

第 9 章

真空中的静电场

电磁学主要研究电磁运动的基本规律,是物理学的一个重要分支。电磁运动是物质运动中的一种最基本的运动方式,电磁力也是自然界中已知的四种基本的自然力之一。电磁学的发展和建立极大地推动了社会的进步。如今,电视、广播和无线电通信日益普及,电力照明、家用电器等也早已成为人们生活中的必需品,计算机成为科学发展中的重要工具。所有这些,无不以电磁学基本原理为核心。

在相当长一段时间内,电和磁被看成两种完全不同的现象。因此人们对它们的理论研究是从两个不同方面进行的,进展十分缓慢。直到 1820 年,丹麦物理学家奥斯特(H. C. Oersted, 1777—1851)发现了电流的磁效应,人们这才认识到电和磁是相互关联的。后来,法拉第(M. Faraday, 1791—1867)于 1831 年发现了电磁感应现象,进一步揭示了电和磁的内在联系。1865 年,麦克斯韦(J. C. Maxwell, 1831—1879)在前人工作的基础上,提出了感应电场和位移电流假说,总结建立了完整的电磁场理论,成为经典电磁理论的核心内容。该理论预言了电磁波的存在,并指出光是一种电磁波。

一般说来,运动电荷将同时激发电场和磁场。但是,在某种情况下,例如我们所研究的电荷相对某参考系静止时,电荷在这个相对静止的参考系中就只激发电场,这个电场就是本章要讨论的静电场。本章的主要内容有:静电场的基本定律——库仑定律,静电场的基本定理——高斯定理和环路定理,描述静电场属性的两个基本物理量——电场强度和电势等。

9.1 电荷 库仑定律

9.1.1 物质的电结构 电荷守恒定律

物体能产生电磁现象,主要是因为物体所带的电荷,以及这些电荷的运动。人们对电荷的认识最早是从摩擦起电现象和自然界的雷电现象开始的。实验指出,硬橡胶棒与皮毛摩擦后或玻璃棒与丝绸摩擦后对轻微物体都有吸引作用,这种现象称为带电现象。经过摩擦后的物体带有电荷。自然界只有两种电荷,分别称为正电荷和负电荷。同种电荷互相排斥,异种电荷相互吸引。物体所带电荷的多少称为电荷量(electric quantity),用 Q 或 q 表示,单位是库仑,符号为 C。

摩擦起电的根本原因与物体的电结构有关。按照原子理论,任何物体都是由分子、原子

构成的,原子又是由质子和中子组成的原子核以及核外的电子构成的。中子不带电,质子带正电,电子带负电。通常状态下,质子所带的正电荷和核外电子所带的负电荷在电荷量上相等,因此原子整体上对外不显示电性。当物体经受摩擦等作用而造成物体中的电子发生转移时,物体便带了电,失去电子时带正电,得到电子时带负电。

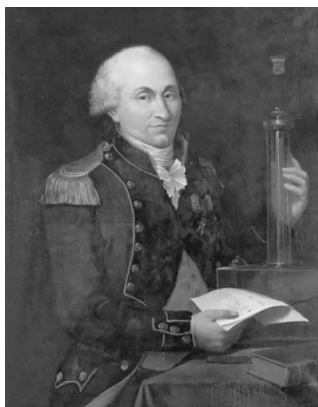
大量实验表明:在一个孤立系统中,无论发生了怎样的物理过程,电荷都不会产生,也不会消失,只能从一个物体转移到另一个物体上,或从物体的一部分转移到另一部分,电荷的代数和是守恒的。这就是电荷守恒定律。

9.1.2 电荷的量子化

1897年,汤姆孙(J. J. Thomson, 1856—1940)通过观测阴极射线发现了电子。1907—1913年,密立根(R. A. Millikan, 1868—1953)通过油滴实验,发现带电体的电荷量总是以基本单元的整数倍出现。这个电荷量的基本单元就是电子所带电荷量的绝对值,用 e 表示, $e \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$,而一般带电体的电荷量 $q = \pm ne$, n 为 $1, 2, 3, \dots$,这是自然界存在不连续性(即量子化)的又一个例子。电荷的这种只能取离散的不连续的量值的性质,叫做电荷的量子化。

近代物理从理论上预言基本粒子由若干种夸克或反夸克组成,每一个夸克或反夸克可能带有 $\pm \frac{1}{3}e$ 或 $\pm \frac{2}{3}e$ 的电荷量。然而,至今单独存在的夸克尚未在实验中发现(即使发现了,也不过是把基本电荷元大小缩小到目前的 $1/3$,电荷的量子性不变)。

9.1.3 库仑定律



库仑(C. A. Coulomb, 1736—1806), 法国工程师、物理学家。1736年6月14日生于法国昂古莱姆,1806年8月23日在巴黎逝世。主要贡献有扭秤实验、库仑定律、库仑土力学理论等。他曾设计了一种水下作业法。这种作业法类似于现代的沉箱,它是应用在桥梁等水下建筑施工中的一种很重要的方法。同时他也被称为“土力学之始祖”。电荷的单位库仑就是为纪念他而命名的。

在发现电现象后的两千多年里,人们对电的认识一直停留在定性阶段。从18世纪中叶开始,许多科学家有目的地进行一些实验性的研究,以便找出静止电荷之间的相互作用力的规律。因为带电体之间的相互作用力不仅与物体所带电荷量有关,还与带电体的形状、大小,以及周围介质有关,所以要用实验直接确立带电体的作用是很困难的。1785年,库仑提出了点电荷(point charge)的理想模型,认为当带电体的线度和带电体之间的距离相比很小

时,可以忽略其形状和大小,把它看作一个带电的几何点。库仑设计了一台精密的扭秤,如图 9-1 所示,对两个静止点电荷之间的相互作用进行实验,通过定量分析,库仑得到了两个点电荷在真空中的相互作用规律,后来被称为库仑定律。表述如下:

真空中的两个静止点电荷之间的相互作用力 $\boldsymbol{F}$ 的大小与这两个点电荷所带的电荷量 q_1 和 q_2 的乘积成正比,与它们之间的距离 r 的二次方成反比,作用力 $\boldsymbol{F}$ 的方向沿它们的连线方向,同种电荷相互排斥,异种电荷相互吸引,即

$$\boldsymbol{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \boldsymbol{e}_r = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \boldsymbol{e}_r \quad (9-1)$$

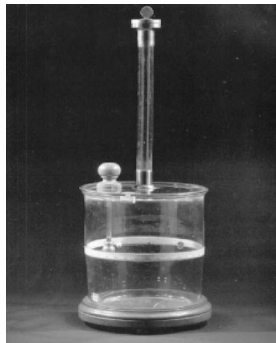


图 9-1 库仑扭秤装置

式中, $\boldsymbol{e}_r$ 为从电荷 q_1 指向电荷 q_2 的单位矢量,即 $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$,如图 9-2 所示;电荷 q_1 和 q_2 的量值可正可负,当 q_1 和 q_2 同号时, q_2 受到斥力作用, $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{e}_r$ 同向;当 q_1 和 q_2 异号时, q_2

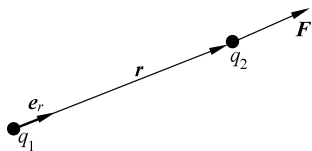


图 9-2 两个点电荷之间的作用力

受到引力作用, $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{e}_r$ 反向; ϵ_0 叫做真空电容率,又称真空介电常量 (dielectric constant of vacuum), 其量值为

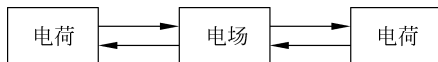
$$8.854 \times 10^{-12} \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}, k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987 \times 10^9 \text{N} \cdot$$

$\text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \approx 9.0 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ 。库仑定律是一个实验定律,经过精密测定证明,它在一定范围内是正确的。

9.2 电场强度

9.2.1 静电场

库仑定律只给出了两个点电荷之间的相互作用的定量关系,并没有指明这种作用是通过怎样的方式进行的。我们平常所见到的物体间的相互作用一般是直接接触作用的。例如,推车时,通过手和车的直接接触把力作用在车子上。但是电力、磁力和重力却可以发生在两个相隔一定距离的物体之间。那么,这些力究竟是如何传递的呢? 在很长一段时间内,人们曾认为这些力的作用不需要中间媒介,也不需要时间,就能实现远距离的相互作用,即“超距作用”。到了 19 世纪初,英国物理学家法拉第提出新的观点:在电荷的周围存在着一种特殊形态的物质,称为**电场**(electric field)。任何电荷在其周围都激发电场,电荷间的相互作用是通过电场对电荷的作用来实现的。其作用可以表示为



电场对电荷的作用力称为电场力(force due to electric field)。现代物理学证明:“超距作用”的观点是错误的,电力和磁力的传递都需要时间,传递速度约为 $3 \times 10^8 \text{m/s}$ 。

法拉第以其惊人的想象力提出的“场”的概念,受到人们的高度评价。现代物理学已经肯定了场的观点,证明了电磁场的存在。电磁场与实物粒子一样,具有质量、能量、动量等物质的基本属性。相对于观察者静止的电荷在周围空间激发的电场称为**静电场**(electrostatic

field),它是电磁场的一种特殊状态。下面就静电场的基本性质加以讨论。

9.2.2 电场强度的概念

为了定量研究电场对电荷的作用,我们把一个试验电荷(test charge) q_0 放到电场中,观察电场对试验电荷 q_0 的作用力的情况。试验电荷必须满足如下两个条件:①它的线度必须小到可以将它看作点电荷,以便确定电场中各个点的电场性质;②它所带的电荷量必须充分小,以免影响到原有电场的分布。为了讨论方便,我们取试验电荷为正电荷 $+q_0$ 。

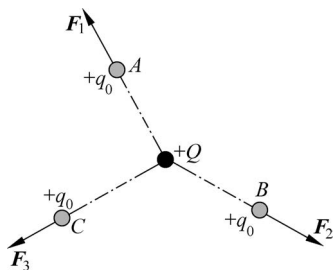


图 9-3 试验电荷在电场中不同位置受电场力的情况

如图 9-3 所示,在静止电荷 Q (场源电荷) 周围的电场中,先后将试验电荷 $+q_0$ 放在电场中 A, B 和 C 三个不同的场点位置。实验表明,试验电荷在不同位置所受到的电场力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向均不相同;若在任取的同一场点位置上,改变所放置的试验电荷 $+q_0$ 的电荷量大小,则 $+q_0$ 所受到的电场力 $\boldsymbol{F}$ 的大小也会随之改变,然而,两者的比 $\frac{\boldsymbol{F}}{+q_0}$ 却与试验电荷的量值 $+q_0$ 无关,而仅取决于场源电荷 Q 的量值和位置。因此,我们就从电场对电荷施力的角度,把这个比值作为描述电场的一个物理量,称为**电场强度**(electric

field intensity),记作 $\boldsymbol{E}$,有时简称场强。即

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_0} \quad (9-2)$$

在国际单位制中,电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的单位是牛顿每库仑 ($\text{N} \cdot \text{C}^{-1}$),也可以表示为伏特每米 ($\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$)。式(9-2)为电场强度的定义式。它表明,电场中某点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 等于位于该点处的单位试验电荷所受到的电场力。显然,电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是一个矢量,方向与正电荷在该点处受到的电场力的方向一致。

由上述讨论不难推断,如果已知空间某点的电场强度 $\boldsymbol{E}$,则电荷 q 在该点受到的电场力为

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \quad (9-3)$$

9.2.3 电场强度的计算

1. 点电荷电场中的电场强度

由库仑定律及电场强度的定义式,我们可以求得真空中点电荷周围电场的电场强度。

考虑真空中放置一场源点电荷,电荷量为 q ,设想把一个试验电荷 $+q_0$ 放置在距离 q 为 r 的 P 点,根据库仑定律, $+q_0$ 受到的电场力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \boldsymbol{e}_r$$

式中, $\boldsymbol{e}_r$ 是从 q 指向 P 点的单位矢量。由定义式(9-2)可以得到, P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (9-4)$$

式(9-4)表明,在点电荷的电场空间,任意一点 P 的电场强度的大小与场源点电荷到场点的距离的二次方成反比,与场源点电荷的电荷量 q 成正比。电场强度的方向取决于场源点电荷的符号。若 $q > 0$,即正电荷的电场强度 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{e}_r$ 同向;若 $q < 0$,即负电荷的电场强度 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{e}_r$ 反向,如图 9-4 所示。

从式(9-4)可以看出,点电荷产生的电场具有球对称性,在以场源点电荷为球心的球面上,电场强度的大小处处相等。

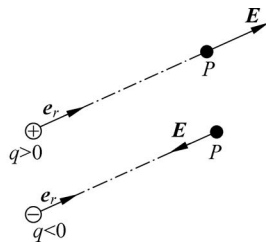


图 9-4 点电荷的电场强度

2. 点电荷系电场中的电场强度

一般说来,空间中可能存在由许多个点电荷组成的点电荷系,那么点电荷系的电场强度如何计算呢?下面我们具体说明。

设真空中的点电荷系由若干个点电荷 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ 组成,每个点电荷周围都有各自激发出的电场。把试验电荷 q_0 放在场点 P 处,根据力的叠加原理,作用在 q_0 上的电场力的合力 $\mathbf{F}$ 应该等于各个点电荷分别作用于 q_0 上的电场力 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}_n$ 的矢量和,即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n \quad (9-5)$$

把式(9-5)的两边分别除以 q_0 ,可以得到 P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{\mathbf{F}_1}{q_0} + \frac{\mathbf{F}_2}{q_0} + \frac{\mathbf{F}_3}{q_0} + \dots + \frac{\mathbf{F}_n}{q_0} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{E}_n \quad (9-6)$$

即点电荷系在空间某点激发的电场强度,等于各个点电荷单独存在时在该点激发的电场强度的矢量和,这一结论称为电场强度叠加原理。这是静电场的一个基本原理。将点电荷的电场强度公式(9-4)代入式(9-6),可以得到 P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{E}_n = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{e}_{r_i} \quad (9-7)$$

式中, $\mathbf{e}_{r_1}, \mathbf{e}_{r_2}, \mathbf{e}_{r_3}, \dots, \mathbf{e}_{r_n}$ 分别是场点 P 相对于各个场源点电荷 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ 的位矢 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_n$ 方向上的单位矢量。

3. 连续分布电荷电场中的电场强度

对于电荷连续分布的任意带电体,可以将它看成无数个电荷元 dq 的集合。而每个电荷元 dq 可看作点电荷,空间任意点的电场强度则是由这无数个点电荷 dq 激发的电场叠加而成的。

如图 9-5 所示,有一体积为 V ,电荷连续分布的带电体,下面计算点 P 处的电场强度。

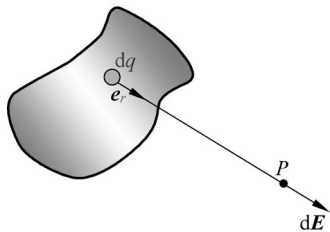


图 9-5 连续带电体的电场强度

首先,我们在带电体上取一个电荷元 dq ,可作为一个点电荷,于是, dq 在点 P 的电场强度为 $d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{e}_r$,式

中, $\mathbf{e}_r$ 是由电荷元 dq 指向场点 P 的单位矢量。其次,根据电场强度叠加原理,计算出各电荷元在点 P 处的电场强度,求矢量和。因为带电体连续分布,所以矢量和可以化成矢量积分。于是可以得到整个带电体在 P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \int_V d\mathbf{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} dq \quad (9-8)$$

如果带电体的电荷体密度为 ρ , 电荷元 dq 的体积为 dV , 则 $dq = \rho dV$; 如果带电体是一个均匀带电面, 电荷面密度为 σ , 电荷元的面积为 dS , 则 $dq = \sigma dS$; 如果带电体是一条均匀带电电线, 电荷线密度为 λ , 线元为 dl , 则 $dq = \lambda dl$ 。

式(9-8)是一个矢量积分, 在运算时需要首先建立坐标系, 将电荷元的电场强度矢量沿着各坐标轴方向进行分解, 然后对电荷元沿各坐标轴的电场强度分量分别进行数值积分, 最后求出合电场强度 $\mathbf{E}$ 。下面我们通过例题详细说明。

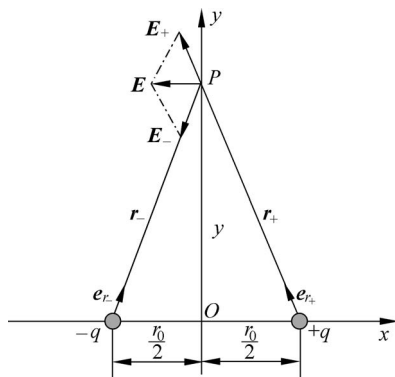


图 9-6 电偶极子中垂线上的电场强度

例 9-1 如图 9-6 所示, 一对相距为 r_0 的等量异号点电荷 $+q$ 和 $-q$ 组成一个点电荷系统, 求两个点电荷的连线的中垂线上某点 P 的电场强度。

解 当两个等量异号的点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的距离 r_0 比从它们连线中点到所讨论场点的距离 y 小得多时, 这一带电系统称为**电偶极子**, 如图 9-6 所示。以两个点电荷连线的中点为坐标原点 O , 建立直角坐标系 Oxy 。正、负电荷在 P 点激发的电场强度分别为

$$\mathbf{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_{r_+}}{r_+^2}, \quad \mathbf{E}_- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_{r_-}}{r_-^2}$$

式中, r_+ 和 r_- 分别是 $+q$ 和 $-q$ 与 P 点间的距离; $\mathbf{e}_{r_+}$ 和 $\mathbf{e}_{r_-}$ 分别是 $+q$ 和 $-q$ 指向 P 点的单位矢量。

从图 9-6 中可以看出, $r_+ = r_-$, 且令其为 r , 即有

$$r_+ = r_- = r = \sqrt{y^2 + \left(\frac{r_0}{2}\right)^2}$$

而单位矢量 $\mathbf{e}_{r_+} = \frac{\mathbf{r}_+}{r_+} = \frac{\mathbf{r}_+}{r}$, 式中,

$$\mathbf{r}_+ = -\frac{r_0}{2}\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

单位矢量 $\mathbf{e}_{r_+} = \left(-\frac{r_0}{2}\mathbf{i} + y\mathbf{j}\right)/r$, 所以

$$\mathbf{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(-\frac{r_0}{2}\mathbf{i} + y\mathbf{j}\right)$$

同理可得

$$\mathbf{E}_- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(\frac{r_0}{2}\mathbf{i} + y\mathbf{j}\right)$$

根据电场强度叠加原理, 可以得到 P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr_0}{r^3} \mathbf{i}$$

令 $\mathbf{r}_0$ 为从 $-q$ 指向 $+q$ 的矢量, 其大小为 r_0 , 则 qr_0 称为电偶极子的**电偶极矩**(简称电矩), 用符号 $\mathbf{p}_e$ 表示, 有 $\mathbf{p}_e = qr_0$ 。由图 9-6 可知 $\mathbf{p}_e = qr_0\mathbf{i}$, 因此有

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e}{\left(y^2 + \frac{r_0^2}{4}\right)^{3/2}}$$

当 $y \gg r_0$ 时, 上式可改为

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e}{y^3} \quad (9-9)$$

可见, 电偶极子在中垂线上的电场强度与电偶极子的电矩 $\mathbf{p}_e$ 成正比, 与该点到电偶极子中心的距离的三次方成反比, 方向与电矩 $\mathbf{p}_e$ 相反, 并且随着距离 y 的增大, 其电场强度值迅速衰减。 $\mathbf{p}_e$ 是表征电偶极子属性的一个重要物理量, 在研究电介质的极化时会用到。

例 9-2 一长为 L 的均匀带电直细棒, 电荷线密度为 λ , 设棒外一点 P 到细棒的垂直距离为 a , 且与棒两端的连线分别和棒成夹角 θ_1, θ_2 , 如图 9-7 所示。求 P 点的电场强度。

解 以 P 点到带电直细棒的垂足 O 为原点建立直角坐标系 Oxy , 如图 9-7 所示。在细棒上距 O 为 x 处取一线元 dx , 其电荷量为 $dq = \lambda dx$, 则 dq 在 P 点产生的电场强度的大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2}$$

细棒上不同位置的电荷元 dq 在 P 点产生的 dE 的方向都不相同, 因此在积分前先要将矢量 dE 沿 x 轴和 y 轴的方向分解为

$$dE_x = dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \cos\theta$$

$$dE_y = dE \sin\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \sin\theta$$

从图 9-7 中可知, 上式中 x, r, θ 并非都是独立变量, 它们满足如下关系:

$$r = \frac{a}{\sin\theta}, \quad x = -a \cot\theta$$

对 $x = -a \cot\theta$ 取微分可得

$$dx = \frac{a}{\sin^2\theta} d\theta$$

则各电荷元在 P 点产生的电场强度在 x 轴和 y 轴上的分量分别为

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \cos\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \\ E_y &= \int dE_y = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \sin\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \end{aligned}$$

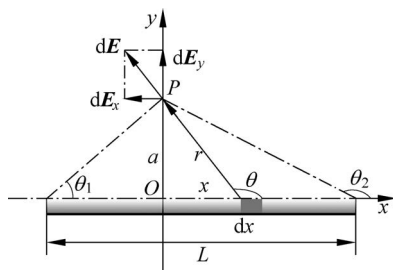


图 9-7 均匀带电直细棒外任一点处的电场强度

P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \mathbf{i} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \mathbf{j}$$

讨论:

若 $a \ll L$, 则相对于场点而言, 直细棒可以看成无限长, 即 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$, 代入求得的 P 点的电场强度公式可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \mathbf{i} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \mathbf{j} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (9-10)$$

式(9-10)指出, 在一无限长带电直细棒周围任意点的电场强度与该点到带电细棒的距离成反比, 在距离直细棒相同处的电场强度大小相等, 方向垂直于细棒, 即电场强度具有轴对称性。

例 9-3 如图 9-8 所示, 电荷 $q (q > 0)$ 均匀分布在一半径为 R 的细圆环上, 计算通过环心 O , 并垂直于圆环面的中轴线上任一点 P 的电场强度。

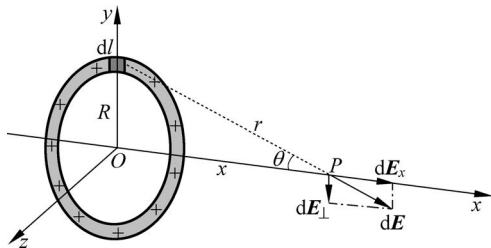


图 9-8 均匀带电细圆环中轴线上的电场强度

解 在圆环面的中轴线上任取一点 P , 其距离环心 O 为 x , 取如图 9-8 所示的坐标系 $Oxyz$ 。

将细圆环分割成许多电荷元 dq , 由于线密度 $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$, 则 $dq = \lambda dl = \frac{q}{2\pi R} dl$, 任一电荷元在 P 点激发的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{e}_r$$

根据对称性分析可知, 各电荷元在 P 点的电场强度沿垂直于中轴线方向上的分量 $d\mathbf{E}_\perp$ 相互抵消, 而平行于中轴线方向上的分量 $d\mathbf{E}_x$ 则相互加强, 因而合电场强度的大小为

$$\begin{aligned} E &= E_x = \int_l dE_x = \int_l dE \cos\theta \\ &= \int_l \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_l dq = \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} q \end{aligned}$$

式中, 积分号右边的 l 表示对整个圆环积分。由图 9-8 可知, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, 而 $r = \sqrt{x^2 + R^2}$, 代入上式可得

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (9-11)$$

E 的方向沿着 x 轴正方向。

讨论:

(1) 当 $x \gg R$ 时, $(x^2 + R^2)^{3/2} \approx x^3$, 则 E 的大小为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

上式表明, 远离环心处的电场相当于一个电荷全部集中在环心处的点电荷产生的电场。

(2) 当 $x=0$ 时, 环心处的电场强度的大小为 $E=0$ 。

例 9-4 有一表面均匀带电的薄圆盘, 半径为 R , 电荷面密度为 σ , 如图 9-9 所示。计算圆盘轴线上任一点 P 的电场强度。

解 取如图 9-9 所示的坐标系 $Oxyz$, 将圆盘表面看成由许多带电的同心细圆环组成, 取一带电细圆环, 其电荷量为 $dq = \sigma 2\pi r dr$ 。由例 9-3 可知, 此带电细圆环在 P 点激发的电场强度大小为

$$dE = \frac{2\pi x \sigma r dr}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}$$

dE 方向沿着 x 轴正方向。因此, 带电圆盘在 P 点激发的电场强度的大小为

$$\begin{aligned} E &= E_x = \int_0^R \frac{2\pi x \sigma r dr}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{x\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (9-12)$$

E 的方向沿着 x 轴正方向。

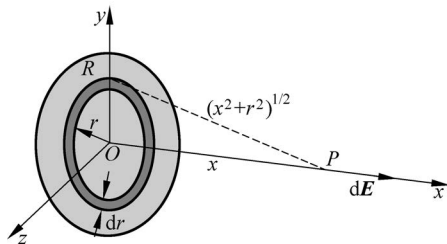


图 9-9 均匀带电圆盘轴线上的电场强度

讨论:

当 $x \ll R$ 时, 便可将表面均匀带电的薄圆盘看作无限大均匀带电平面, 则其附近的电场强度的大小为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (9-13)$$

上式表明, 无限大均匀带电平面附近是一均匀电场, 其方向垂直于带电平面。

9.3 高斯定理及应用

9.2 节我们研究了描述电场性质的一个重要物理量——电场强度, 并从电场强度叠加原理出发讨论了点电荷系和带电体的电场强度。为了更形象地描述电场, 本节在介绍电场

线的基础上,引入电场强度通量的概念,并导出静电场的一个重要定理——高斯定理。

9.3.1 电场线

因为场的概念比较抽象,所以法拉第在提出场的概念的同时引入了力线的概念,对场的物理图像作出非常直观的形象化描述。描述电场的力线称为**电场线**(electric field line)。

为了使电场线既能显示空间各处的电场强度的大小,又能显示各点电场强度的方向,在绘制电场线时作如下规定: **电场线上每一点的切线方向都与该点的电场强度方向一致;在任一场点,通过垂直于电场强度 E 的单位面积的电场线条数,等于该点电场强度 E 的大小。**按此比例绘制的电场线便可以很好地描述电场强度的分布。

图 9-10 是几种常见电场线的分布。从中可以看出电场线的一些基本性质。

(1) 电场线总是起始于正电荷(或无限远),终止于负电荷(或无限远),在没有电荷的地方,电场线不会中断。

(2) 电场线不会形成闭合线。

(3) 没有电荷处,任意两条电场线不会相交。

(4) 电场线密集处,电场强度较大;电场线稀疏处,电场强度较小。

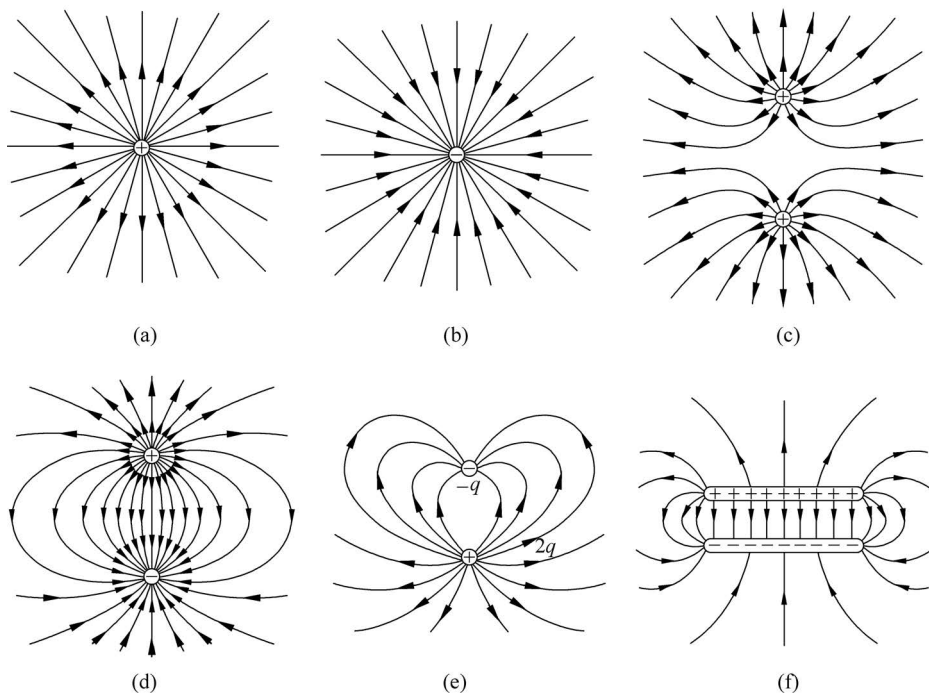


图 9-10 几种典型电场的电场线分布

(a) 正电荷; (b) 负电荷; (c) 两个等值正电荷; (d) 两个等值异号电荷; (e) 电荷 $+2q$ 与电荷 $-q$; (f) 正负带电板

应当指出的是,电场线只是为了更形象地描述电场的分布而引入的一组虚拟曲线,电场线不是电荷运动的轨迹。

为了给出电场线密度和电场强度间的数量关系,我们对电场线的密度作如下规定: 在