,故 $L_2(x)$经过插值节点(x_2,y_2)。

(3) 由代数插值的存在唯一性可知，$L_2(x)$是经过 3 个插值节点的 2 次拉格朗日插值函数。

例 5.1　令 $f(x)=\sqrt{x}$，取插值节点为 $f(2.56)=1.6$、$f(2.89)=1.7$、$f(3.24)=1.8$，用 2 次拉格朗日插值计算$\sqrt{3}$的近似值。

解　令插值节点$(x_0,y_0)=(2.56,1.6)$、$(x_1,y_1)=(2.89,1.7)$、$(x_2,y_2)=(3.24,1.8)$，故插值点

$$\begin{aligned}f(3)&=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2\\&=\frac{(3-2.89)(3-3.24)}{(2.56-2.89)(2.56-3.24)}\times1.6+\frac{(3-2.56)(3-3.24)}{(2.89-2.56)(2.89-3.24)}\times1.7+\\&\quad\frac{(3-2.56)(3-2.89)}{(3.24-2.56)(3.24-2.89)}\times1.8\\&\approx1.732\end{aligned}$$

所以$\sqrt{3}\approx1.732$。

5.2.3　n 次拉格朗日插值

过 $n+1$ 个插值节点(x_0,y_0)，(x_1,y_1)，…，(x_n,y_n)的 n 次拉格朗日插值函数的一般形式为

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)y_i=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots+l_n(x)y_n$$

其中 $l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$，式中 $i=0,1,2,\cdots,n$。

$l_i(x)$称为拉格朗日插值基函数。

$l_i(x)$分式的规律是：分母的因子中 x_i 把其他的插值节点减了一遍，除(x_i-x_i)外；把分母的因子中的 x_i 替换为 x，就变成分子的因子。

可以由代数插值的存在唯一性证明 n 次拉格朗日插值函数的一般形式。

证明　(1) 显然 $l_i(x)$是 x 的 n 次多项式，所以 $L_n(x)$也是 x 的 n 次多项式。

(2) 下面证明 $L_n(x)$经过全部的 $n+1$ 个插值节点(x_0,y_0)，(x_1,y_1)，…，(x_n,y_n)。

拉格朗日插值基函数 $l_i(x)$有以下性质：

$$l_i(x)=\begin{cases}1, & x=x_i\\0, & x=x_j(j=0,1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n,\text{即 }j\neq i)\end{cases}$$

例如

$$l_1(x)=\begin{cases}1, & x=x_0\\0, & x=x_1,x_2,\cdots,x_n\end{cases}$$

所以，当 $x=x_0$ 时，$l_0(x)=1$，$l_1(x)=l_2(x)=\cdots=l_n(x)=0$，所以 $L_n(x_0)=y_0$。

当 $x=x_1$ 时，$l_1(x)=1$，$l_0(x)=l_2(x)=\cdots=l_n(x)=0$，所以 $L_n(x_1)=y_1$。

总之,当 $x=x_i$(其中 $i=0,1,2,\cdots,n$)时,$l_i(x)=1$,$l_0(x)=\cdots=l_{i-1}(x)=l_{i+1}(x)=\cdots=l_n(x)=0$,所以 $L_n(x_i)=y_i$,故 $L_n(x)$经过全部的 $n+1$ 个插值节点(x_0,y_0),$(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$。

(3) 由代数插值的存在唯一性可知,$L_n(x)$是经过全部的 $n+1$ 个插值节点(x_0,y_0),$(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$的 n 次拉格朗日插值函数。

5.2.4 拉格朗日插值函数的构造

拉格朗日插值函数的构造如下。

(1) 假设 n 次拉格朗日插值函数 $L_n(x)$可以化为下面的形式:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}W_i(x)y_i=W_0(x)y_0+W_1(x)y_1+\cdots+W_n(x)y_n$$

其中,$W_0(x),W_1(x),\cdots,W_n(x)$是次数不高于 n 次的代数多项式。

如果 $W_0(x),W_1(x),\cdots,W_n(x)$满足下式:

$$W_i(x)=\begin{cases}1, & x=x_i\\ 0, & x=x_j(j=0,1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n,\text{即 } j\neq i)\end{cases},\quad i=0,1,\cdots,n$$

那么 $L_n(x)$是经过全部的 $n+1$ 个插值节点$(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$的 n 次多项式。

对 $W_i(x)$的约束条件有 $n+1$ 个,确定 n 次多项式 $W_i(x)$需要确定 $n+1$ 个系数,所以 $W_i(x)$存在且唯一。

(2) 因为 $W_i(x)$在 $x=x_0,x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n$ 时为 0,所以 $W_i(x)$包含因子$(x-x_0),(x-x_1),\cdots,(x-x_{i-1}),(x-x_{i+1}),\cdots,(x-x_n)$,因此可以设

$$W_i(x)=\lambda_i(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$$

又因为当 $x=x_i$ 时,$W_i(x)=1$,所以

$$W_i(x_i)=\lambda_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)=1$$

变形可得

$$\lambda_i=\frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

由上式可得

$$\begin{aligned}W_i(x)&=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\\&=\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\end{aligned}$$

故 $W_i(x)$即拉格朗日插值基函数 $l_i(x)$。

所以

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)y_i=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots+l_n(x)y_n$$

其中,$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$,式中 $i=$

0,1,2,…,n。

证毕。

5.2.5　拉格朗日插值函数的余项

拉格朗日插值余项函数 $R_n(x)$=被插函数 $f(x)$−插值函数 $L_n(x)$。

定理 5.1　拉格朗日插值余项函数 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}W_n(x)$，其中

$$W_n(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

当 $x\in[a,b]$时，$\xi\in[a,b]$，且 ξ 与 x 有关。

证明　下面分 3 种情况证明定理 5.1。

情况 1：被插函数 $f(x)$是 m 阶代数多项式，插值节点共 $n+1$ 个，且 $m\leqslant n$。

设拉格朗日插值函数 $L_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$。

(1) 显然，$a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_n=0$，$L_n(x)$也是 m 阶代数多项式，即 $L_n(x)=f(x)$，几何含义是 $L_n(x)$与 $f(x)$的曲线图像完全重合，没有误差。

所以拉格朗日插值余项函数 $R_n(x)$恒为 0。

(2) 因为对代数多项式函数求 1 次导数，多项式的阶数少 1；对 0 次多项式(常数)求 1 次导数，代数多项式函数变为常数 0，又因为 $f(x)$是 m 阶代数多项式，且 $m\leqslant n$，所以 $f^{(n+1)}(x)$恒为 0。故 $f^{(n+1)}(\xi)=0$，其中 $\xi\in[a,b]$。

由上可得，拉格朗日插值余项函数 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}W_n(x)$恒为 0。

(3) 由(1)、(2)得，定理 5.1 在情况 1 时成立。

情况 2：被插函数 $f(x)$是 m 阶代数多项式，插值节点共 $n+1$ 个，且 $m=n+1$。

设被插函数 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}$，其中 $a_{n+1}\neq0$。

(1) 因为 $f(x)$是 $n+1$ 阶多项式，$L_n(x)$是 n 阶多项式，所以 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)$为 $n+1$ 阶多项式，且 $R_n(x)$的 $n+1$ 阶项为 $a_{n+1}x^{n+1}$，即 $R_n(x)$的 $n+1$ 阶项与 $f(x)$的 $n+1$ 阶项相同。

(2) 因为 $f(x)$与 $L_n(x)$在 $n+1$ 个插值节点处没有误差(几何含义是 $f(x)$与 $L_n(x)$在 $n+1$ 个插值节点处相交)，所以当 $x=x_0$，或 $x=x_1$，或 $x=x_2$，…，或 $x=x_n$ 时，$R_n(x)$为 0，故 $R_n(x)$含有因子$(x-x_0)$，$(x-x_1)$，$(x-x_2)$，…，$(x-x_n)$。

(3) 由(1)、(2)得，$R_n(x)=a_{n+1}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$。

(4) 因为 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}$，对其中的前 n 项 a_0，a_1x，a_2x^2，…，a_nx^n 求 $n+1$ 阶导数时恒为 0；然而又有

$$\begin{aligned}a_{n+1}(x^{n+1})^{(n+1)}&=a_{n+1}(n+1)(x^n)^{(n)}=a_{n+1}(n+1)n(x^{n-1})^{(n-1)}\\&=a_{n+1}(n+1)n(n-1)(x^{n-2})^{(n-2)}=\cdots=a_{n+1}(n+1)!\end{aligned}$$

也就是说，对第 $n+1$ 项 $a_{n+1}x^{n+1}$求 $n+1$ 阶导数，恒为常数 $a_{n+1}(n+1)!$。

由上可得，$f^{(n+1)}(x)$恒为常数 $a_{n+1}(n+1)!$，故 $f^{(n+1)}(\xi)=a_{n+1}(n+1)!$，所以拉格朗日插值余项函数 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}W_n(x)=\dfrac{a_{n+1}(n+1)!}{(n+1)!}W_n(x)=a_{n+1}(x-x_0)(x-$

$x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$。

(5) 由(3)、(4)得,定理 5.1 在情况 2 时成立。

情况 3:除情况 1 和情况 2 之外的情况,即被插函数 $f(x)$是 m 阶代数多项式($m>n+1$)或者 $f(x)$是其他类型的函数。

设插值点位于 $x=_x$ 处。按 $_x$ 的位置,可分为以下两种情况来讨论。

(1) 下面证明当插值点 $_x$ 与某一个插值节点 x_i 重合时,定理 5.1 成立。

① 显然,当插值点 $_x$ 与某一个插值节点 x_i 重合时,没有误差,即 $f(_x)=L_n(_x)$,$R_n(_x)=f(_x)-L_n(_x)=0$。

② 因为 $_x=x_i$,所以 $W_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_i)\cdots(x-x_n)=0$,所以拉格朗日插值余项函数 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}W_n(x)=0$。

③ 由①、②得,插值点 $_x$ 与某一个插值节点 x_i 重合时,定理 5.1 成立。

(2) 下面证明当插值点 $_x$ 与任何一个插值节点都不重合时,定理 5.1 成立。

① 首先推导出辅助定理 5.2 和辅助定理 5.3。

(a) 1 阶辅助定理。

定理 5.2 如果函数 $f(x)$和函数 $g(x)$在 $x=x_0^{(1)}$ 和 $x=x_1^{(1)}$ 处相交(即有 2 个共同点,$f(x_0^{(1)})=g(x_0^{(1)})$、$f(x_1^{(1)})=g(x_1^{(1)})$),$f(x)$和 $g(x)$在$[x_0^{(1)},x_1^{(1)}]$上连续,在$(x_0^{(1)},x_1^{(1)})$内有连续的 1 阶导数,那么在$(x_0^{(1)},x_1^{(1)})$内至少有 1 点 $\xi(x_0^{(1)}<\xi<x_1^{(1)})$,使得 $f'(\xi)=g'(\xi)$。

也就是说,若 $f(x)$、$g(x)$有 2 个共同点$(x=x_0^{(1)},x_1^{(1)})$,则至少有 1 点 $x=\xi(\xi\in(x_0^{(1)},x_1^{(1)}))$,此处 $f(x)$、$g(x)$的 1 阶导数相等,如图 5.4 所示。

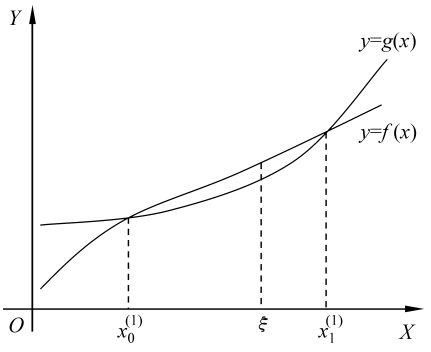

图 5.4 定理 5.2 的几何含义

证明 构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$。

因为 $f(x_0^{(1)})=g(x_0^{(1)})$、$f(x_1^{(1)})=g(x_1^{(1)})$,所以 $\varphi(x_0^{(1)})=\varphi(x_1^{(1)})=0$。

由罗尔定理可知,至少有 1 点 $\xi(x_0^{(1)}<\xi<x_1^{(1)})$,使得 $\varphi'(\xi)=0$。也就是说,在 $x=\xi$ 处,$f'(\xi)=g'(\xi)(\xi\in(x_0^{(1)},x_1^{(1)}))$。

证毕。

(b) 2 阶辅助定理。

如果 $f(x)$和 $g(x)$有 3 个共同点$(x=x_0^{(1)},x_1^{(1)},x_2^{(1)})$,$f(x)$和 $g(x)$在$[x_0^{(1)},x_2^{(1)}]$上连续,在$(x_0^{(1)},x_2^{(1)})$内有连续的 2 阶导数,由(a)得,至少有两个点 $x=x_0^{(2)},x_1^{(2)}$(其中 $x_0^{(2)}\in(x_0^{(1)},x_1^{(1)})$,$x_1^{(2)}\in(x_1^{(1)},x_2^{(1)})$),在这两点处,$f(x)$、$g(x)$的 1 阶导数相等。

在此基础之上,对 1 阶导数再求 1 阶导数得到 2 阶导数,重复上述推导过程。因为 $f'(x)$、$g'(x)$有两个共同点$(x=x_0^{(2)},x_1^{(2)})$,所以至少有一个点 $x=\xi(\xi\in(x_0^{(2)},x_1^{(2)}))$,此处 $f(x)$、$g(x)$的 2 阶导数相等。

所以如果 $f(x)$、$g(x)$有 3 个共同点$(x=x_0^{(1)},x_1^{(1)},x_2^{(1)})$,那么至少有一个点 $x=$

$\xi(\xi\in(x_0^{(1)},x_2^{(1)}))$，此处 $f(x)$、$g(x)$的 2 阶导数相等，如图 5.5 所示。

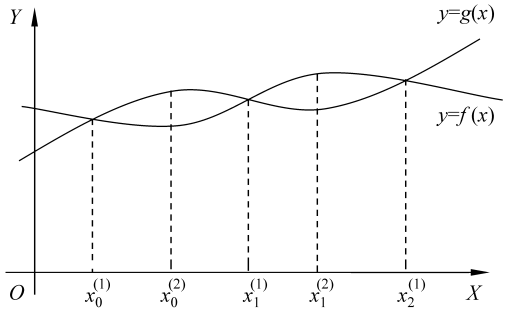

图 5.5　2 阶辅助定理

(c) 3 阶辅助定理。

如果 $f(x)$和 $g(x)$有 4 个共同点$(x=x_0^{(1)},x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)})$，$f(x)$和 $g(x)$在$[x_0^{(1)},x_3^{(1)}]$上连续，在$(x_0^{(1)},x_3^{(1)})$内有连续的 3 阶导数，由(a)、(b)得，至少有 3 点 $x=x_0^{(2)}$，$x_1^{(2)}$，$x_2^{(2)}$(其中 $x_0^{(2)}\in(x_0^{(1)},x_1^{(1)})$，$x_1^{(2)}\in(x_1^{(1)},x_2^{(1)})$，$x_2^{(2)}\in(x_2^{(1)},x_3^{(1)})$)，在这 3 点处，$f(x)$、$g(x)$的 1 阶导数相等。

在此基础之上，对 1 阶导数再求 1 阶导数得到 2 阶导数，重复上述推导过程。因为 $f'(x)$、$g'(x)$有 3 个共同点$(x=x_0^{(2)},x_1^{(2)},x_2^{(2)})$，所以至少有两个点 $x=x_0^{(3)}$，$x_1^{(3)}$(其中 $x_0^{(3)}\in(x_0^{(2)},x_1^{(2)})$，$x_1^{(3)}\in(x_1^{(2)},x_2^{(2)})$)，在这两点处，$f(x)$、$g(x)$的 2 阶导数相等。

同理，对 2 阶导数再求 1 阶导数得到 3 阶导数。因为 $f''(x)$、$g''(x)$有两个共同点$(x=x_0^{(3)},x_1^{(3)})$，所以至少有一个点 $x=\xi(\xi\in(x_0^{(3)},x_1^{(3)}))$，此处 $f(x)$、$g(x)$的 3 阶导数相等。

由上可得，如果 $f(x)$、$g(x)$有 4 个共同点$(x=x_0^{(1)},x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)})$，那么至少有一个点 $x=\xi(\xi\in(x_0^{(1)},x_3^{(1)}))$，此处 $f(x)$、$g(x)$的 3 阶导数相等。

(d) 辅助定理 5.3。

重复上述推导过程，可以得到以下结论。

定理 5.3　如果 $f(x)$和 $g(x)$有 $m+1$ 个共同点$(x=x_0^{(1)},x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_m^{(1)})$，$f(x)$和 $g(x)$在$[x_0^{(1)},x_m^{(1)}]$上连续，在$(x_0^{(1)},x_m^{(1)})$内有连续的 m 阶导数，那么至少有 1 点 $x=\xi(\xi\in(x_0^{(1)},x_m^{(1)}))$，此处 $f(x)$、$g(x)$的 m 阶导数相等。

② 构造辅助函数 $g(x)$。

构造 $g(x)$的方法为：以 $f(x)$为被插函数，取插值节点为$(_x,f(_x))$，$(x_0,f(x_0))$，$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，$\cdots$，$(x_n,f(x_n))$，共 $n+2$ 个插值节点，做 $n+1$ 次拉格朗日插值，这个插值函数记为 $g(x)$。显然 $g(x)$为 $n+1$ 阶代数多项式。

因此，在 $x=x_0$，$x=x_1$，$x=x_2$，$\cdots$，$x=x_n$ 处(共 $n+1$ 处)，$L_n(x)$、$g(x)$、$f(x)$的函数值相等；在 $x=_x$ 处，$g(x)$和 $f(x)$的函数值相等，这个值与 $L_n(x)$的函数值可能不同，如图 5.6 所示。

所以，在 $x=_x$ 处，$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=g(x)-L_n(x)$。而且，在 $x=_x$ 处，以 $f(x)$为被插函数时 $L_n(x)$的余项等于以 $g(x)$为被插函数时 $L_n(x)$的余项。

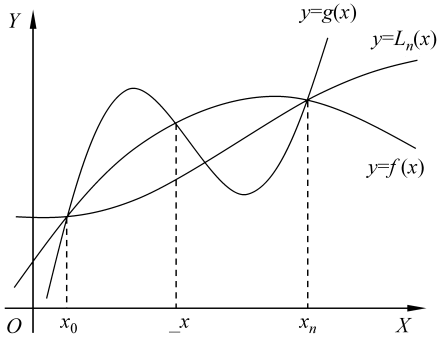

图 5.6　拉格朗日插值余项

③ 因为在 $x=x_0,x=x_1,x=x_2,\cdots,x=x_n$ 处(共 $n+1$ 处),$L_n(x)$、$g(x)$、$f(x)$的函数值相等,所以 $L_n(x)$也可以看作以 $g(x)$为被插函数的 n 次拉格朗日插值函数。

又因为 $g(x)$为 $n+1$ 阶代数多项式,插值节点共 $n+1$ 个,由情况 2 得:

在 $x=_x$ 处,

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=g(x)-L_n(x)$$
$$=\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

设 $g(x)$第 $n+1$ 项为 $a_{n+1}x^{n+1}$,那么 $g^{(n+1)}(x)$恒为常数 $a_{n+1}(n+1)!$,所以 $g^{(n+1)}(\xi)$为常数 $a_{n+1}(n+1)!$,故在 $x=_x$ 处,有

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$$
$$=\frac{a_{n+1}(n+1)!}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

④ 因为 $f(x)$和 $g(x)$有 $n+2$ 个共同点($x=_x,x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$),那么由定理 5.3 可知,至少有 1 点 $x=\xi$(ξ 在这 $n+2$ 个共同点上,或在这 $n+2$ 个共同点之间。④中的 ξ 不一定是③中情况 2 的 ξ),此处 $f(x)$、$g(x)$的 $n+1$ 阶导数相等。所以有

$$f^{(n+1)}(\xi)=g^{(n+1)}(\xi)=a_{n+1}(n+1)!$$

由上可得,在 $x=_x$ 处,

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$$
$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

所以,当插值点 $_x$ 与任何一个插值节点都不重合时,定理 5.1 成立。

总之,定理 5.1 在情况 1、情况 2、情况 3 时都成立。

证毕。

说明:

(1) $|W_n(x)|$在内插时较小,在外推时较大。因此,往往内插较可靠,外推较不可靠。

(2) 若被插函数 $f(x)$为平滑的曲线,插值区间足够小,且合理地选取插值节点,则 1 次代数插值的精度往往低于 2 次、3 次代数插值。

(3) 若被插函数 $f(x)$是 m 次代数多项式,对 $f(x)$做 n 次代数插值(插值节点共有