

第3章

正弦稳态电路分析

Sinusoidal Steady-State Analysis

本章介绍正弦稳态电路分析中一些重要的概念和方法,并将基本定律、定理推广至正弦稳态电路的分析之中,希望达到的目标是:

- 明白正弦稳态电路分析中复数法的引入机理。
- 掌握基本定律、定理、概念和方法在正弦稳态电路分析中的推广。
- 掌握并理解传递函数,会利用传递函数判断电路的稳定性、分析滤波器的频率响应特性。
- 掌握正弦稳态电路分析。

In this chapter, we'll help learner understand the following contents.

- The principle of sinusoidal steady-state analysis.
- The concepts of phasor method, impedance and admittance.
- How to approximate a frequency response curve.
- The sinusoidal steady-state response.

正弦信号激励下电路的稳态响应称为**正弦稳态响应 (Sinusoidal Steady-State Response)**。正弦信号激励下电路的稳态响应问题是电路分析中的重要课题,这是因为:

(1) 正弦信号比较容易产生和获得,在科学研究和工程技术中,许多电气设备和仪器都是以正弦信号为基本信号的。

(2) 根据傅里叶级数的数学理论(第5章),任何周期信号都能分解为一系列不同频率正弦信号的叠加。因此,利用线性电路的叠加性,可以把正弦信号激励下电路的稳态响应分析,推广到周期信号激励下电路的稳态响应分析。

(3) 不同频率的正弦信号作用于电路所产生的响应是不同的,电路的这种不同频率响应特性,是电路分析和电路综合的一个重要内容,也是电路特性的重要指标。

前面对线性微分方程的全解分析告诉我们,本章描述的正弦信号激励下网络的稳态响应问题,在数学上,就是正弦信号激励下网络方程的特解问题。前面2.3.1节对复指数信号激励下一阶电路稳态响应问题的分析,可以推广至一般动态电路,假设激励为 $x(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi_x)} = X(j\omega) e^{j\omega t}$, 稳态解为 $y(t) = Y_0 e^{j(\omega t + \varphi_y)} = Y(j\omega) e^{j\omega t}$, 其中 X_0 , Y_0 , ω , φ_x , φ_y 均为常数,由于 $d^{(n)} [e^{j(\omega t + \phi)}] / dt^n = (j\omega)^n e^{j(\omega t + \phi)}$ 的微分特性,则微分方程式(2-4-2)可写为

$$[a_n(j\omega)^n + \cdots + a_1(j\omega) + a_0]Y(j\omega)e^{j\omega t} = [b_m(j\omega)^m + \cdots + b_1(j\omega) + b_0]X(j\omega)e^{j\omega t} \quad (3-1)$$

所以

$$Y(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \cdots + a_1(j\omega) + a_0} X(j\omega) \quad (3-2)$$

以上简单而有效的代数求解方法充满吸引力,只要正弦信号可以用复指数信号表示,正弦稳态响应问题就可以转换为简单的复指数信号激励的稳态响应问题,由此引出这一章将要讨论的求取正弦稳态响应的方法——**复数分析法**或称为**相量分析法**(简称**复数法**或**相量法**)。

比较式(3-2)和式(2-4-2),除了变微分为代数求解的便利之外,特别地,复数法将读者的注意力从以时间 t 为自变量的**时域 (Time Domain)**描述,转移到以频率 ω 为自变量的**频域 (Frequency Domain)**描述上来。

复数 (Complex Numbers)的发明是为了表示负数开方运算,它的引入使很多复杂问题得到简化。复数 A 有两种表示形式:笛卡儿坐标系(直角坐标系)的实部 a 加虚部 b 表示、极坐标系的模 c 和相角 θ 表示:

$$A = a + jb = ce^{j\theta} \quad (3-3)$$

其中, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan\theta = b/a$ 。两种表示的互换依据是著名而神奇的欧拉公式 (Euler's Formula)(3-1-2)。发现这个被誉为“上帝公式”的关系并不容易,但证明却非常简单,只需将 $\cos\theta$ 、 $\sin\theta$ 和 e^x 的麦克劳林展开式写出来即可得证:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \quad (3-4)$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (3-5)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (3-6)$$

读者会在以后的练习中体会到,复数做加减运算时直角坐标表示比较简便、做乘除运算时极坐标表示比较便利。本书电路分析理论中,多采用极坐标系的表示形式。

3.1 正弦稳态电路/Sinusoidal Steady-State Circuit

3.1.1 正弦信号的复数表示——相量/Phasor

以正弦电压为例,其数学表达式为

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (3-1-1)$$

其中,振幅 V_m 、角频率 ω 、初相位 φ 为描述一个正弦量的三个要素,三要素一旦确定,正弦量也就被唯一地确定了。根据欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (3-1-2)$$

式(3-1-1)可用复数形式表示为

$$\begin{aligned} v(t) &= \operatorname{Re}[V_m e^{j(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Re}(V_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}[V_m(j\omega) e^{j\omega t}] \\ &= \operatorname{Re}(\sqrt{2} \cdot V e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}[V(j\omega) \sqrt{2} e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (3-1-3)$$

其中,定义最大值相量为

$$V_m(j\omega) = V_m e^{j\varphi} \quad (3-1-4)$$

定义有效值相量为

$$V(j\omega) = V e^{j\varphi} \quad (3-1-5)$$

简称“相量”(Phasor),为简化分析,将电路中所有变量共有的 $e^{j\omega t}$ 项不纳入相量定义。因此,相量是一个表示正弦信号的幅度和初相位两个要素的复数,还可以简称为

$$V_m(j\omega) = V_m \angle \varphi \quad \text{或} \quad V(j\omega) = V \angle \varphi \quad (3-1-6)$$

比较式(3-1-1)和式(3-1-4)可见,正弦信号的复数形式(或相量表示)将关注的重心从时域(Time Domain)描述转移到以频率 ω 为自变量的“频域”(Frequency Domain)描述上,因此,本书统一用自变量为 $j\omega$ 的变量形式来表示相量^①。

如图 3-1-1 所示,可以用复平面(Complex Plane)上的有向线段来表示相量。即以有向线段的长度来表示幅度 V_m ,以与水平轴的夹角来表示相位 φ ,称复平面上这样的图为“相量图”(Phasor Diagram)。相量图 3-1-1 所对应的时域波形如图 3-1-2 所示。

若相量 $V_{m1}(j\omega)$ 和 $V_{m2}(j\omega)$ 的相位如图 3-1-1(a)所示,则 $\varphi_1 = \varphi_2$,称两个正弦电压

① 有很多教材用头上有一点的变量符号来表示相量: $\dot{V} = V e^{j\varphi}$ 。

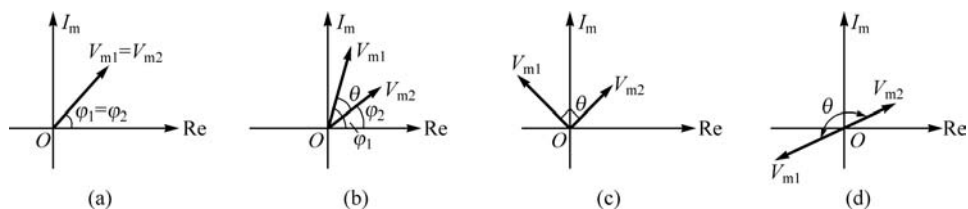


图 3-1-1

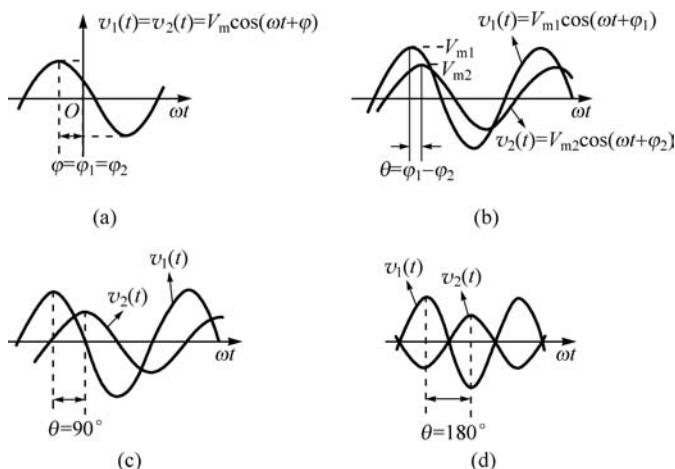


图 3-1-2

同相位,简称同相(In Phase)。同相时, $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 同时达到最大值和最小值,如图 3-1-2(a)所示。

若相量 $V_{m1}(j\omega)$ 和 $V_{m2}(j\omega)$ 的相位如图 3-1-1(b)所示,则 $\varphi_1 > \varphi_2$,称 $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$ 为 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 的相位差(Phase Difference),并说 $v_1(t)$ 超前(Leading) $v_2(t)$ θ 相位,或者说 $v_2(t)$ 滞后(Lagging) $v_1(t)$ θ 相位,如图 3-1-2(b)所示。

如果 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 的相位差 $\theta = 90^\circ$,即 $\varphi_1 = \varphi_2 + 90^\circ$,如图 3-1-2(c)所示,则有

$$\begin{aligned} V_{m1}(j\omega) &= V_{m1} e^{j\varphi_1} = V_{m1} e^{j(\varphi_2 + 90^\circ)} \\ &= V_{m1} e^{j\varphi_2} (\cos 90^\circ + j\sin 90^\circ) \\ &= jV_{m1} e^{j\varphi_2} = j \frac{V_{m1}}{V_{m2}} V_{m2}(j\omega) \end{aligned} \quad (3-1-7)$$

式(3-1-7)表示一个相量乘以因子 j ,在相量图(图 3-1-1(c))上表现为逆时针方向旋转 90° ;一个相量乘以因子 $-j$,则表现为顺时针旋转 90° 。所以称 $j = e^{j90^\circ}$ 为 90° 旋转因子。

如果 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 的相位差 $\theta = \varphi_1 - \varphi_2 = 180^\circ$,如图 3-1-2(d)所示,则有

$$V_{m1}(j\omega) = V_{m1} e^{j\varphi_1} = V_{m1} e^{j(\varphi_2 + 180^\circ)} = -V_{m1} e^{j\varphi_2} = -\frac{V_{m1}}{V_{m2}} V_{m2}(j\omega) \quad (3-1-8)$$

即 $v_1(t)$ 达到正的最大值时, $v_2(t)$ 达到负的最大值。这时,称 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 相位互为

相反,简称反相(Out of Phase)矢量关系,如图 3-1-1(d)所示。

由于正弦量是时间 t 的函数,其瞬时值的计算和测量都不方便,所以,在工程上经常使用有效值(Effective Values)(又称为方均根值(Root Mean Square Values, Rms Values))来表示。

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [V_m \cos(\omega t + \varphi)]^2 dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m \quad (3-1-9)$$

最大值和有效值的相量表示都很常用,对于正弦信号,其最大值比有效值大 $\sqrt{2}$ 倍,也就是说,最大值相量在幅度上是有效值相量的 $\sqrt{2}$ 倍,在初相位上没有区别。

3.1.2 电路的复数表示——相量模型/Phasor Model in Circuit

设如图 3-1-3 所示的未知元件的端电压、电流分别为

$$\begin{cases} v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v) = \operatorname{Re}[V_m(j\omega) e^{j\omega t}] \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \operatorname{Re}[I_m(j\omega) e^{j\omega t}] \end{cases} \quad (3-1-10)$$

其中,

$$V_m(j\omega) = V_m e^{j\varphi_v}, \quad I_m(j\omega) = I_m e^{j\varphi_i} \quad (3-1-11)$$

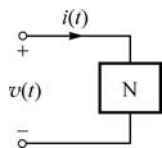


图 3-1-3

1. 电阻元件的相量形式(Resistance)

电阻元件的 VCR 满足经典的欧姆定律,即 $v(t) = R \cdot i(t)$, 因此,有

$$\operatorname{Re}[V_m(j\omega) e^{j\omega t}] = R \cdot \operatorname{Re}[I_m(j\omega) e^{j\omega t}] \quad (3-1-12)$$

所以,有

$$V_m(j\omega) = R I_m(j\omega) \quad (3-1-13)$$

式(3-1-13)说明电阻元件上的电压相量与电流相量之间的关系仍然符合欧姆定律,且电压和电流同相,如图 3-1-4 所示。

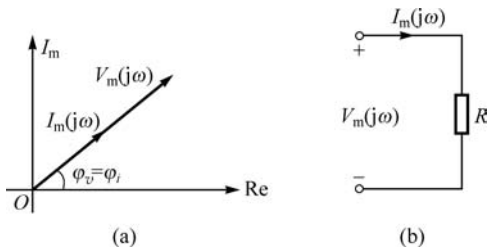


图 3-1-4

2. 电容元件的相量形式(Capacitance)

电容元件的 VCR 满足微分关系,即 $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$, 因此,有

$$\operatorname{Re}[I_m(j\omega) e^{j\omega t}] = C \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[V_m(j\omega) e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[j\omega C V_m(j\omega) e^{j\omega t}] \quad (3-1-14)$$

所以,有

$$I_m(j\omega) = j\omega C V_m(j\omega) \quad \text{或} \quad V_m(j\omega) = (j\omega C)^{-1} I_m(j\omega) \quad (3-1-15)$$

式(3-1-15)说明电容元件上的电压相量与电流相量之间相差 90° , 电流振幅是电压振幅的 ωC 倍, 电流的相位超前电压 90° , 如图 3-1-5 所示。式(3-1-15)也具有欧姆定律的形式, 可以看成欧姆定律的推广称为广义欧姆定律的相量形式。由于 ωC 具有电导的量纲, 定义 $B_c = \omega C$ 为电容的电纳, 简称容纳 (Capacitive Susceptance), 单位是西门子(S)。反过来, 定义 $X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{B_c}$ 为电容的电抗, 简称容抗 (Capacitive Reactance), 单位是欧姆(Ω)。

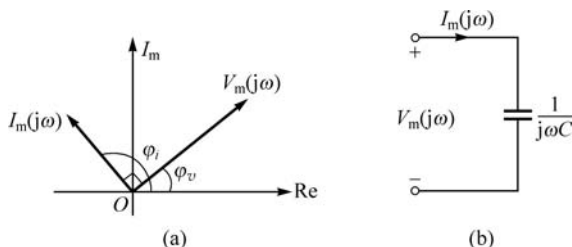


图 3-1-5

容抗 X_c 与电容 C 、频率 ω 成反比, 当电容 C 一定时, 电容元件对高频电流呈现很小的容抗, 而对直流 ($\omega=0$) 呈现的容抗为无穷大 ($X_c \rightarrow \infty$), 可视作开路。因此, 电容器具有隔直作用。

3. 电感元件的相量形式 (Inductance)

与电容相对偶, 电感元件的 VCR 满足微分关系, 即 $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$, 因此, 有

$$\text{Re}[V_m(j\omega)e^{j\omega t}] = L \frac{d}{dt} \text{Re}[I_m(j\omega)e^{j\omega t}] = \text{Re}[j\omega L I_m(j\omega)e^{j\omega t}] \quad (3-1-16)$$

所以,有

$$V_m(j\omega) = j\omega L I_m(j\omega) \quad \text{或} \quad I_m(j\omega) = (j\omega L)^{-1} V_m(j\omega) \quad (3-1-17)$$

式(3-1-17)说明电感元件上的电压相量与电流相量之间相差 90° , 电压振幅是电流振幅的 ωL 倍, 电压的相位超前电流 90° , 如图 3-1-6 所示。式(3-1-17)也具有欧姆定律的形式, 可以看成欧姆定律的推广称为广义欧姆定律的相量形式。由于 ωL 具有电阻的量纲, 定义 $X_L = \omega L$ 为电感的电抗, 简称感抗 (Inductive Reactance), 单位是欧姆(Ω); 反过来, 定义 $B_L = 1/X_L$ 为电感的电纳, 简称感纳 (Inductive Susceptance), 单位是西门子(S)。感抗 X_L 与电感 L 、频率 ω 成正比, 因此, 电感对高频率电流的阻碍作用最大, 而对直流 ($\omega=0$) 可视为短路, 即 $X_L=0$ 。

4. 阻抗和导纳 (Impedance and Admittance)

假设一个线性定常无源单口网络如图 3-1-7 所示, 在正弦稳态情况下, 定义口电

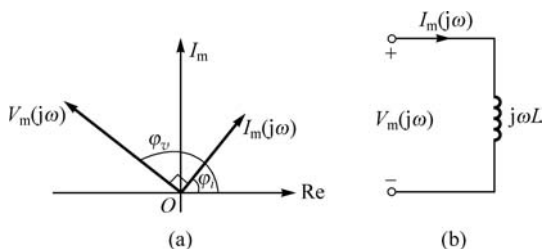


图 3-1-6

压相量 $V_m(j\omega)$ 与口电流相量 $I_m(j\omega)$ 之比为阻抗, 用符号 $Z(j\omega)$ 表示, 定义其倒数为导纳, 用符号 $Y(j\omega)$ 表示, 即

$$Z(j\omega) = \frac{V_m(j\omega)}{I_m(j\omega)} = |Z(j\omega)| \angle \varphi_z(\omega) = R + jX \quad (3-1-18)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{I_m(j\omega)}{V_m(j\omega)} = |Y(j\omega)| \angle \varphi_y(\omega) = G + jB \quad (3-1-19)$$

其中, R 为电阻; G 为电导; 定义 X 为电抗 (Reactance); 定义 B 为电纳 (Susceptance)。显然, 阻抗 $Z(j\omega)$ 和导纳 $Y(j\omega)$ 是复数, 且是频率 ω 的函数。在同一频率的正弦信号作用下, 它们互为倒数关系。

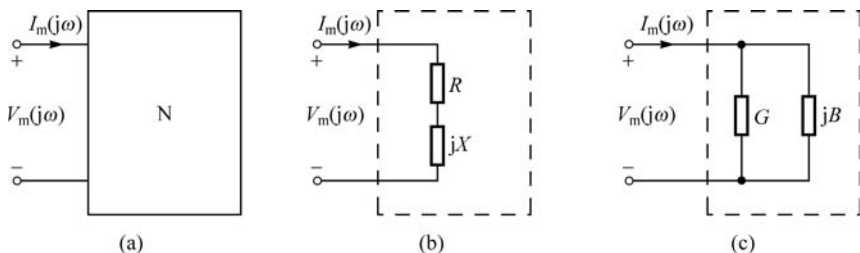


图 3-1-7

式(3-1-18)和式(3-1-19)显示出同一个网络对不同的频率 ω 呈现出不同的阻抗或导纳, 这种变化不仅有大小的变化(模 $|Z(j\omega)|$ 、 $|Y(j\omega)|$ 的变化), 也有相位的变化(阻抗角 (Impedance Angle) $\varphi_z(\omega)$ 、 $\varphi_y(\omega)$ 的变化), 从而使同一个网络呈现出不同的阻抗性质, 即网络是有频率特性的, 网络的相位信息也很重要, 这一点, 在以往的学习中从未涉及或关注过。

例如, 当 $X = X_L - X_C = 0$ 时(即 $X_L = X_C$)时, $\varphi_z = 0$, 网络呈电阻性, 电压、电流同相; 当 $X = X_L - X_C > 0$ (即 $X_L > X_C$)时, $\varphi_z > 0$, 电压超前电流, 网络呈感性 (Inductive); 当 $X = X_L - X_C < 0$ (即 $X_L < X_C$)时, $\varphi_z < 0$, 电压滞后电流, 网络呈容性 (Capacitive)^①。因此, 在进行正弦稳态分析时, 首先要有相位的概念, 而相位关系又反

^① 注: 关于 X_L 、 X_C 、 B_L 、 B_C 的定义, 有些教材从阻抗和导纳的角度采用 $X_C < 0$ 、 $B_L < 0$ 的定义方法, 两种定义均不影响电容与电感在阻抗和导纳上面的计算。

映在阻抗角上,它和阻抗的模一起被称为阻抗,用来反映网络本身的固有特性,与口电压或口电流无关。值得一提的是,阻抗不同于正弦变量的复数表示,它不是相量,而是一个复数计算量。这些概念,同样适用于导纳。

【例 3-1-1】 如图 3-1-8(a) 所示的单口网络中,已知 $Z_1 = 10 + j10 \Omega$, $Y_2 = 2 - j2 \text{ S}$, 试计算该网络的阻抗及网络的阻抗特性。如果该结果是网络工作在 $f = 5 \text{ Hz}$ 的频率下测得的,试画出该网络等效的电路元件模型,以及此时各电压电流的相量图。

解: 此单口网络为 Z_1 和 Y_2 串联的简单网络,所以,网络呈现的阻抗为

$$Z = Z_1 + 1/Y_2 = 10 + j10 + 1/(2 - j2) = 10.25 + j10.25 (\Omega)$$

此为感性网络,可由一个 $R = 10.25 \Omega$ 的电阻和一个 $L = 10.25/2\pi f = 2.05/2\pi (\text{H})$ 的电感的串联来等效(图 3-1-8(b))。此时各电压电流的相量图(图 3-1-8(c))满足 $|V_R(j\omega)| = |V_L(j\omega)| = 10.25 |I(j\omega)|$ 。

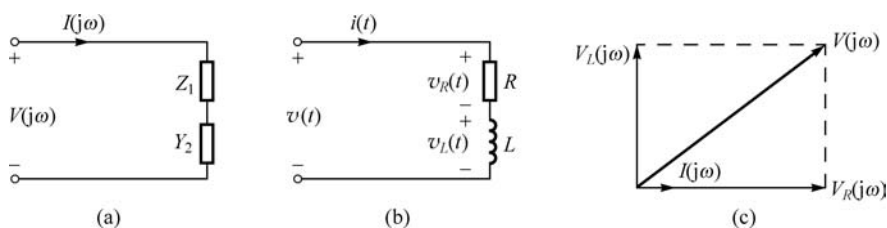


图 3-1-8

5. 定律的相量形式(Law's Phasor Model)

当电路中各处的电压和电流都是同一频率的正弦量时,KCL 的时域表达式(1-1-9) 可以表示为

$$\sum_{k=1}^K i_k(t) = \sum_{k=1}^K \text{Re}[I_{mk}(j\omega)e^{j\omega t}] = \text{Re}\left\{\left[\sum_{k=1}^K I_{mk}(j\omega)\right]e^{j\omega t}\right\} = 0 \quad (3-1-20)$$

所以,有

$$\sum_{k=1}^K I_{mk}(j\omega) = 0 \quad (3-1-21)$$

当电路中各处的电压和电流都是同一频率的正弦量时,KVL 的时域表达式(1-1-13) 可以表示为

$$\sum_{k=1}^K v_k(t) = \sum_{k=1}^K \text{Re}[V_{mk}(j\omega)e^{j\omega t}] = \text{Re}\left\{\left[\sum_{k=1}^K V_{mk}(j\omega)\right]e^{j\omega t}\right\} = 0 \quad (3-1-22)$$

所以,有

$$\sum_{k=1}^K V_{mk}(j\omega) = 0 \quad (3-1-23)$$

因此,在正弦稳态电路中,基尔霍夫定律可以直接用电压和电流的相量形式替换它们的时域形式。

3.1.3 稳态电路分析/Steady-State Circuit Analysis

观察正弦稳态电路中的基尔霍夫定律和欧姆定律的相量形式,与我们在第1章中学习的电阻电路定律的数学形式相同,不同之处仅仅是用电压、电流相量替换了直流电压、电流;用阻抗、导纳替换了电阻、电导。根据这种对应关系,完全可以把分析电阻电路的一整套基本原理和方法(包括戴维南定理和诺顿定理)用到正弦稳态网络的分析中来。

因此,正弦稳态网络的相量分析法的主要步骤可归结为:

- (1) 将时域网络变换成网络的相量模型(称相量模型电路为符号电路);
- (2) 根据基尔霍夫定律和欧姆定律的相量形式建立代数方程;
- (3) 复数运算,求解方程;
- (4) 将所得的响应变量的相量形式还原成时域中的函数形式。

以下通过实例来说解。

【例 3-1-2】 已知如图 3-1-9(a)所示的正弦稳态网络中, $\omega=1000 \text{ rad/s}$,求网络的正弦稳态响应 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 。

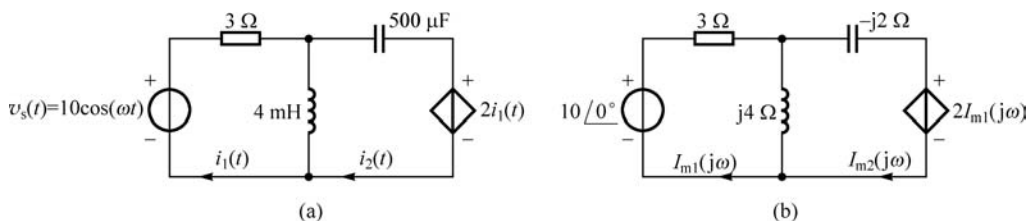


图 3-1-9

解: 正弦稳态问题的求解可以借助相量法简化分析,做出该网络的相量模型电路如图 3-1-9(b)所示,接下来可以像静态电路的求解一样,对符号电路建立 KVL 方程。

$$\begin{cases} 3I_{m1}(j\omega) + j4[I_{m1}(j\omega) - I_{m2}(j\omega)] = 10 \\ j2I_{m2}(j\omega) + j4[I_{m1}(j\omega) - I_{m2}(j\omega)] = 2I_{m1}(j\omega) \end{cases} \quad (3-1-24)$$

解得

$$I_{m1}(j\omega) = \frac{j20}{8 + j14} = \frac{20/90^\circ}{16.12/60.3^\circ} = 1.24/29.7^\circ \quad (3-1-25)$$

$$I_{m2}(j\omega) = \frac{-20 + j40}{8 + j14} = \frac{44.72/116.6^\circ}{16.12/60.3^\circ} = 2.77/56.3^\circ \quad (3-1-26)$$

将式(3-1-25)和式(3-1-26)还原为时域正弦稳态响应,有

$$i_1(t) = 1.24\cos(1000t + 29.7^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 2.77\cos(1000t + 56.3^\circ) \text{ A}$$

可见,用相量法分析正弦稳态响应是非常简便有效的。

由于任何周期信号都能分解为一系列不同频率上正弦信号的叠加(详见第5章“傅里叶分析”)。因此,利用线性电路的叠加性,可以把正弦信号激励下网络的稳态响应的相量分析法,推广到一般周期信号激励下网络的稳态响应分析。

3.2 正弦稳态功率/Powers

网络分析的实质是研究信号的传输及信号在传输过程中能量的转换,因此功率分配无疑是一个很重要的分析对象。在正弦稳态网络中,由于存在电容、电感以及电源之间的能量往返交换,这种现象在纯电阻网络中是没有的,因此正弦稳态网络的功率分析要更复杂一些。

对于某个给定的单口网络,设其口电流电压为

$$i(t) = I_m \cos \omega t = \sqrt{2} I \cos \omega t \quad \text{和} \quad v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} V \cos(\omega t + \varphi_z) \quad (3-2-1)$$

其中, $\varphi_z = \varphi_v - \varphi_i = \varphi$, 以下给出该单口网络的功率定义,并具体分析其功率特性。

1. 瞬时功率(Instantaneous Power)

定义网络的瞬时功率为网络的瞬时电压和电流的乘积。

$$\begin{aligned} p(t) = v(t)i(t) &= \frac{1}{2} I_m V_m \cos \varphi + \frac{1}{2} I_m V_m \cos(2\omega t + \varphi) \\ &= IV \cos \varphi + IV \cos(2\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (3-2-2)$$

表达式(3-2-2)在一个周期内有正有负,由于一致参考方向下为正表示网络吸收功率、为负表示网络输出功率,因此瞬时功率的表达式显示了单口网络与源之间能量的周期性的往返交换。表达式的第一项 $IV \cos \varphi$ 是常量,与时间无关,体现出网络的平均消耗。表达式的第二项 $IV \cos(2\omega t + \varphi)$ 呈正弦周期变化,体现出网络与源之间的能量往返。

令 $\varphi = 0$, 则单口网络为纯电阻网络,表达式(3-2-2)简化为 $p(t) = IV [1 + \cos(2\omega t)] > 0$, 始终是大于零的,可见纯电阻网络始终是耗能的,不断吸收来自源的能量;令 $\varphi = 90^\circ$, 则单口网络为纯电抗网络,表达式(3-2-2)简化为 $p(t) = -IV \sin(2\omega t)$, 在一个周期内时正时负,且正负互等。表示只含有动态元件的纯电抗网络并不消耗能量,但始终保持与源之间的周期性能量往返交换。

由于瞬时功率无法在工程中实际测量获得,因此没有赋予单位的定义,但它的数学和物理含义非常清晰,并且是其他可测量功率和可计算功率的基础。

2. 平均功率或有功功率(Average Power)

定义网络的平均功率为瞬时功率在一个周期内消耗的平均值。

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = IV \cos \varphi \quad (3-2-3)$$

正如前面对瞬时功率的分析一样,平均功率的表达式(3-2-3)正是瞬时功率的表

达式(3-2-2)中的第一项。在实际工程中,平均功率可以通过功率计或瓦特计实际测量获得,它是网络真实消耗的功率,因此,又称为**有功功率(Active Power)**,单位为瓦特(W)。

式(3-2-3)显示了正弦稳态网络的平均功率并不等于口电压、电流有效值的乘积,还要乘以 $\cos\varphi$,因此称 $\cos\varphi$ 为**功率因数(Power Factor)**,称阻抗角 φ 为**功率因数角**。在频率一定的情况下,功率因数完全由网络参数和拓扑结构所决定,它是由网络中的电容和电感引起的。电容和电感在网络中虽不消耗能量,但会使网络与电源之间出现能量往返交换现象,这种无功的能量往返使网络的功率因数永远低于纯电阻网络的功率因数($\cos\varphi=1$)。另外,在相同电压的作用下,为了使负载获得同样大小的功率,功率因数 $\cos\varphi$ 越小,所需的电流就越大,它将加重电源电流的负担。此时,如能改变阻抗角,使 $\varphi\rightarrow 0$ 就能减小电流。一种简单的办法是对容性负载并联电感、对感性负载并联电容。例如,一般使用的电器都是感性的,因此常通过对电器并联电容来达到减小阻抗角的目的。

3. 无功功率(Reactive Power)

如果有功率反映网络中电阻消耗能量的能力,那么可以定义**无功功率**来反映网络中动态元件与电源之间能量往返交换的能力。考虑网络为纯电抗元件时 $\cos\varphi=0$, $\sin\varphi=1$,定义无功功率

$$Q = IV\sin\varphi \quad (3-2-4)$$

这个定义的来源,在以下描述的复功率里得到完美的数学形式上的符合。从物理角度解释,可以将瞬时功率式(3-2-2)的第二项展开,并改写为

$$p(t) = IV\cos\varphi[1 + \cos(2\omega t)] - IV\sin\varphi\sin(2\omega t) \quad (3-2-5)$$

式(3-2-5)的第一项始终大于零,表现为网络中电阻耗能的有功功率部分,表达式的第二项在一个周期内时正时负,且正负互等,表现为网络中纯电抗元件与源之间能量往返的无功功率部分。为区别于有功功率,无功功率的单位为“无功伏安”,简称乏(Volt-Ampere-Reactive, VAR)。

在这个定义下,可以获得纯电容元件网络的无功功率 Q_C 和纯电感元件网络的无功功率 Q_L 为

$$Q_C = -IV = -\omega CV^2 = -2\omega W_C \quad (3-2-6)$$

$$Q_L = IV = \omega LI^2 = 2\omega W_L \quad (3-2-7)$$

其中, $W_C = \frac{1}{2}CV^2$ 、 $W_L = \frac{1}{2}LI^2$ 分别表示电容和电感的平均储能。

4. 视在功率(Apparent Power)

定义有功功率的最大值为**视在功率**。

$$S = IV \quad (3-2-8)$$

事实上,每一个电设备或电器都有“一定条件下的安全运行的限额”,即额定电压和额定电流,额定电压和额定电流均是有效值,它们的乘积定义为视在功率是电表可视的最大限额,因此,视在功率也常常用来表示**额定功率(Power Rating)**。单位定义

为伏安(VA)。显然,有功功率、无功功率、视在功率满足关系

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (3-2-9)$$

5. 复功率(Complex Power)

为了根据电压相量和电流相量直接计算功率,并简单表示单口网络的全部功率信息,定义了复功率。

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{1}{2} V_m(j\omega) I_m^*(j\omega) = V(j\omega) I^*(j\omega) = V(j\omega)^* I(j\omega) \\ &= VI \cos\varphi + jVI \sin\varphi = P + jQ = S/\varphi \end{aligned} \quad (3-2-10)$$

可见,复功率完美地概括了有功功率、无功功率、视在功率、功率因数,在功率分析和计算中非常方便有用。由于它不是实际可测的功率,因此,同样是不需要在意它的单位定义的。又由于它的模是视在功率,因此,可以用视在功率的单位伏安(VA)来表示。

【例 3-2-1】 图 3-2-1 为一个 220 V 交流电压源给两个负载供电的电路。已知 $Z_1 = (4 + j2) \Omega$, $Z_2 = (15 - j10) \Omega$, 试分别计算源和负载吸收的有功功率、无功功率、复功率。

解: 220 V 是有效值,因此,为简化计算本题采用有效值相量,电压源相量可以表示为 $V_s(j\omega) = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$ 。

于是,

$$Z(j\omega) = Z_1 + Z_2 = 4 + j2 + 15 - j10 = 20.62 \angle -22.83^\circ \Omega$$

$$I(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{Z(j\omega)} = \frac{220 \angle 0^\circ}{20.62 \angle -22.83^\circ} = 10.67 \angle 22.83^\circ \text{ A}$$

所以源和负载吸收的复功率分别为

$$P_{C_s} = -V_s(j\omega) I^*(j\omega) = (-2163.5 + j910.8) \text{ VA} \quad (3-2-11)$$

$$P_{C_1} = V_1(j\omega) I^*(j\omega) = Z_1(j\omega) I(j\omega) I^*(j\omega) = (455.4 + j227.7) \text{ VA} \quad (3-2-12)$$

$$P_{C_2} = V_2(j\omega) I^*(j\omega) = Z_2(j\omega) I(j\omega) I^*(j\omega) = (1708 - j1139) \text{ VA} \quad (3-2-13)$$

式(3-2-11)、式(3-2-12)和式(3-2-13)的实部分别为源和负载的有功功率,虚部分别为源和负载的无功功率。并且,通过这个简单的电路例子可以证实,在一致的参考方向下,电路的复功率、有功功率、无功功率满足

$$P_{C_s} + P_{C_1} + P_{C_2} = 0, \quad P_s + P_1 + P_2 = 0, \quad Q_s + Q_1 + Q_2 = 0$$

一般地,可以表示为

$$\sum_{k=1}^n P_{C_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^n P_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n Q_k = 0 \quad (3-2-14)$$

其中, n 为元件个数。这便是电路的**功率守恒原理**,即电源提供的功率等于各个独立负载上获得的功率之和。

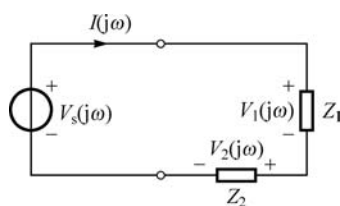


图 3-2-1

6. 最大功率传递原理(Maximum Power Transfer Theorem)

就源与负载的功率传递而言,最大功率传递自然是非常值得关注的课题。如图

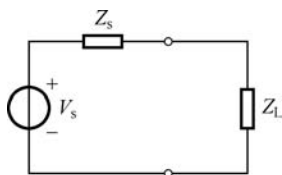


图 3-2-2

图 3-2-2 所示的电路中,忽略源的内阻可变的情况(因为如果可变,则内阻取零一定是最大功率传递),只讨论在源内阻一定的情况下,如何改变负载阻抗,使之获得最大功率传递。

(1) 负载 $Z_L = R_L + jX_L$ 中电阻和电抗可以独立调节
写出负载获得有功功率的表达式为

$$P_L = I^2 R_L = \frac{V_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2} \quad (3-2-15)$$

显然,使式(3-2-15)最大的负载电抗的选取,是使 $X_s + X_L = 0$ 。接下来,将式(3-2-15)对 R_L 求导,最大功率时导数为零,有

$$\frac{dP_L}{dR_L} = V_s^2 d\left(\frac{R_L}{(R_s + R_L)^2}\right) / dR_L = V_s^2 \frac{R_s - R_L}{(R_s + R_L)^3} = 0 \quad (3-2-16)$$

显然,式(3-2-16)求导的结果是 $R_s = R_L$ 。综合两个分析结果,使负载获得最大功率传递的条件是负载阻抗与源内阻抗互为共轭复数,即

$$Z_L = Z_s^* \quad (3-2-17)$$

因此,又称负载的这种最大功率匹配为**共轭匹配(Conjugate Matching)**。此时,最大功率为

$$P_{L\max} = V_s^2 / 4R_L = V_{ms}^2 / 8R_L \quad (3-2-18)$$

(2) 负载 $Z_L = R_L + jX_L = |Z_L| \angle \varphi_Z$ 中阻抗角 φ_Z 一定,但模 $|Z_L|$ 可以调节
写出负载获得有功功率的表达式为

$$P_L = I^2 R_L = \frac{V_s^2 |Z_L| \cos\varphi_Z}{(R_s + |Z_L| \cos\varphi_Z)^2 + (X_s + |Z_L| \sin\varphi_Z)^2} \quad (3-2-19)$$

同理,将式(3-2-19)对 $|Z_L|$ 求导,最大功率时导数为零,有

$$\begin{aligned} & \frac{dP_L}{d|Z_L|} \\ &= \frac{(R_s + |Z_L| \cos\varphi_Z)^2 + (X_s + |Z_L| \sin\varphi_Z)^2 - 2|Z_L| [(R_s + |Z_L| \cos\varphi_Z) \cos\varphi_Z + (X_s + |Z_L| \sin\varphi_Z) \sin\varphi_Z]}{[(R_s + |Z_L| \cos\varphi_Z)^2 + (X_s + |Z_L| \sin\varphi_Z)^2]^2} V_s^2 \cos\varphi_Z \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-2-20)$$

整理可得

$$|Z_L| = \sqrt{R_s^2 + X_s^2} \quad (3-2-21)$$

因此,负载阻抗仅仅是模可调节的时候,获得最大功率传递的条件是负载阻抗的模等同于源内阻抗的模。则称负载的这种最大功率匹配为**模匹配**。此时,最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{V_s^2 \cos\varphi_Z}{2(|Z_s| + R_s \cos\varphi_Z + X_s \sin\varphi_Z)} \quad (3-2-22)$$

例如,当源的内阻抗是复数,而负载是纯电阻 R_L 时,负载获得最大功率传递的条件是

$R_L = \sqrt{R_s^2 + X_s^2}$, 而不是 $R_s = R_L$ 。

3.3 网络函数与频率响应/Network Functions and Frequency Responses

从电容和电感的阻抗关系式(3-1-15)、式(3-1-17)可以看出,电容和电感的阻抗大小与网络的工作频率有关,换句话说,不同频率的正弦信号激励下网络的稳态响应是不同的。也就是说,网络的稳态响应与工作频率有关,网络的稳态响应对不同频率的激励信号有抽选或抑制作用,为了清楚地分析网络的这种频率特性,引入**网络函数**、**频率响应**,以及3.4节描述的**滤波器**的概念。

网络函数可以定义为网络的输出相量与网络的输入相量之比,即响应相量与激励相量之比,通常用大写字母 N 表示。

$$N(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = |N(j\omega)| \angle \varphi(\omega) \quad (3-3-1)$$

网络函数可分为两大类,第一类称为**驱动点函数(Driving Point Functions)**,即响应相量和激励相量位于网络的同一端口,可以是输入端,也可以是输出端;第二类称为**转移函数(Transfer Functions)**,即响应相量和激励相量位于网络的不同端口,因此,又称为**传递函数**,常用大写字母 H 表示^①。激励为输入端响应为输出端的称为正向转移或正向传递函数;反之,称为反向转移函数或反向传递函数。

1. 驱动点函数(Driving Point Functions)

在网络的同一端口,若激励信号为电流相量 $I(j\omega)$,响应信号为电压相量 $V(j\omega)$,如图3-3-1(a)所示,则驱动点函数就是驱动点阻抗 $Z(j\omega)$,即

$$N(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = Z(j\omega) \quad (3-3-2)$$

若激励信号为电压相量 $V(j\omega)$,响应信号为电流相量 $I(j\omega)$,如图3-3-1(b)所示,则驱动点函数就是驱动点导纳 $Y(j\omega)$,即

$$N(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{V(j\omega)} = Y(j\omega) \quad (3-3-3)$$

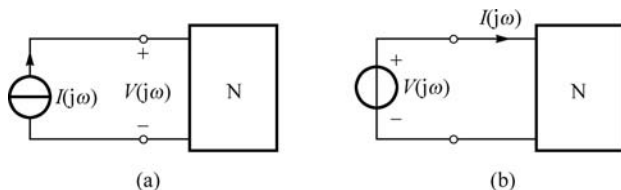


图 3-3-1

^① 网络函数用字母 N 表示,取自 Network 的首字母,用 H 表示取自式(2-3-16)中 $h(t)$ 在频域中表示 $H(j\omega)$ 。

2. 转移函数(Transfer Functions)

转移函数是响应相量与激励相量位于网络不同端口时的网络函数,以正向转移函数为例共有 4 种定义,如图 3-3-2 所示。若激励信号为端口 1 的电流相量 $I_1(j\omega)$,响应信号是端口 2 的电压相量 $V_2(j\omega)$,如图 3-3-2(a)所示,则网络函数就是**转移阻抗** $Z_T(j\omega)$,即

$$N(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{I_1(j\omega)} = Z_T(j\omega) \quad (3-3-4)$$

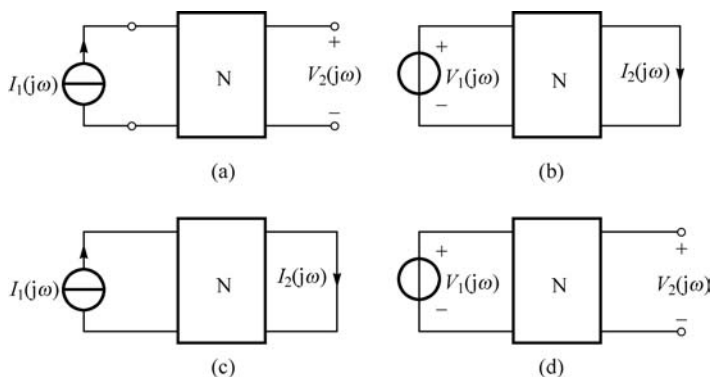


图 3-3-2

如果激励信号是端口 1 的电压相量 $V_1(j\omega)$,响应信号是端口 2 的电流相量 $I_2(j\omega)$,如图 3-3-2(b)所示,则网络函数就是**转移导纳** $Y_T(j\omega)$,即

$$N(j\omega) = \frac{I_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = Y_T(j\omega) \quad (3-3-5)$$

若激励信号是端口 1 的电流相量 $I_1(j\omega)$,响应信号是端口 2 的电流相量 $I_2(j\omega)$,如图 3-3-2(c)所示,则转移函数就是**转移电流比** $K_I(j\omega)$,即

$$N(j\omega) = \frac{I_2(j\omega)}{I_1(j\omega)} = K_I(j\omega) \quad (3-3-6)$$

如果激励信号是端口 1 的电压相量 $V_1(j\omega)$,响应信号是端口 2 的电压相量 $V_2(j\omega)$,如图 3-3-2(d)所示,于是有**转移电压比** $K_V(j\omega)$,即

$$N(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = K_V(j\omega) \quad (3-3-7)$$

【例 3-3-1】 图 3-2-1 正弦稳态电路中,如果已知 $Z_1 = R_1 + j\omega L$, $Z_2 = R_2 + 1/j\omega C$,以交流电压源 $V_s(j\omega)$ 为激励, $I(j\omega)$ 、 $V_1(j\omega)$ 、 $V_2(j\omega)$ 为响应,试分别计算对应的网络函数,并指出其类型。

解: 容易获得回路电流的表达式为

$$I(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega)} = \frac{V_s(j\omega)}{R_1 + R_2 + j(\omega L - 1/\omega C)} \quad (3-3-8)$$

由此可获得各网络函数及类型分别为

$$N(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{V_s(j\omega)} = \frac{1}{R_1 + R_2 + j(\omega L - 1/\omega C)} = Y(j\omega) \quad (3-3-9)$$

$$N_1(j\omega) = \frac{V_1(j\omega)}{V_s(j\omega)} = \frac{R_1 + j\omega L}{R_1 + R_2 + j(\omega L - 1/\omega C)} = K_{v1}(j\omega) \quad (3-3-10)$$

$$N_2(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_s(j\omega)} = \frac{R_2 - j/\omega C}{R_1 + R_2 + j(\omega L - 1/\omega C)} = K_{v2}(j\omega) \quad (3-3-11)$$

仔细观察各网络函数式(3-3-9)~式(3-3-11)可以发现,网络函数特别是转移函数的分母是相同的,更准确地说使分母取零时对应的 $j\omega$ 取值点(称为**极点 Pole**)是相同的。这个现象并非偶然,观察式(2-4-2)和式(3-2),一般地,根据网络函数的定义有

$$N(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0} \quad (3-3-12)$$

式(3-3-12)分母取零时对应的 $j\omega$ 取值点实为微分方程通解所对应的特征根,即网络的固有频率。由于网络的固有频率是网络自身所固有的,由网络的元件参数和拓扑结构所决定,反映网络自身的频率特性,它与是否有或者是什么样的激励与响应无关,因此,网络函数的分母通常对应相同的 $j\omega$ 取值点。

由于网络函数可以描述网络的频率响应特性,因此,以下进一步用曲线和图的形式、以频率 ω 为自变量,来描述网络对不同频率成分的正弦信号的稳态响应特性。

3. 频率响应(Frequency Response)

网络函数的定义式(3-3-1)中 $|N(j\omega)|$ 为网络函数的**模**,表示了响应与激励振幅之比与频率的关系,称为**幅频(Amplitude-Frequency)响应特性**。 $\varphi(\omega)$ 为网络函数的**幅角**,表示了响应与激励的**相移(Phase Shift)**与频率的关系,称为**相频(Phase-Frequency)响应特性**。把网络函数在所有频率 ω 下的模量与相位的信息统称为**频率响应**。

将 $|N(j\omega)|$ 随频率 ω 变化的规律用曲线表示,称为网络的**幅频特性曲线**;同样,将 $\varphi(\omega)$ 随频率 ω 变化规律的曲线称为网络的**相频特性曲线**。网络的幅频和相频特性曲线构成了网络的**频率响应特性曲线(Frequency Response Curve)**,它完全由网络自身的参数和结构来决定,对不同的激励信号进行筛选或滤除。

【例 3-3-2】 图 3-2-1 的正弦稳态电路中,如果已知 $Z_1 = (1 + j\omega) \Omega$, $Z_2 = (2 + 1/j\omega) \Omega$,以交流电压源 $V_s(j\omega)$ 为激励, $V_1(j\omega)$ 为响应,试定性做出网络的频率响应特性曲线。

解: 可以利用式(3-3-10)写出该网络函数的表达式为

$$N(j\omega) = \frac{V_1(j\omega)}{V_s(j\omega)} = \frac{1 + j\omega}{3 + j(\omega - 1/\omega)} = \sqrt{\frac{1 + \omega^2}{9 + (\omega - 1/\omega)^2}} \angle \varphi(\omega) \quad (3-3-13)$$

其中,幅频特性为

$$|N(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \omega^2}{9 + (\omega - 1/\omega)^2}} \quad (3-3-14)$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = \arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega - \frac{1}{\omega}}{3}\right) \quad (3-3-15)$$

定性做出网络的频率响应特性曲线如图 3-3-3 所示。从响应曲线可见, $\omega=0$ 时模为 0, $\omega \rightarrow \infty$ 时模为 1, 表示该输入输出网络对直流信号的完全抑制和对高频信号的全通选择。

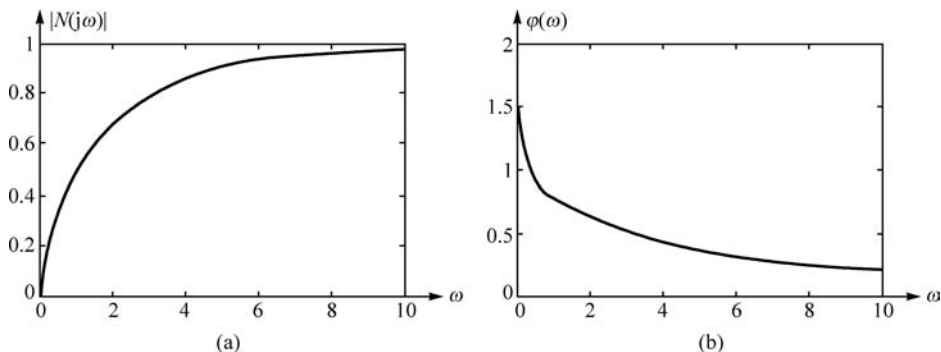


图 3-3-3

3.4 滤波器/Filter

滤波器是按一定要求对输入信号进行频率选择的电路。因此, 可以实现对不同频率成分的正弦信号有不同幅度和相位响应特性的网络器件, 就可以称为滤波器。显然, 网络的传递函数可以完全描述滤波器的频率选择特性。

从选频的角度, 滤波器可以分为高通滤波器 (**High-Pass Filter, HPF**)、低通滤波器 (**Low-Pass Filter, LPF**)、带通滤波器 (**Band-Pass Filter, BPF**)、带阻滤波器 (**Band-Stop Filter, BSF**)、全通滤波器 (**All-Pass Filter, APF**)。

从数学的角度, 滤波器可以分为一阶滤波器 (**First-Order Filter**)、二阶滤波器 (**Second-Order Filter**)、高阶滤波器; 从能量的角度, 滤波器可以分为有源滤波器 (**Active Filter**) 和无源滤波器 (**Passive Filter**) 等。

总的来说, 网络的频率响应特性、滤波器的选频特性都可以用网络函数来描述, 它们描述网络对不同频率正弦信号的稳态响应特征。

3.4.1 一阶滤波器/First-Order Filter (Low-Pass, High-Pass)

一阶滤波器只含有一个动态元件, 是最简单的滤波器, 可以实现低通或高通的滤波功能。一阶网络只有 RC 和 RL 两种, 限于篇幅, 这里只讨论 RC 滤波器 (RL 滤波器的频率响应分析与 RC 滤波器完全类似, 并且, 还可以通过对偶关系由 RC 滤波器的关系式直接对偶获得)。

1. RC 低通滤波器(RC Low-Pass Filter)

如图 3-4-1(a) 所示的 RC 网络, 设网络函数为电容电压 $V_o(j\omega)$ 与输入电压 $V_i(j\omega)$ 之比(转移电压比), 即

$$N(j\omega) = K_V(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (3-4-1)$$

令 $\omega_c = 1/RC$, 则有

$$\begin{aligned} N(j\omega) &= \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_c)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \angle -\arctan(\omega/\omega_c) \\ &= |N(j\omega)| \angle \varphi(\omega) \end{aligned} \quad (3-4-2)$$

其中, $|N(j\omega)|$ 为幅频特性(特性曲线如图 3-4-1(b) 所示); $\varphi(\omega)$ 为相频特性(特性曲线如图 3-4-1(c) 所示)。

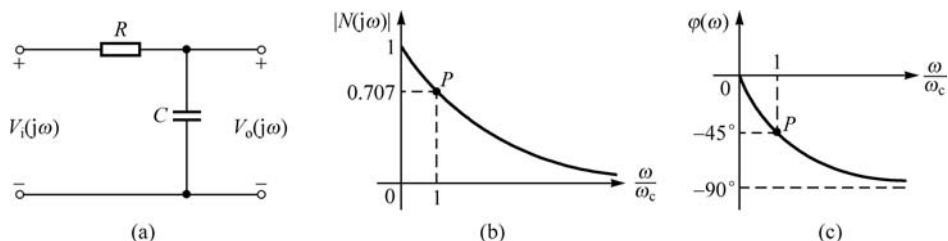


图 3-4-1

由式(3-4-2)可知, 当 $\omega=0$ 时, 输入为直流信号, $|N(j\omega)|_{\omega=0} = 1$ 为最大, $\varphi(0) = 0$, 输入与输出大小相等, 相位相同; 随着 ω 的增大, $|N(j\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 都将单调地减小; 当 $\omega = \omega_c$ 时, $\varphi(\omega_c) = -45^\circ$, $|N(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |N(j\omega)|_{\omega=0}$, 输出电压为输入电压的 70.7%, 由于功率与电压的平方成正比, 则对应于输出功率衰减一半, 因此称 $\omega = \omega_c$ 为半功率点(图 3-4-1(b)、图 3-4-1(c) 中的 P 点); 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $|N(j\omega)| \rightarrow 0$, $\varphi(\omega) \rightarrow -90^\circ$ 。

从网络的幅频特性曲线可见, 对相同振幅的输入电压而言, 频率越高输出电压就越小, 低频正弦信号比高频正弦信号容易通过, 显然这样的网络就是低通网络。换句话说, 多种不同频率的正弦信号通过这样的网络时, 低频信号容易通过, 高频信号受到抑制, 甚至被滤除。因此称为低通滤波器。

为了度量滤波器的选频范围和抑制能力, 除了指标半功率点, 工程上还引入截止频率和通频带的概念。把频率从 0 到半功率点 ω_c 的范围定义为低通滤波器的通频带(Pass Band), 并用 BW 表示其频带宽度(Band Width), 显然, 本例 $BW = \omega_c - 0 = \omega_c$, 定义 ω_c 为截止频率(Cut off Frequency)也形象地称为滚降频率(Roll-off Frequency)。当输入正弦信号的频率小于截止频率, 即 $\omega < \omega_c$ 时, 认为输入信号可以顺利地通过这一

网络；当输入正弦信号的频率大于截止频率，即 $\omega > \omega_c$ 时，认为输入信号不能顺利地通过称为阻带(Stop Band)。显然，这只是一个人为设定的边界，用以给出滤波器的指标描述标准，实际上幅频特性曲线上并没有信号能否顺利通过的明显界线。^①

总的来说，最大值点、截止频率和通频带是一阶滤波器的三个重要指标，由此可以定性做出频率响应特性曲线。

从相频特性曲线可见，RC 低通网络的相位角 $\varphi(\omega)$ 总是负的，即输出电压的相位滞后与输入电压。因此也称这种网络为滞后网络。

下面进一步讨论负载电阻对这一 RC 低通网络的影响。如图 3-4-2(a)所示，由于在电容 C 两端并联了负载电阻 R_L ，转移电压比变为

$$N(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1/RC}{\left(\frac{RR_L}{R+R_L}C\right)^{-1} + j\omega} = \frac{\omega_c}{\omega_1 + j\omega}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\omega_1/\omega_c)^2 + (\omega/\omega_c)^2}} \angle -\arctan(\omega/\omega_1) \quad (3-4-3)$$

其中， $\omega_1 = \left(\frac{RR_L}{R+R_L}C\right)^{-1}$ ，其幅频特性曲线示于图 3-4-2(b)。可见在输入信号不变的情况下，随着负载电阻 R_L 的变小(ω_1 变大)，输出信号的直流分量明显降低，幅频特性曲线趋于平缓，网络的通频带展宽，使更高频率的正弦信号可以顺利通过该网络，低通滤波的作用被削弱。

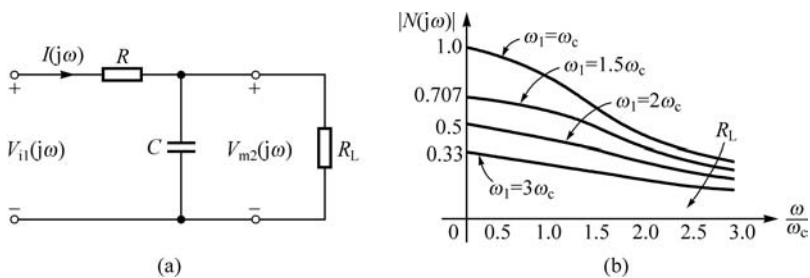


图 3-4-2

2. RC 高通滤波器(RC High-pass Filter)

对 RC 电路取 R 两端的电压为输出电压，就构成 RC 高通滤波器(图 3-4-3(a))，其转移电压比为

$$N(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega}{\omega_c + j\omega} = \frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \angle \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega/\omega_c)$$

$$= |N(j\omega)| \angle \varphi(\omega) \quad (3-4-4)$$

^① 事实上，截止频率两边并非绝对意义上的“通过”和“截止”，信号从被选择通过到被抑制之间，还有一个指标称为过渡带(Transition Band)，这个频带越窄，滤波器的性能越好。

其中, $\omega_c = 1/RC$, $|N(j\omega)|$ 为幅频特性(特性曲线如图 3-4-3(b)所示); $\varphi(\omega)$ 为相频特性(特性曲线如图 3-4-3(c)所示)。

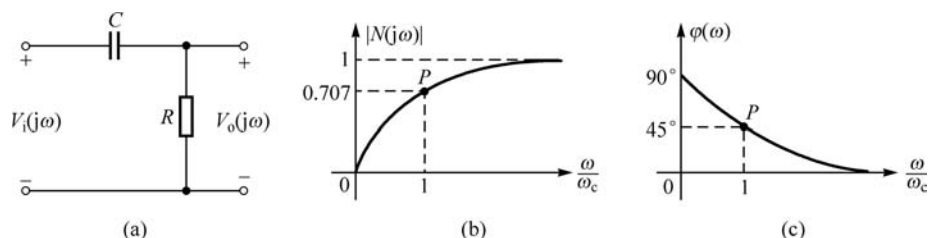


图 3-4-3

由式(3-4-4)可知,当 $\omega = 0$ 时, $|N(j\omega)|_{\omega=0} = 0, \varphi(0) = 90^\circ$; 当 $\omega = \omega_c$ 时, $|N(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707, \varphi(\omega_c) = 45^\circ$; 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $|N(j\omega)| \rightarrow 1, \varphi(\omega) \rightarrow 0$ 。类比于一阶低通滤波器, $\omega_c = 1/RC$ 为截止频率,通频带为 $\omega > \omega_c$ 。相频响应特性曲线上,输出相位总是超前输入相位,且在 $90^\circ \sim 0$ 范围取值,也称这种网络为超前网络。

【例 3-4-1】 用一个 RC 低通滤波器和一个 RC 高通滤波器的有效并联,可以实现一个带阻滤波器,如图 3-4-4(a)所示,该滤波器称为双 T 桥滤波器(Twin-T Filter)。试计算其电压传递函数,并定性画出幅频响应曲线。

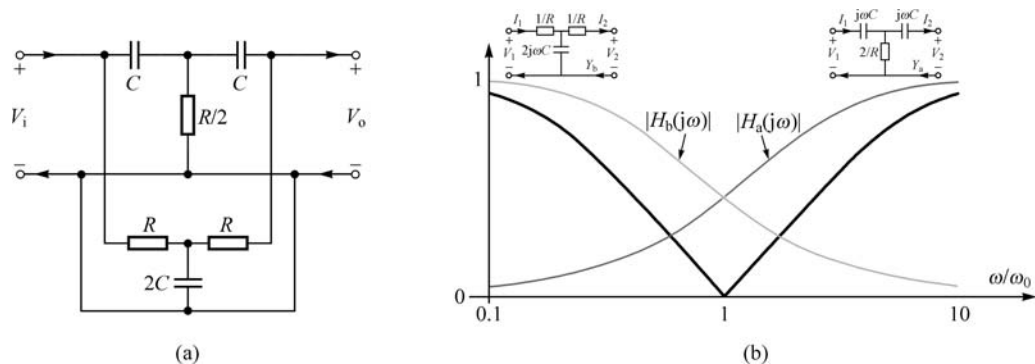


图 3-4-4

解: 取 $\omega_0 = 1/RC$, 其电压传递函数可以表示为

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j4(\omega/\omega_0)} \quad (3-4-5)$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{1 + 14(\omega/\omega_0)^2 + (\omega/\omega_0)^4}} \quad (3-4-6)$$

幅频响应曲线如图 3-4-4(b)所示,该滤波器在 $\omega = \omega_0$ 时对信号传输有很强的阻碍作用,为带阻滤波器(Band-Stop Filter)。(本例直接计算较为复杂,利用第 8 章双口网络并联结构特点,即可简单求解。)

3.4.2 二阶滤波器/Second-Order Filter(Band Pass, Band Stop)

二阶滤波器含有两个独立的动态元件,可以实现带通(通过 $\omega_1 < \omega < \omega_2$ 中所有频率的信号)或带阻(抑制 $\omega_1 < \omega < \omega_2$ 中所有频率的信号)的滤波功能。二阶滤波器的特性参数除半功率点、截止频率和通频带之外,还有一个重要的指标,即谐振频率。限于篇幅,本节讨论两类最经典最常用的二阶滤波器: RLC 谐振电路和 RC 选频电路。

1. RLC 串联谐振电路(RLC Series Resonance)

如图 3-4-5(a)所示的 RLC 串联网路,若取电阻 R 上的电压为输出电压,则转移电压比为

$$N(j\omega) = K_V(j\omega) = \frac{V_R(j\omega)}{V_s(j\omega)} = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} \quad (3-4-7)$$

从式(3-4-7)的分母可见,当 $\omega_c = 1/\sqrt{LC}$ 时模值最大,此时网络的电抗为零,产生谐振^①,此时的频率 ω_c 称为谐振频率(Resonant Frequency)。取

$$Q = \omega_0 L/R = 1/\omega_0 RC \quad (3-4-8)$$

则式(3-4-7)可表示为

$$N(j\omega) = K_V(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = A(\omega) \angle \varphi(\omega) \quad (3-4-9)$$

其中, $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ 为幅频特性; $\varphi(\omega) = -\arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$ 为相频特性。特性曲线分别示于图 3-4-5(b)和图 3-4-5(c)。

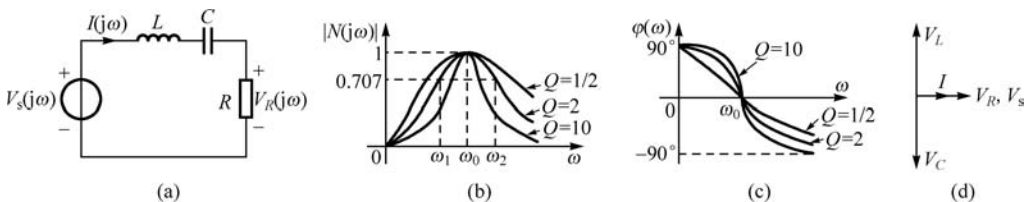


图 3-4-5

从图中可以看到,在谐振频率 ω_0 附近,幅频特性曲线出现峰值;而离开这个谐振频率 ω_0 时,曲线急剧下降。因此,也称 ω_0 为中心频率(Center Frequency)。在中心频率两侧,当 $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ 时,对应的频率 ω_1 和 ω_2 分别称为网络的下截止频率(也有用 ω_l 表示)和上截止频率(也有习惯用 ω_h 表示),可以写为

^① 物理学中,当作用力的频率和被作用系统的固有频率一致时,系统受迫振动产生的振幅最大,这种现象称为共振。电路中谐振的物理本质也是这样的。即当激励的频率等于电路的固有频率时,电路响应的振幅或者是传递函数的模值达到峰值,这种现象称为谐振。

$$\omega_1 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} - \frac{1}{2Q} \right], \quad \omega_2 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} + \frac{1}{2Q} \right] \quad (3-4-10)$$

网络的通频带为 $BW = \omega_2 - \omega_1$ 。具有这种特性的网络,习惯上称为**带通滤波器**(或**带通网络**)。根据式(3-4-10)有

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{或} \quad Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \quad (3-4-11)$$

式(3-4-11)表示通频带 BW 与 Q 成反比, Q 越大带宽 BW 越小,幅频曲线在谐振频率 ω_0 附近的形状越尖锐,网络的选频性越好,可见, Q 值的大小可以体现通带的**品质**,因此,称 Q 为**品质因数(Quality Factor)**。由定义式(3-4-8)可知,网络的损耗 R 与 Q 成反比, R 越小 Q 越大。事实上,在谐振时,网络中的储能在电容和电感之间存储交换,并不和源之间有往返交换。网络的选频**品质**是由网络在一个周期内的最大储能和损耗之比体现出来的,因此,**品质因数**的严格定义为

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{\text{网络存储的能量峰值}}{\text{一个周期内网络消耗的能量}} \\ &= 2\pi \frac{\text{谐振时网络的储能}}{\text{谐振时一个周期内网络的耗能}} \end{aligned} \quad (3-4-12)$$

由式(3-4-12)可以推导并获得式(3-4-8)和式(3-4-11),但对于更复杂的 RLC 电路,式(3-4-11)更偏于由幅频曲线而工程地获取,它与式(3-4-12)的准确计算结果通常是近似相等的。

RLC 串联网络在发生谐振($\omega = \omega_0$)时,网络的阻抗呈纯电阻性,并达到最大值 R ,此时,电容电压和电感电压都是信号源电压幅值的 Q 倍,因此,串联谐振也称为**电压谐振**。谐振网络的这种特性在无线电接收机中得到广泛的应用。谐振时各电压电流相量的相位关系如图 3-4-5(d)所示。

2. RLC 并联谐振电路(RLC Parallel Resonance)

如图 3-4-6(a)所示的 RLC 并联网络,输入为理想电流源,输出为流过电导 G 的电流。该网络可以利用对偶原理由前面的 RLC 串联谐振电路得出转移电流比。

$$N(j\omega) = K_I(j\omega) = \frac{I_R(j\omega)}{I_s(j\omega)} = \frac{G}{G + j(\omega C - 1/\omega L)} \quad (3-4-13)$$

取 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $Q = \omega_0 C/G = 1/\omega_0 GL$, 则

$$N(j\omega) = K_I(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = A(\omega) / \varphi(\omega) \quad (3-4-14)$$

其中, $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ 为幅频特性; $\varphi(\omega) = -\arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$ 为相频特

性。特性曲线分别示于图 3-4-6(b)和图 3-4-6(c)。谐振时各电压电流相量的相位关系示于图 3-4-6(d)。

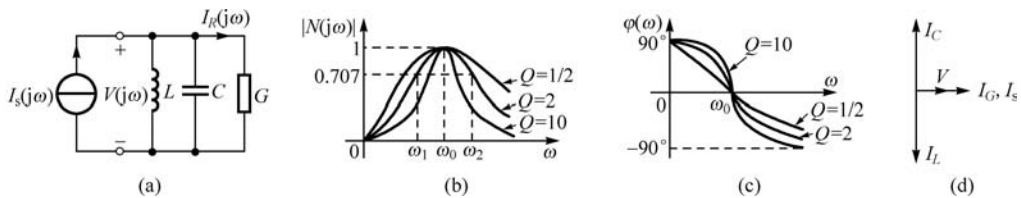


图 3-4-6

3. RC 选频电路

除了利用 RC 网络的幅频特性实现选取或抑制某一频段的滤波网络之外,也可以利用它的相频特性,对某一频率的信号产生指定的相移,从而选出所需频率的信号。这样的选频网络多出现在需要正反馈(相移 0°)或负反馈(相移 180°)的放大和振荡电路里。相比于 RLC 谐振电路,RC 选频网络的一个优点,是可以不使用集成电路里相对难实现的电感器件。以下简单介绍最常见的 RC 选频网络:倒 L 形网络(Γ -type Network, Γ -Network)和文氏电桥(Wien Bridge Circuit)。

倒 L 形 RC 电路由 RC 串联和 RC 并联电路组成如图 3-4-7(a)所示,该网络的电压传递函数可以表示为

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{3 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (3-4-15)$$

其中, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ 为自然频率; $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ 为幅频特性; $\varphi(\omega) =$

$-\arctan \frac{1}{3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$ 为相频特性,特性曲线分别示于图 3-4-7(b)和图 3-4-7(c)。观察网络的频率特性曲线,易见它是一个带通滤波器。当 $\omega = \omega_0$ 时,电路的电压传递幅值最大,且相移为零,选频特性最好。

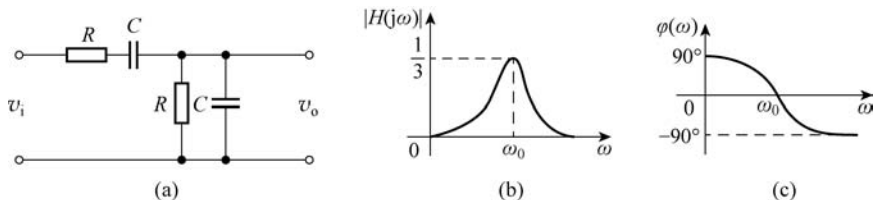


图 3-4-7

这样的选频电路的幅频特性并非最佳,因为即使是在最大值输出时,它的幅值也只有输入信号幅值的 $1/3$ 。如果用它来实现一个正弦振荡器,则一定要有一个电压放大倍数大于 3 的放大电路来帮助起振。然而,从相频特性来看,在 ω_0 附近信号通过网络所产生的相移对频率比较“敏感”。所以,这样的电路作为选频网络,主要是利用它这一敏感的相频特性。

倒 L 形 RC 电路与电阻元件组成电桥即为著名的文氏桥,可以应用在比较“敏感”的电桥测量上如图 3-4-8(a)所示(RC 并联支路也可以是 RC 串联),用来确定一个未知的电阻或电容。如上分析,使电桥达到平衡的条件是 $2R_1 = R_2$, $\omega_0 = 1/RC$ 。此时在 ω_0 附近有 $v_{BE} = v_i/3$, $v_d = v_{BA} = 0$,且相位相同。

文氏桥的典型应用是作为 RC 振荡器的正反馈选频网络,如图 3-4-8(b)所示,其中理想运算放大器满足“虚短”“虚断”(见本书第 10 章), $v_a \approx v_b$,在 ω_0 附近有 $v_b = v_o/3$,电桥的等效电路如图 3-4-8(c)所示。振荡器达到起振的条件是 $2R_1 = R_2$ 。

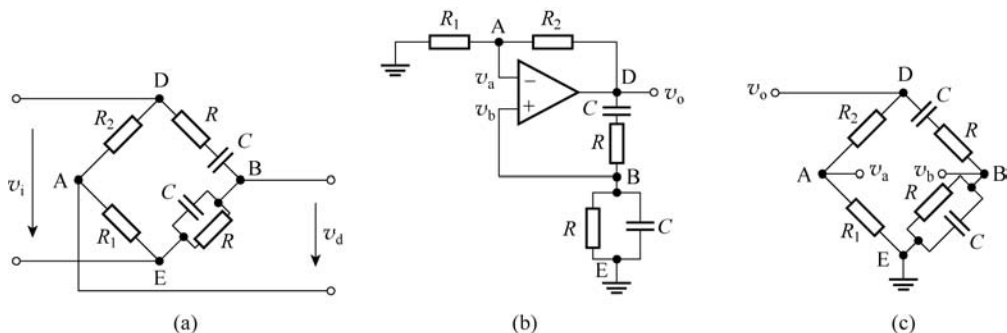


图 3-4-8

总结与回顾

Summary and Review

本章希望同学们带着以下的思考去回顾和总结:

- ♣ 总结正弦稳态电路的复数分析方法,理解复数法的实质,在什么条件下常参量线性电路可用复数解法?
- ♣ 为什么要学习从频域的角度分析电路?
- ♣ 为什么要学习网络函数,如何利用网络函数判断电路是否稳定?扼要说明线性常参量电路的微分方程的特征根与电路稳定性的关系。
- ♣ 何谓滤波器?滤波器是否是稳定的电路?是否可以是不稳定的电路?

学生研讨题选

Topics of Discussion

- 如何直观判断电路是否稳定?如何判断含负阻电路是否稳定?
- 阐述正弦稳态分析方法,研讨复数解法的适用范围和优缺点。

- 一阶滤波器响应的特点,能否用一阶滤波器产生带通滤波器?
- 阶跃信号、正弦信号驱动的 RLC 电路响应研究与应用。
- LC 谐振电路的应用举例。
- 研讨品质因数 Q 的多种定义(能量定义和带宽定义等)之间的关联。
- 通常根据电路求传递函数,能否反过来根据传递函数画出电路图? 如果能,电路是唯一的吗? 是否有通用的方法?
- 试从数学和物理两个角度分析,为何传递函数的极点对应网络的固有频率?

练习与习题

Exercises and Problems

3-1** 如题图 3-1 所示为含负阻($-\eta R$)的 RC 电路。

(1) 求电容上电压 $V_o(j\omega)$ 相对于源电压 $V_s(j\omega)$ 的传递函数; $\left(\frac{1}{(2\eta-1)/\eta+j\omega RC}\right)$

(2) η 在什么范围内电路是稳定的? 若电路是稳定的,其通频带在什么频域内? ($\eta > 1/2, (2\eta-1)/\eta RC$)

The RC circuit contains a negative resistor of $-\eta R$ in Fig. 3-1.

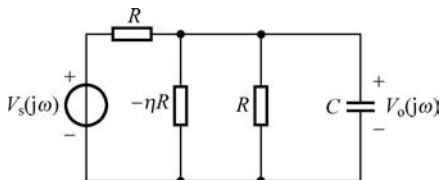
(1) Determine the transfer function $V_o(j\omega)/V_s(j\omega)$;

(2) If the circuit is steady, determine the range of η and the circuit's pass-band.

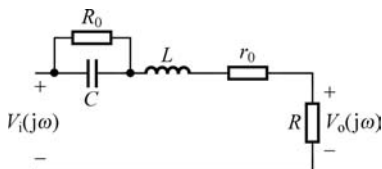
3-2*** 求题图 3-2 电路的电压传递函数 $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, 并定性画出其幅频响应特性曲线。如果电路可以发生谐振,分别计算其谐振频率 ω_0 和带宽 BW 。

$\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1+\frac{R+r_0}{R_0}}, \frac{R+r_0}{L} + \frac{1}{CR_0}\right)$ (提示: 可以近似认为 $\omega_0 \gg \frac{1}{CR_0}$) (2013 年秋试题)

Determine the voltage transfer function $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$ in Fig. 3-2, and draw its amplitude-frequency response. If resonance could happen in this circuit, determine the resonant frequency ω_0 and the bandwidth BW .



题图(Fig.) 3-1



题图(Fig.) 3-2

3-3* 题图 3-3 是电压源激励的 RL 电路。

(1) 求该电路电感上的电压 $V_o(j\omega)$; $\left(\frac{1}{1-jR/\omega L}, (R/L, \infty)\right)$

(2) 求以电感电压、电流为输出信号的传递函数和通频带。 $\left(\frac{1}{R+j\omega L}, (0, R/L)\right)$

Fig. 3-3 shows a RL circuit driven by a voltage source.

(1) Determine the voltage $V_o(j\omega)$ across the inductor;

(2) Let the voltage and current of the inductor be the output signal respectively.

Determine the transfer functions and the pass-bands.

3-4* 题图 3-4 是电流源激励的 RC 电路, G 和 C 为正参量。

(1) 若以电容上的电压 $V_o(j\omega)$ 为输出信号, 求它的传递函数与通频带;

$\left(\frac{1}{G+j\omega C}, (0, G/C)\right)$

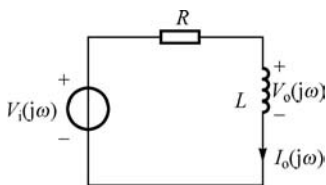
(2) 若以通过电容的电流 $I_o(j\omega)$ 为输出信号, 求它的传递函数与通频带。

$\left(\frac{1}{1-jG/\omega C}, (G/C, \infty)\right)$

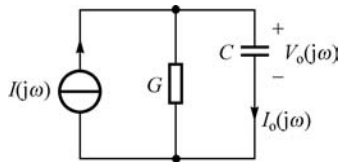
Fig. 3-4 shows a RC circuit driven by a current source, and G and C are positive parameters.

(1) Let the voltage across the capacitor $V_o(j\omega)$ be the output signal, determine the transfer function and the pass-band;

(2) Let the current through the capacitor $I_o(j\omega)$ be the output signal, determine the transfer function and the pass-band.



题图 (Fig.) 3-3



题图 (Fig.) 3-4

3-5** 如题图 3-5 所示的 RC 选频电路, 求在什么频率下 $V_o(j\omega)$ 和 $V_i(j\omega)$ 同相位? 此频率下 $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ 的比值是多大? $(1/RC, 1/3)$

Fig. 3-5 shows a RC frequency-selecting circuit. If $V_o(j\omega)$ and $V_i(j\omega)$ are in phase, determine the frequency and the value of $V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$.

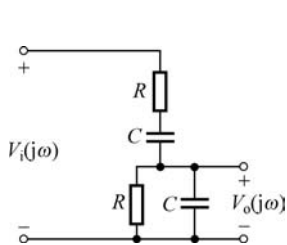
3-6** 单口电路参数如题图 3-6 所示。

(1) 求电源供给该单口电路的平均功率 P 、无功功率 Q 和视在功率 S ; (240 W, -320 var, 400 VA);

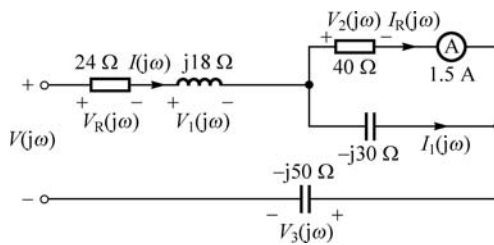
(2) 做出各支路电流电压的相量图。

A circuit is shown in Fig. 3-6.

- (1) Determine the circuit's average power P , reactive power Q and apparent power S ;
- (2) Sketch each branch's phasor diagram of current and voltage.

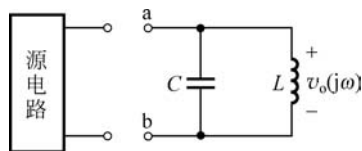


题图 (Fig.) 3-5



题图 (Fig.) 3-6

3-7*** 题图 3-7 的电路中, $C = 250 \text{ pF}$, $L = 470 \text{ } \mu\text{H}$, $Q_L = 30$, $R_0 = 30 \text{ k}\Omega$ 是信号源的内阻。分析有耗信号源在 ab 点加入后, 谐振电路 Q 值的变化。

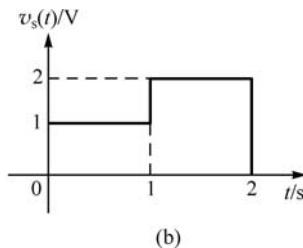
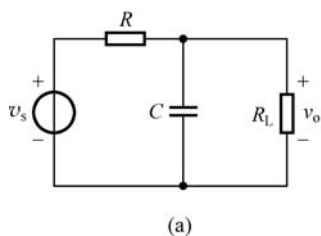


题图 (Fig.) 3-7

- (1) 求谐振频率; (465 kHz)
- (2) 求信号源接入后电路的 Q 值。(提示: 电路结构不同, 可能导致 Q 值不同, 诺顿结构 12.7, 戴维南结构 17.3)

In Fig. 3-7, let $C = 250 \text{ pF}$, $L = 470 \text{ } \mu\text{H}$ and $Q_L = 30$. The equivalent internal resistance $R_0 = 30 \text{ k}\Omega$. Determine the resonance frequency and Q factor.

- 3-8** (2002 年冬试题) 电路题图 3-8(a) 中的电压源的波形如题图 3-8(b) 所示。
- (1) 求响应 $v_o(t)$;
 - (2) 求传递函数 $H(j\omega) = V_o(j\omega)/V_s(j\omega)$ 及其通频带, 并定性画出频响曲线 (最大值、最小值、3 dB 点);
 - (3) 指出该网络是何种类型的滤波器? 若要增加带宽应如何改变元件参数? ($(1+R/R_L)^{-1}$, 0 , $\omega_c = (1/R + 1/R_L)/C$, 低通)



题图 (Fig.) 3-8

The waveform of the voltage source in Fig. 3-8(a) is shown in Fig. 3-8(b).

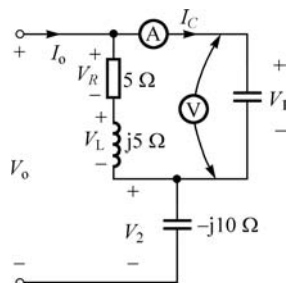
(1) Determine the output voltage $v_o(t)$;

(2) Determine the transfer function $H(j\omega) = V_o/V_s$ and the pass-band. Sketch the frequency response including maximum point, minimum point and 3 dB point;

(3) Indicate what kind of filter it is. Analyze how to increase the bandwidth by changing the parameters of devised.

3-9*** 已知单口电路参数如题图 3-9 所示, 安培计测得电流为 10 A, 伏特计测得电压为 100 V。试利用相量性质, 用几何作图的方法, 通过绘制各元件电压电流相量图, 获得各电压电流相量。

The display of the amperemeter in Fig. 3-9 is 10 A, and the display of the voltmeter is 100 V. By using geometric construction, draw the voltage and current phasor diagrams of the elements in the figure, and then determine the voltage and current phasor.



题图(Fig.) 3-9

3-10** 如题图 3-10 所示为并联谐振电路。证明:

(1) 在谐振时通过电导的电流等于电流源的源电流;

(2) 在谐振时通过电感或电容上的电流等于电流源的源电流的 Q 倍。

Fig. 3-10 shows a parallel resonant circuit. Prove:

(1) When resonance happens, the current of the inductor equals to the current of the current source;

(2) When resonance happens, the current of the capacitor or the current of the inductor is Q times higher than the current of the current source.

3-11** 如题图 3-11 所示为串联谐振电路。证明:

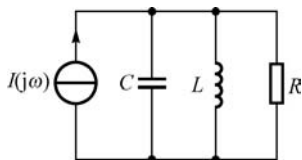
(1) 在谐振时, 电阻上的电压等于电压源的源电压;

(2) 在谐振时, 电感或电容上的电压等于电压源的源电压的 Q 倍。

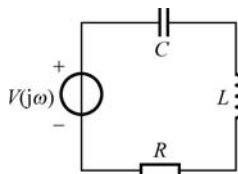
Fig. 3-11 shows a serial resonant circuit. Prove:

(1) When resonance happens, the voltage of the resistor equals to the voltage of the voltage source;

(2) When resonance happens, the voltage of the capacitor or the voltage of the inductor is Q times higher than the voltage of the voltage source.



题图(Fig.) 3-10



题图(Fig.) 3-11

3-12** 题图 3-12 是受控源与 R_L 组成的电路,以 R_L 上的电压为输出信号, C_0 是分布电容。已知 $R_L=1.5\text{ k}\Omega$, $C_0=10\text{ pF}$ 。

(1) 求该电路的通频带; $(0,1/R_L C_0)$

(2) 若要求在通频带内有较平坦的幅频特性,可以采取哪些改进的措施?

The circuit in Fig. 3-12 is composed of a controlled source and a load resistor R_L . The output signal is the voltage across R_L , and C_0 is the distributed capacitor. Let $R_L=1.5\text{ k}\Omega$, $C_0=10\text{ pF}$.

(1) Determine the pass-band of the circuit;

(2) In order to obtain a flat amplitude-frequency response curve, what measures can be taken?

3-13*** 选频电路如题图 3-13 所示,响应为流过 R_2 电阻的电流。

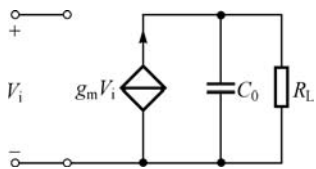
(1) 求传递函数 $H(j\omega)=I_R(j\omega)/I_s(j\omega)$;

(2) 当 $i_s(t)=[5+10\sqrt{2}\cos t+\sqrt{2}\cos(2t)]\text{ A}$ 时,求电流源发出的平均功率。(127 W)(2007 年秋试题)

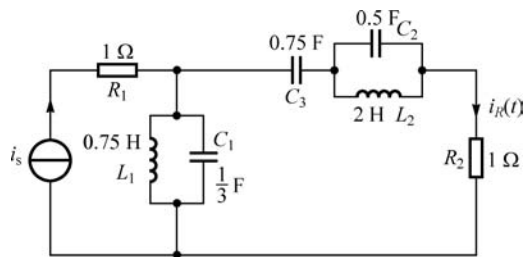
A frequency selective circuit is shown in Fig. 3-13. The response is the current through R_2 .

(1) Determine the transfer function $H(j\omega)=I_R(j\omega)/I_s(j\omega)$;

(2) When $i_s(t)=[5+10\sqrt{2}\cos t+\sqrt{2}\cos(2t)]\text{ A}$, determine the average power of the current source.



题图(Fig.) 3-12

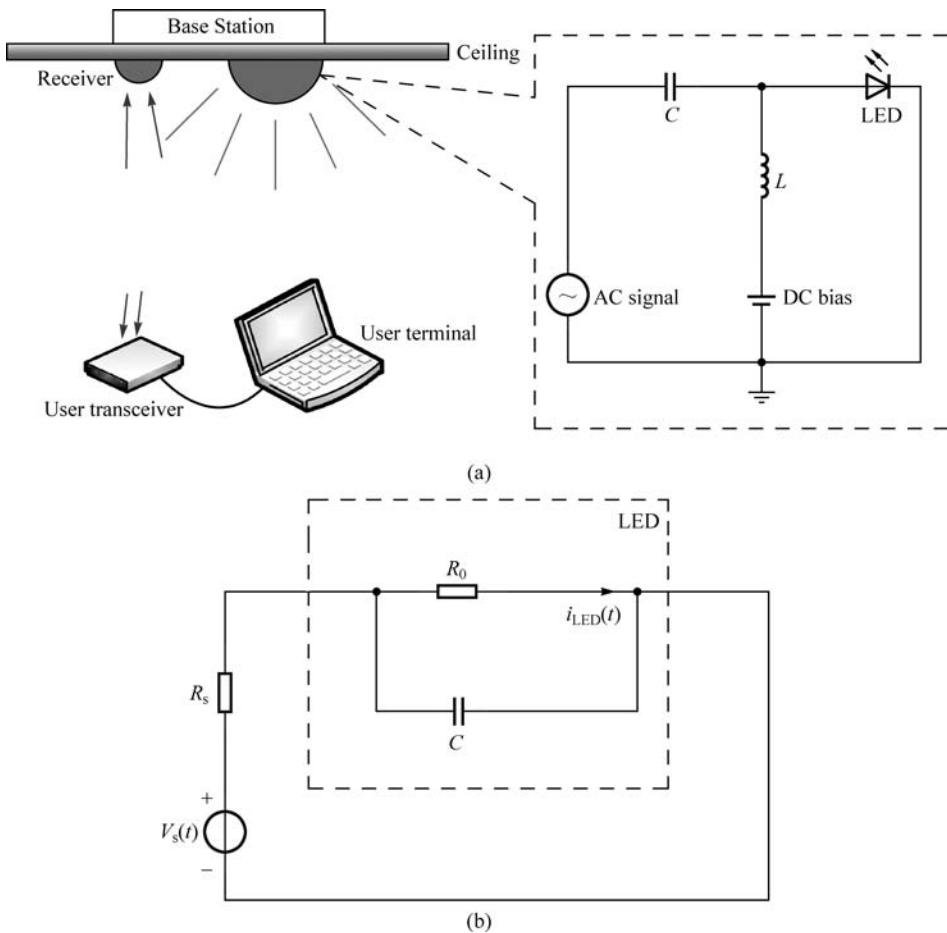


题图(Fig.) 3-13

3-14*** 室内可见光通信(Visible Light Communication, VLC)的典型系统如题图 3-14(a)所示,其中直流偏置使发光二极管(LED)在正常工作点处工作,交流信号通过改变 LED 的发光强度而传递信息。由于信号使 LED 的明暗变化很快,人眼完全感觉不到,因此 VLC 系统可以在满足照明需求的同时实现高速通信,并具有通信速率高、保密性好、无电磁干扰等优势。正常工作 LED 电路的简谐小信号模型如题图 3-14(b)所示,其中 R_0 为 LED 的内阻, C 为 LED 的结电容。若以 $V_s(j\omega)$ 为激励, $I_{LED}(j\omega)$ 为响应,试推导传递函数 $H(j\omega)=I_{LED}(j\omega)/V_s(j\omega)$,并分析限制 LED 调制带宽的因素及可能

的解决方法。(提供: 陈特)

Fig. 3-14(a) shows a typical Visible Light Communication (VLC) system in which the DC bias provides a working point for the LED, and the AC signal is transmitted by altering the luminance of the LED light. Human eyes cannot feel the flicker due to its high frequency, so the VLC system can realize illumination and high-data-rate communication simultaneously. VLC has drawn extensive interest because of its advantages of high transmission rate, enhanced security and higher immunity to electromagnetic interference. The limited modulation bandwidth of the LED (ranging from several MHz to dozens of MHz) is one of the challenges for VLC. Fig. 3-14(b) shows the small-signal model of the LED driving circuit in which R_0 is the internal resistance of the LED, and C is the junction capacitance of the



题图 (Fig.) 3-14

LED. Let $V_s(j\omega)$ be the input signal, and $I_{LED}(j\omega)$ be the response. Determine the transfer function $H(j\omega) = I_{LED}(j\omega)/V_s(j\omega)$, analyze the cause of the limited bandwidth, and offer the potential solution.

3-15* 题图 3-15 中, 电路已知 $R_s = 4 \Omega, R_C = 4 \Omega, C = 2 \text{ F}$ 。

(1) 求电压传递函数 $H(j\omega) = V_C(j\omega)/V_s(j\omega)$, 定性画出幅频特性曲线, 给出通带范围; $\left(\frac{1}{2+j8\omega}\right)$

(2) 若 $v_s(t) = 10\cos(t) + 100\sin(100t) \text{ V}$, 求响应 $v_C(t)$ 。 $\left(\frac{5}{\sqrt{17}}\cos(t - \arctan 4) + \frac{1}{8}\sin(100t - \arctan 400) \text{ V}\right)$ (2009 年秋试题)

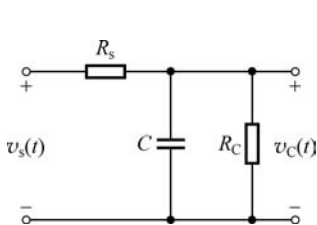
In the circuit shown in Fig. 3-15, $R_s = 4 \Omega, R_C = 4 \Omega$ and $C = 2 \text{ F}$.

(1) Determine the transfer function $H(j\omega) = V_C(j\omega)/V_s(j\omega)$, sketch the amplitude-frequency response curve and determine the pass-band.

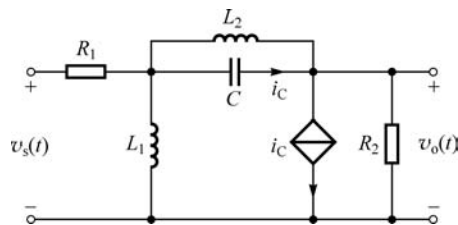
(2) If $v_s(t) = 10\cos(t) + 100\sin(100t) \text{ V}$, determine $v_C(t)$.

3-16** 求题图 3-16 的选频电路的传递函数 $H(j\omega) = V_o(j\omega)/V_s(j\omega)$, 若 $R_1 = R_2 = 100 \Omega, L_1 = L_2 = 1 \text{ H}, C = 100 \mu\text{F}, v_s(t) = 100\cos(100t) \text{ V}$, 求 R_2 消耗的功率。(12.5 W) (2010 年秋试题)

Fig. 3-16 shows a frequency selecting circuit. Determine the transfer function $H(j\omega) = V_o(j\omega)/V_s(j\omega)$. Let $R_1 = R_2 = 100 \Omega, L_1 = L_2 = 1 \text{ H}, C = 100 \mu\text{F}, v_s(t) = 100\cos(100t) \text{ V}$, determine the power consumption of R_2 .



题图 (Fig.) 3-15



题图 (Fig.) 3-16

3-17** 题图 3-17 的电路:

(1) 求网络函数 $H(j\omega) = I(j\omega)/V_i(j\omega)$, 并计算当元件参数满足什么关系时, 网络函数与频率无关; $(CR^2 = L)$

(2) 若 $R = 1 \Omega, L = 1 \text{ H}, C = 2 \text{ F}, v_i(t) = 10 + 5\cos(t) \text{ V}$ 时, 计算响应电流 $i(t)$ 。 $\left(10 + 5\sqrt{2}\cos\left(t - \arctan \frac{1}{7}\right) \text{ A}\right)$ (2011 年秋试题)

A circuit is shown in Fig. 3-17.

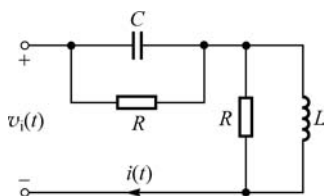
(1) Determine the transfer function $H(j\omega) = I(j\omega)/V_i(j\omega)$. If the transfer

function is frequency independent, determine the relationships of the component parameters;

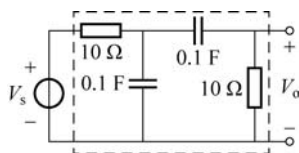
(2) Let $R=1\ \Omega, L=1\ \text{H}, C=2\ \text{F}, v_1(t)=10+5\cos(t)\ \text{V}$, determine $i(t)$.

3-18** 题图 3-18 所示电路, (1)求传递函数 $H(j\omega)=V_o(j\omega)/V_s(j\omega)$; (2)定性画出频率响应特性曲线, 指出滤波特性。 $\left(\frac{1}{3+j\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)}, \text{BPF}\right)$ (2021 年秋试题)

The circuit is shown in Fig. 3-18. (1) Find $H(j\omega)=V_o(j\omega)/V_s(j\omega)$. (2) Draw the frequency-response curve qualitatively, and point out the filtering characteristic.



题图 (Fig.) 3-17



题图 (Fig.) 3-18

3-19*** 数字信号经过数模转换器(D/A)成为接近于模拟信号的分段线性信号, 如题图 3-19 系统框图所示, 试用无源器件 (不少于 2 个) 定性设计一个平滑电路, 使输出信号平滑连续, 给出设计思路, 并指出滤波特性。(2021 年秋试题)



题图 (Fig.) 3-19

Digital signal is converted into piecewise-linear signal similar to analog signal through a digital-to-analog converter (D/A), as shown in the block diagram in Fig. 3-19. Using passive devices (no less than two), qualitatively design a smoothing circuit to make the output signal smooth and continuous, and point out the filter characteristics.

3-20*** 分析由电流源激励的 RLC 并联电路的响应特性, 试选择合适的输出抽头, 分别构成 LPF、HPF、BPF 和 BSF。同理, 分析选择由电压源激励的 RLC 串联电路。

Analyze the frequency responses of the RLC parallel and series circuit respectively. Select the appropriate positions of the output plugs to construct filters of LPF, HPF, BPF, and BSF respectively.