第三届全国大学生数学竞赛初赛(数学类,2011 年)

试　　题

一(15 分)　已知四点$(1,2,7)$,$(4,3,3)$,$(5,-1,6)$,$(\sqrt{7},\sqrt{7},0)$。试求过这四点的球面方程。

二(10 分)　设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 为$[0,1]$上的非负连续函数,求证:存在 $\xi\in[0,1]$,使得

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x。$$

三(15 分)　设 $V=F^n$ 是数域 F 上的 n 维列空间,$\sigma:F^n\to F^n$ 是一个线性变换。若

$$\forall \boldsymbol{A}\in M_n(F),\quad \sigma(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{A}\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\quad \forall\boldsymbol{\alpha}\in V,$$

其中 $M_n(F)$表示数域 F 上的 n 阶方阵全体。证明:$\sigma=\lambda\cdot \mathrm{id}_{F^n}$,其中 λ 是 F 中的某个数,id_{F^n} 表示恒等变换。

四(10 分)　对于$\triangle ABC$,求 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 的最大值。

五(15 分)　对于任何实数 α,求证存在取值于$\{-1,1\}$的数列 $\{a_n\}_{n\geqslant1}$满足

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\right)=\alpha。$$

六(20 分)　设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 n 阶方阵。证明:$\boldsymbol{A}$ 在数域 F 上相似于$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是幂零矩阵,即存在 m 使得 $\boldsymbol{C}^m=\boldsymbol{0}$。

七(15 分)　设 $F(x)$是$[0,+\infty)$上的单调递减函数,$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}F(t)\sin\frac{t}{n}\mathrm{d}t=0。$$

证明:(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}xF(x)=0$;(2) $\lim\limits_{x\to0}\int_0^{+\infty}F(t)\sin(xt)\mathrm{d}t=0$。

参 考 解 答

一　设所求球面的球心为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,则有

$$(\bar{x}-1)^2+(\bar{y}-2)^2+(\bar{z}-7)^2=(\bar{x}-4)^2+(\bar{y}-3)^2+(\bar{z}-3)^2$$
$$=(\bar{x}-5)^2+(\bar{y}+1)^2+(\bar{z}-6)^2=(\bar{x}-\sqrt{7})^2+(\bar{y}-\sqrt{7})^2+\bar{z}^2,$$

即 $$\begin{cases}3\bar{x}+\bar{y}-4\bar{z}=-10,\\ 4\bar{x}-3\bar{y}-\bar{z}=4,\\ (\sqrt{7}-1)\bar{x}+(\sqrt{7}-2)\bar{y}-7\bar{z}=-20。\end{cases}\Rightarrow(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(1,-1,3)。$$

而 $(\bar{x}-1)^2+(\bar{y}-2)^2+(\bar{z}-7)^2=25$,于是所求球面方程为

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25。$$

二　记 $a_k=\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x$，$k=1,2,\cdots,n$。当某个 $a_k=0$ 时，结论是平凡的。

下面设 $a_k>0(k=1,2,\cdots,n)$，于是有

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k}\mathrm{d}x=1。$$

由此立即可得存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(\xi)}{a_k}}\leqslant 1$。结论得证。

三　设 σ 在 F^n 的标准基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{B\alpha},\quad \forall\,\boldsymbol{\alpha}\in F^n。$$

由条件：$\forall\,\boldsymbol{A}\in M_n(F)$，$\sigma(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{A}\sigma(\boldsymbol{\alpha})$，$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in F^n$，有 $\boldsymbol{BA\alpha}=\boldsymbol{AB\alpha}$。故 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，$\forall\,\boldsymbol{A}\in M_n(F)$。

设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，取 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,c,1,\cdots,1)$，其中 $c\neq 0,1$，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 可得 $b_{ij}=0$，$\forall\, i\neq j$。又取

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{E}_{ii}-\boldsymbol{E}_{jj}+\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji},$$

这里 $\boldsymbol{E}_{st}$ 是 (s,t) 位置为 1，其他位置为 0 的矩阵，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 可得 $a_{ii}=a_{jj}(\forall\, i,j)$。取 $\lambda=a_{11}$，故 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}_n$，从而 $\sigma=\lambda\cdot\mathrm{id}_{F^n}$。

四　三角形的三个角 A,B,C 的取值范围为

$$(A,B,C)\in D\equiv\{(\alpha,\beta,\gamma)\,|\,\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha>0,\beta>0,\gamma>0\}。$$

首先考虑 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 在 D 的闭包

$$E=\{(\alpha,\beta,\gamma)\,|\,\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0,\gamma\geqslant 0\}$$

上的最大值。有

$$\begin{aligned}
&\max_{(A,B,C)\in E}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)\\
&=\max_{\substack{A+C\leqslant\pi\\ A,C\geqslant 0}}(3\sin A+4\sin(A+C)+18\sin C)\\
&=\max_{0\leqslant C\leqslant\pi}\ \max_{0\leqslant A\leqslant\pi-C}((3+4\cos C)\sin A+4\sin C\cos A+18\sin C)\\
&=\max_{0\leqslant C\leqslant\pi}(\sqrt{(3+4\cos C)^2+16\sin^2 C}+18\sin C)\\
&=\max_{0\leqslant C\leqslant\pi}(\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C)。
\end{aligned}$$

考虑 $f(C)=\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C$，$0\leqslant C\leqslant\pi$。容易知道

$$f(C)\geqslant f(\pi-C),\quad \forall\, C\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]。$$

直接计算导数，有

$$f'(C)=18\cos C-\frac{12\sin C}{\sqrt{25+24\cos C}}。$$

令 $f'(C)=0$，即 $(8\cos C-1)(27\cos^2 C+32\cos C+4)=0$。从而它在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 范围内的解为 $C=\arccos\frac{1}{8}$，于是

$$\max_{0\leqslant C\leqslant\pi}f(C)=\max_{0\leqslant C\leqslant\pi/2}f(C)=\max\left\{f\left(\arccos\frac{1}{8}\right),f(0),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$=\max\left\{\frac{35\sqrt{7}}{4},7,23\right\}=\frac{35\sqrt{7}}{4}。$$

由此可得

$$\max_{(A,B,C)\in E}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)=\frac{35\sqrt{7}}{4}。$$

另一方面,不难看到 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 在 E 的边界上(A,B,C 之一为 0)的最大值为 22。所以所求最大值为 $\frac{35\sqrt{7}}{4}$。

五　由泰勒展开式,$\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,存在 $\xi\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$使得

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}},$$

从而 $\left|\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)\right|\leqslant x^2,\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$。于是当 $n\geqslant2$ 时,不管怎么选取只取值 ±1 的数列$\{a_n\}_{n\geqslant1}$均有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}\right|=\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\sqrt{1+\frac{a_k}{n}}-\left(1+\frac{a_k}{2n}\right)\right|$$
$$\leqslant\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{n}\right)^2\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}。$$

可以有很多种方法选取只取值为±1 的数列$\{a_n\}_{n\geqslant1}$使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}=\alpha$。此时成立

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\right)=\alpha。$$

例如,可以按以下方式选取:取 $a_1=1$,依次定义

$$a_{n+1}=\begin{cases}1, & \sum\limits_{k=1}^{n}a_k<2\alpha\sqrt{n},\\ -1, & \sum\limits_{k=1}^{n}a_k\geqslant2\alpha\sqrt{n}。\end{cases}$$

记 $y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,n=1,2,\cdots$,则有 $-\sqrt{n}\leqslant y_n\leqslant\sqrt{n}$。若 $y_n>2\alpha$,则有

$$y_{n+1}-y_n=\frac{y_n\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}-y_n=-\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})},$$

这时$-\frac{2}{\sqrt{n+1}}<y_{n+1}-y_n<0$;而当 $y_n<2\alpha$ 时,则有

$$y_{n+1}-y_n=\frac{y_n\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}-y_n=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})},$$

这时 $0<y_{n+1}-y_n<\dfrac{2}{\sqrt{n+1}}$；于是当 $y_{n+1}-2\alpha, y_n-2\alpha$ 同号时，有

$$|y_{n+1}-2\alpha|\leqslant|y_n-2\alpha|;$$

当 $y_{n+1}-2\alpha, y_n-2\alpha$ 异号时，有

$$|y_{n+1}-2\alpha|\leqslant|y_{n+1}-y_n|\leqslant\frac{2}{\sqrt{n+1}}。$$

一般地有 $|y_{n+1}-2\alpha|\leqslant\max\left(|y_n-2\alpha|,\dfrac{2}{\sqrt{n+1}}\right)$。

注意到对任何 $N>0$，总有 $m\geqslant N$，使得 $y_{m+1}-2\alpha, y_m-2\alpha$ 异号。由上面的讨论可以得到

$$|y_k-2\alpha|\leqslant\frac{2}{\sqrt{m+1}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{N+1}},\quad k=m+1,m+2,\cdots$$

因此，有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=2\alpha$。

六　设 V 是 F 上 n 维线性空间，σ 是 V 上的线性变换，它在 V 的一组基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$。下面证明存在 σ-不变子空间 V_1, V_2 满足 $V=V_1\oplus V_2$，且 $\sigma|_{V_1}$ 是同构映射，$\sigma|_{V_2}$ 是幂零变换。

首先有子空间升链：$\ker\sigma\subseteq\ker\sigma^2\subseteq\cdots\subseteq\ker\sigma^k\subseteq\cdots$，从而存在正整数 m 使得 $\ker\sigma^m=\ker\sigma^{m+i}(i=1,2,\cdots)$。进而有 $\ker\sigma^m=\ker\sigma^{2m}$。

下面证明 $V=\ker\sigma^m\oplus\operatorname{Im}\sigma^m$。

$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\ker\sigma^m\cap\operatorname{Im}\sigma^m$，由 $\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Im}\sigma^m$，存在 $\boldsymbol{\beta}\in V$，使得 $\boldsymbol{\alpha}=\sigma^m(\boldsymbol{\beta})$。由此 $\boldsymbol{0}=\sigma^m(\boldsymbol{\alpha})=\sigma^{2m}(\boldsymbol{\beta})$，所以 $\boldsymbol{\beta}\in\ker\sigma^{2m}$，从而 $\boldsymbol{\beta}\in\ker\sigma^m=\ker\sigma^{2m}$。故

$$\boldsymbol{\alpha}=\sigma^m(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{0},\quad \ker\sigma^m\cap\operatorname{Im}\sigma^m=\{\boldsymbol{0}\},$$

从而 $V=\ker\sigma^m\oplus\operatorname{Im}\sigma^m$。

由 $\sigma(\ker\sigma^m)\subseteq\ker\sigma^m$，$\sigma(\operatorname{Im}\sigma^m)\subseteq\operatorname{Im}\sigma^m$，知 $\ker\sigma^m$，$\operatorname{Im}\sigma^m$ 是 σ-不变子空间。又由 $\sigma^m(\ker\sigma^m)=\{\boldsymbol{0}\}$ 知 $\sigma|_{\ker\sigma^m}$ 是幂零变换。由 $\sigma(\operatorname{Im}\sigma^m)\subseteq\operatorname{Im}\sigma^m$ 知 $\sigma|_{\operatorname{Im}\sigma^m}$ 是满线性变换，从而可逆。

从 $V_1=\operatorname{Im}\sigma^m$，$V_2=\ker\sigma^m$ 中各找一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$；$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，合并成 V 的一组基，σ 在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $\sigma|_{V_1}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 下的矩阵，从而可逆；$\boldsymbol{C}$ 是 $\sigma|_{V_2}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 下的矩阵，是幂零矩阵。从而 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是幂零矩阵。

注　如果视 F 为复数域直接用若尔当标准形证明，证明正确可给 10 分：

存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{J}(\lambda_1,n_1),\cdots,\boldsymbol{J}(\lambda_s,n_s),\boldsymbol{J}(0,m_1),\cdots,\boldsymbol{J}(0,m_t)),$$

其中 $\boldsymbol{J}(\lambda_i,n_i)$ 是特征值为 λ_i 的阶为 n_i 的若尔当块，$\lambda_i\neq0$；$\boldsymbol{J}(0,m_j)$ 是特征值为 0 的阶为 m_j 的若尔当块，令

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{J}(\lambda_1,n_1),\cdots,\boldsymbol{J}(\lambda_s,n_s)),\quad \boldsymbol{C}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{J}(0,m_1),\cdots,\boldsymbol{J}(0,m_t)),$$

则 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为幂零矩阵，$\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$。

七　首先对于任何 $x\in\mathbb{R}$,不难由关于无穷积分收敛性的狄利克雷判别法得到 $\int_0^{+\infty}F(t)\sin(xt)\mathrm{d}t$ 收敛,记

$$f(x)=\int_0^{+\infty}F(t)\sin(xt)\mathrm{d}t,\quad \forall x\in\mathbb{R}\text{。}$$

由于 F 单调下降,则

$$\begin{aligned}&\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi}F(nt)\sin t\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi}(F(2nk\pi+nt)-F(2nk\pi+2n\pi-nt))\sin t\,\mathrm{d}t\geqslant 0,\quad k=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{n}\right)&=\int_0^{+\infty}F(t)\sin\frac{t}{n}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}nF(nt)\sin t\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi}nF(nt)\sin t\,\mathrm{d}t\\&\geqslant\int_0^{2\pi}nF(nt)\sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}n(F(nt)-F(2n\pi-nt))\sin t\,\mathrm{d}t\\&\geqslant\int_0^{\pi/2}n(F(nt)-F(2n\pi-nt))\sin t\,\mathrm{d}t\\&\geqslant n\left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right]\int_0^{\pi/2}\sin t\,\mathrm{d}t\\&=n\left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right]\geqslant 0\text{。}\end{aligned}$$

结合 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right]=0$。

这样,任取 $\delta>0$,有 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时,有

$$n\left|F\left(\frac{n\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right|\leqslant\delta\text{。}$$

从而对于任何 $m>0,n>N$ 有

$$\begin{aligned}0\leqslant nF\left(\frac{n\pi}{2}\right)&\leqslant\sum_{k=0}^{m}n\left|F\left(\frac{3^k n\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3^{k+1}n\pi}{2}\right)\right|+nF\left(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\right)\\&\leqslant\sum_{k=0}^{m}\frac{\delta}{3^k}+nF\left(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\right)\leqslant\frac{3\delta}{2}+nF\left(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\right)\text{。}\end{aligned}$$

上式中令 $m\to\infty$,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 得到

$$0\leqslant nF\left(\frac{n\pi}{2}\right)\leqslant\frac{3\delta}{2},\quad\forall n>N\text{。}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}nF\left(\frac{n\pi}{2}\right)=0$。进一步利用单调性,当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时,有

$$0\leqslant xF(x)\leqslant\pi\left[\frac{2x}{\pi}\right]F\left(\left[\frac{2x}{\pi}\right]\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

其中 $[s]$ 表示实数 s 的整数部分。于是可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}xF(x)=0$。

从而又知 $xF(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界,设上界为 $M\geqslant 0$。$\forall\varepsilon\in(0,\pi)$,当 $x>0$ 时有

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant f(x) &= \int_0^{+\infty} x^{-1} F(x^{-1} t) \sin t \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} x^{-1} t F(x^{-1} t) \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \\
&\leqslant x^{-1} \varepsilon F(x^{-1} \varepsilon) \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t + M\varepsilon, \quad \forall x > 0。
\end{aligned}
$$

于是 $0 \leqslant \overline{\lim_{x \to 0^+}} f(x) \leqslant M\varepsilon$。由 $\varepsilon \in (0, \pi)$ 的任意性，可得 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$。进而因 f 是奇函数推得 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$。