

第一章 极限与连续

【本章导读】

初等数学是用有限的方法研究常量的数学,高等数学是用极限的方法研究函数的数学。因此,极限是高等数学区别于初等数学的一个标志,是初等数学向高等数学飞跃的阶梯。极限的概念以及极限的思想方法将贯穿高等数学的始终。微积分学中的其他几个重要概念,如连续、导数、定积分等,都是用极限表述的,并且微积分学中的很多定理也是用极限方法推导出来的,所以准确理解极限的概念、熟练掌握极限的计算方法是学好高等数学的基础。本章在对函数概念进行复习的基础上介绍数列与函数极限的概念、求极限的方法及函数的连续性。

【学习目标】

- 了解反函数、函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念,左、右极限的概念,无穷小、无穷大的概念,闭区间上连续函数的性质。
- 理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念,函数极限的定义,无穷小的性质,函数在一点连续的概念,初等函数的连续性。
- 掌握复合函数的复合过程和极限四则运算法则。
- 会对无穷小进行比较;用两个重要极限求极限;判断间断点的类型;求连续函数和分段函数的极限;用极限解决经济中的问题。

第一节 初等函数

一、函数的有关概念

1. 函数的定义

定义 1 设 D 是一个数集。如果对属于 D 的每一个数 x ,按照某种对应关系 f ,都有确定的数值 y 和它对应,那么 y 就叫作定义在数集 D 上的 x 的**函数**,记为 $y=f(x)$ 。 x 叫作**自变量**,数集 D 叫作函数的**定义域**,当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值,记为 $f(x_0)$;当 x 取遍 D 中的一切实数值时,与它对应的函数值的集合 $M=\{y|y=f(x), x \in D\}$ 叫作函数值的**值域**。

在函数的定义中,如对于每一个 $x \in D$,都有唯一确定的 y 与它对应,那么这种函数称为单值函数,否则称为多值函数。如无特别说明,本书研究的函数都指单值函数。

2. 函数的定义域

研究函数时,必须注意函数的定义域。在实际问题中,应根据问题的实际意义来确定定义域。对于用数学式子表示的函数,它的定义域可由函数表达式本身来确定,即使运算有意义,一般应考虑以下几点。

- (1) 在分式中,分母不能为 0。
- (2) 在根式中,负数不能开偶次方根。

(3) 在对数式中,真数不能取 0 和负数,底数大于 0 且不等于 1。

(4) 在三角函数式中, $k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 不能取正切, $k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 不能取余切。

(5) 在反三角函数式中,要符合反三角函数的定义域。

(6) 如函数表达式中含有分式、根式、对数式或反三角函数式,则应取各部分定义域的交集。

例 1 求下列函数的定义域。

$$(1) y = \frac{1}{4-x^2} + \sqrt{x+2}; \quad (2) y = \lg \frac{x}{x-1}; \quad (3) y = \arcsin \frac{x+1}{3}; \quad (4) y = \ln \cos x.$$

解 (1) 要使函数有意义,必须满足 $\begin{cases} 4-x^2 \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$, 解得 $x > -2$ 且 $x \neq 2$, 所以函数的定义域为 $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$ 。

(2) 要使函数有意义,必须满足 $\frac{x}{x-1} > 0$, 解得 $x > 1$ 或 $x < 0$, 所以函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 。

(3) 要使函数有意义,必须满足 $-1 \leq \frac{x+1}{3} \leq 1$, 解得 $-3 \leq x+1 \leq 3$, 即 $-4 \leq x \leq 2$, 所以函数的定义域为 $[-4, 2]$ 。

(4) 要使函数有意义,必须满足 $\cos x > 0$, 所以 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 故函数的定义域为

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) (k \in \mathbf{Z})$$

只有当两个函数的定义域和对应关系完全相同时,这两个函数才被认为是相同的。

例如,函数 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ 与 $y = 1$ 是两个相同的函数;函数 $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y = x+1$ 是两个不同的函数。

3. 邻域

定义 2 设 $a \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 即 $U(a, \delta) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$, 称 a 为邻域的中心, δ 为邻域的半径; 将 a 的 δ 邻域中心 a 去掉后得 a 的 δ 空心邻域, 记为 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 即 $\overset{\circ}{U}(a, \delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 。点 a 的 δ 邻域及点 a 的 δ 空心邻域有时又分别简记为 $U(a)$ 与 $\overset{\circ}{U}(a)$ 。

4. 函数的表示法

常用的函数表示法有公式法(解析法)、表格法和图像法三种。有时,会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示。例如,函数

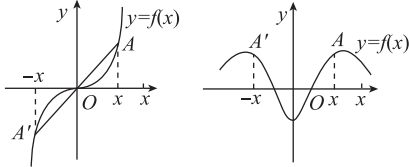
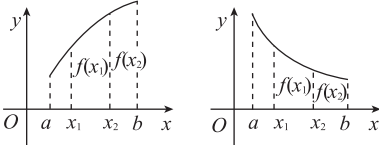
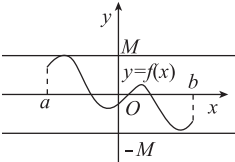
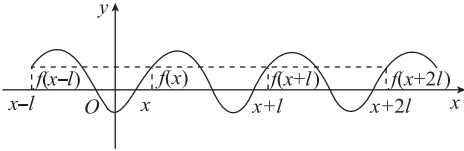
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个函数。在定义域的不同范围内用不同的式子来表示的函数称为分段函数。

5. 函数的特性

函数具有奇偶性、单调性、有界性、周期性等特性，如表 1-1 所示。

表 1-1

特 性	定 义	几 何 特 性
奇偶性	如函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 且对任意的 x , 如果 $f(-x) = -f(x)$, 那么 $f(x)$ 为奇函数; 如果 $f(-x) = f(x)$, 那么 $f(x)$ 为偶函数	 奇函数的图像关于原点对称; 偶函数的图像关于 y 轴对称
单调性	对于任意的 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $x_1 < x_2$, 如果 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加; 如果 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少	 单调增函数的图像沿 x 轴正向上升; 单调减函数的图像沿 x 轴正向下降
有界性	对于任意的 $x \in (a, b)$, 存在 $M > 0$, 有 $ f(x) \leq M$, 那么 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界; 如果这样的数 M 不存在, 那么 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内无界	 区间 (a, b) 内的有界函数的图像全部 夹在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间
周期性	对于任意的 $x \in D$, 存在正数 l , 使 $f(x+l) = f(x)$, 那么 $f(x)$ 为 D 上的周期函数, l 叫作这个函数的周期	 一个以 l 为周期的周期函数的图像在定义域内 每隔长度为 l 的区间上有相同的形状

二、反函数

定义 3 设函数 $y=f(x)$, 它的定义域是 D , 值域为 M , 如果对值域 M 中任意一个值 y , 都能由 $y=f(x)$ 确定 D 中唯一的 x 值与之对应, 由此得到以 y 为自变量的函数叫作 $y=f(x)$ 的**反函数**, 记为 $x=f^{-1}(y)$, $y \in M$ 。

在习惯上, 自变量用 x 表示, 函数用 y 表示, 所以可将反函数改写成 $y=f^{-1}(x)$, $x \in M$ 。

由定义可知, 函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域分别是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域和定义域。函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数。

例 2 求函数 $y=3x-2$ 的反函数。

解 由 $y=3x-2$ 解得 $x=\frac{y+2}{3}$, 将 x 与 y 互换, 得 $y=\frac{x+2}{3}$, 所以 $y=3x-2(x \in \mathbf{R})$ 的反函数是 $y=\frac{x+2}{3}(x \in \mathbf{R})$ 。

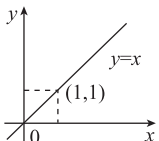
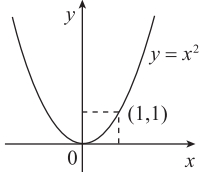
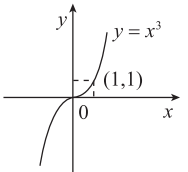
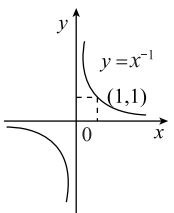
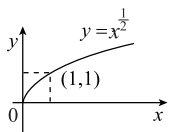
另外, 函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称。

三、基本初等函数

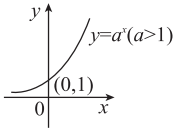
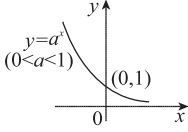
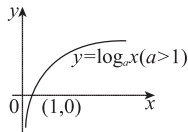
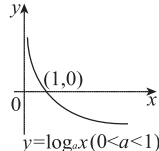
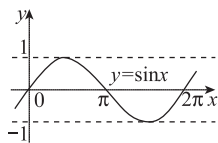
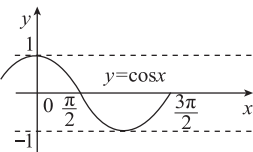
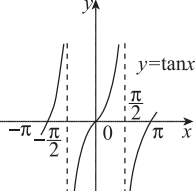
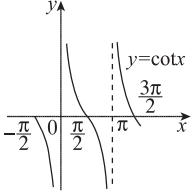
幂函数($y=x^a, a \in \mathbf{R}$)、指数函数($y=a^x, a>0$ 且 $a \neq 1$)、对数函数($y=\log_a x, a>0$ 且 $a \neq 1$)、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

一些常用的基本初等函数的定义域与值域、图像和特性如表 1-2 所示。

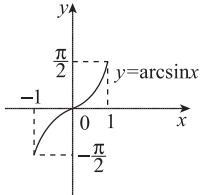
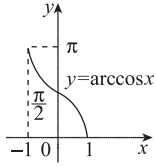
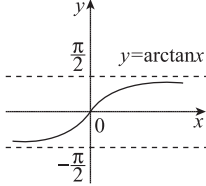
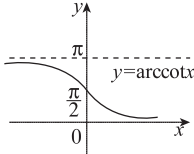
表 1-2

函 数	定义域与值域	图 像	特 性
$y=x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
$y=x^2$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		偶函数, 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少; 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加
$y=x^3$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
$y=x^{-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$		奇函数, 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少; 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少
$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x \in [0, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		单调增加

续表

函 数	定义域与值域	图 像	特 性
指数函数	$y=a^x$ ($a>1$)		单调增加
	$y=a^x$ ($0<a<1$)		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ ($a>1$)		单调增加
	$y=\log_a x$ ($0<a<1$)		单调减少
三角函数	$y=\sin x$ $x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数, 周期为 2π , 有界, 在 $(2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 在 $(2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ 内单调减少 ($k\in\mathbf{Z}$)
	$y=\cos x$ $x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数, 周期为 2π , 有界, 在 $(2k\pi, 2k\pi+\pi)$ 内单调减少, 在 $(2k\pi+\pi, 2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 ($k\in\mathbf{Z}$)
	$y=\tan x$ $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数, 周期为 π , 在 $(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加 ($k\in\mathbf{Z}$)
	$y=\cot x$ $x\neq k\pi (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数, 周期为 π , 在 $(k\pi, k\pi+\pi)$ 内单调减少 ($k\in\mathbf{Z}$)

续表

函 数	定义域与值域	图 像	特 性
$y = \arcsin x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$		奇函数, 单调增加, 有界
$y = \arccos x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$		单调减少, 有界
$y = \arctan x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$		奇函数, 单调增加, 有界
$y = \operatorname{arccot} x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, \pi)$		单调减少, 有界

四、复合函数和初等函数

1. 复合函数

定义 4 设 y 是 u 的函数, $y = f(u)$; 而 u 又是 x 的函数, $u = \varphi(x)$, 其定义域为数集 A 。如果在数集 A 或 A 的子集上, x 的每一个值所对应的 u 值都能使函数 $y = f(u)$ 有定义, 那么 y 就是 x 的函数。这个函数叫作函数 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称为 x 的**复合函数**, 记为 $y = f[\varphi(x)]$, 其中 u 叫作中间变量, 其定义域为数集 A 或 A 的子集。

例如, $y = \tan^2 x$ 是由 $y = u^2$ 与 $u = \tan x$ 复合而成的函数; $y = \ln(x-1)$ 是由 $y = \ln u$ 与 $u = x-1$ 复合而成的函数, 它们都是 x 的复合函数。

注意 (1) 不是任何两个函数都可以复合成一个函数。例如, $y = \arcsin u$ 与 $u = 2 + x^2$ 就不能复合成一个函数。

(2) 复合函数也可以由两个以上的函数复合而成。例如, 由 $y = 2^u$, $u = \sin v$, $v = \frac{1}{x}$ 这三个函数可得复合函数 $y = 2^{\sin \frac{1}{x}}$, 这里 u 和 v 都是中间变量。

例 3 指出下列各复合函数的复合过程。

- (1) $y = \sqrt{1+x^2}$; (2) $y = \arcsin(\ln x)$; (3) $y = e^{\sin x^2}$ 。

解 (1) $y = \sqrt{1+x^2}$ 是由 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = 1+x^2$ 复合而成。

(2) $y = \arcsin(\ln x)$ 是由 $y = \arcsin u$ 与 $u = \ln x$ 复合而成。

(3) $y = e^{\sin x^2}$ 是由 $y = e^u$, $u = \sin v$, $v = x^2$ 复合而成。

2. 初等函数

定义 5 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算以及有限次的复合步骤所构成的,并能用一个式子表示的函数称为初等函数。

例如, $y = \ln \cos^2 x$, $y = \sqrt[3]{\tan x}$, $y = \frac{2x^3-1}{x^2+1}$, $y = e^{2x} \sin(2x+1)$ 都是初等函数。

在初等函数的定义中,明确指出是用一个式子表示的函数,如果一个函数必须用几个式子表示,它就不是初等函数。例如, $g(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$ 就不是初等函数,而称为非初等函数。

五、建立函数关系举例

在解决实际问题时,通常要先建立问题中的函数关系,然后进行分析和计算。下面举一些简单的实际问题,说明建立函数关系的过程。

例 4 某工厂生产人造钻石,年生产量为 x kg,其固定成本为 312 万元,每生产 1 kg 人造钻石,可变成本均匀地增加 50 元,试将总成本 $C_{\text{总}}$ (单位:元)和平均单位成本 $C_{\text{均}}$ (单位:元/kg)表示成产量 x (单位:kg)的函数。

解 由于总成本 = 固定成本 + 可变成本,平均成本 = 总成本/产量,所以

$$C_{\text{总}} = 3\,120\,000 + 50x, C_{\text{均}} = \frac{3\,120\,000 + 50x}{x} = \frac{3\,120\,000}{x} + 50$$

例 5 某运输公司规定货物的吨千米运价为:在 a km 以内, k 元/km;超过 a km 时,超过部分 $\frac{4}{5}k$ 元/km。求运价 m 与里程 s 之间的函数关系。

解 根据题意可列出如下函数关系

$$m = \begin{cases} ks, & 0 < s \leq a \\ ka + \frac{4}{5}k(s-a), & s > a \end{cases}$$

这里运价 m 和里程 s 的函数关系是用分段函数表示的,定义域为 $(0, +\infty)$ 。

例 6 将直径为 d 的圆木料锯成截面为矩形的木材(见图 1-1),列出矩形截面两条边长之间的函数关系。

解 设矩形截面的一条边长为 x ,另一条边长为 y ,由勾股定理得 $x^2 + y^2 = d^2$ 。解出 $y = \pm \sqrt{d^2 - x^2}$,由于 y 只能取正值,所以 $y = \sqrt{d^2 - x^2}$,这就是矩形截面的两条边长之间的函数关系,它的定义域为 $(0, d)$ 。

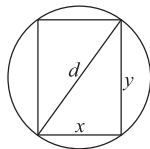


图 1-1

一般地,建立函数关系式应根据题意,先分析问题中哪些是变量,哪些是常量;在变量中,哪个是自变量,哪个是函数,并用不同的字母表示;再根据问题中给出的条件,运用数学、物理等方面的知识,确定等量关系;必要时,还要根据所给条件,确定关系式中需要

确定的常数或消去式中出现的多余变量,从而得出函数关系式,并根据题意写出函数的定义域。如果变量之间的关系式在自变量的各个取值范围内各不相同,则需进行分段考察,并将结果写成分段函数。

思 考 题

1. 如何作分段函数的图像? 作出分段函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 2^x, & x \geq 0 \end{cases}$ 的图像。
2. 几个函数能复合成一个函数的条件是什么? $y = \ln u, u = \cos x, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 能否复合成一个函数? 为什么?
3. 基本初等函数的特点是什么?

习题 1-1



习题讲解视频 1-1

1. 下列各题中所给的两个函数是否相同? 为什么?

- (1) $y = x$ 和 $y = \sqrt{x^2}$;
- (2) $y = x$ 和 $y = (\sqrt{x})^2$;
- (3) $y = (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$ 和 $y = \sin x$;
- (4) $y = \lg x^3$ 和 $y = 3 \lg x$ 。

2. 求下列函数的定义域。

- (1) $y = \sqrt{3x+4}$;
- (2) $y = \sqrt{1-|x|}$;
- (3) $y = \frac{2}{x^2-3x+2}$;
- (4) $y = \sqrt{5-x} + \lg(x-1)$;
- (5) $y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\lg(1+x)}$;
- (6) $y = \arccos \sqrt{2x}$ 。

3. 设 $f(x) = ax + b, f(0) = -2, f(3) = 5$, 求 $f(1)$ 和 $f(2)$ 。

4. 已知 $f(x+1) = x^2 + 3x + 5$, 求 $f(x)$ 。

5. 判断下列函数的奇偶性。

- (1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$;
- (2) $g(x) = x^2 \cos x$;
- (3) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$;
- (4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 。

6. 证明函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(-1, 0)$ 内单调减少。

7. 将下列各题中的 y 表示为 x 的函数。

- (1) $y = \sqrt{u}, u = x^2 - 1$;
- (2) $y = \sqrt{u}, u = 1 + \sin x$ 。

8. 指出下列函数的复合过程。

- (1) $y = \cos 5x$;
- (2) $y = (2-3x)^{\frac{1}{2}}$;
- (3) $y = \ln(\sin e^{x+1})$;
- (4) $y = 5^{\cot \frac{1}{x}}$;
- (5) $y = \sin^2 x$;
- (6) $y = \sin x^2$;
- (7) $y = \sqrt{\ln x}$;
- (8) $y = \ln \tan \frac{1}{x^2}$;
- (9) $y = \sin^2(\ln x)$;

- (10) $y = \sin \sqrt[3]{x^2+1}$;
- (11) $y = \lg \arcsin(x+1)$;
- (12) $y = \sqrt[3]{\tan^2\left(x + \frac{1}{6}\right)}$;

$$(13) y = \arctan e^{\sqrt{x}}; \quad (14) y = \ln \cos \sqrt{x^2 + 1}; \quad (15) y = \sin^2 \sqrt{1 - x - x^2};$$

$$(16) y = \arcsin^2 \left(\frac{2x}{1-x^2} \right).$$

9. 国际航空信件的邮资标准是 10g 以内邮资 4 元, 超过 10g 时超过的部分每克收取 0.3 元, 且信件重量不能超过 200g, 试求邮资 y 与信件重量 x 的函数关系式。

10. 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒(带盖), 试将它的表面积 s 表示为底半径 r 的函数, 并求其定义域。

第二节 数列的极限

一、数列极限的定义

前面已经学过数列的概念, 现在进一步考察当 n 无限增大时, 数列 $x_n = f(n)$ 的变化趋势, 先看下面两个数列:

$$(1) \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots; \quad (2) 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots.$$

为清楚起见, 把这两个数列的前几项在数轴上表示出来, 分别如图 1-2 和图 1-3 所示。

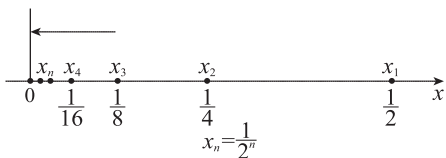


图 1-2

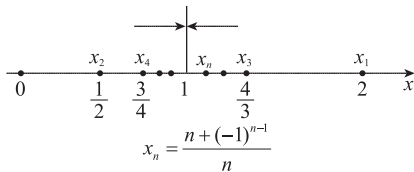


图 1-3

由图 1-2 可以看出, 当 n 无限增大时, 表示数列 $x_n = \frac{1}{2^n}$ 的点逐渐密集在 $x=0$ 的右侧, 即数列 x_n 无限接近于 0; 由图 1-3 可以看出, 当 n 无限增大时, 表示数列 $x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 的点逐渐密集在 $x=1$ 的附近, 即数列 x_n 无限接近于 1。

归纳这两个数列的变化趋势, 可知当 n 无限增大时, x_n 都分别无限接近于一个确定的常数。一般地, 有如下定义。

定义 6 如果当 n 无限增大时, 数列 $\{x_n\}$ 无限接近于一个确定的常数 a , 那么 a 就叫做当 n 趋向无穷大时, 数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad \text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } x_n \rightarrow a$$

因此, 数列(1)和数列(2)的极限分别记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$ 。

例 7 观察下列数列的变化趋势, 写出它们的极限。

$$(1) x_n = \frac{1}{n}; \quad (2) x_n = 2 - \frac{1}{n^2}; \quad (3) x_n = (-1)^n \frac{1}{3^n}; \quad (4) x_n = -3.$$

解 列表考察这四个数列的前几项, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它们的变化趋势如表 1-3 所示。

表 1-3

n	1	2	3	4	5	...	$\rightarrow\infty$
(1) $x_n = \frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	...	$\rightarrow 0$
(2) $x_n = 2 - \frac{1}{n^2}$	$2 - \frac{1}{1}$	$2 - \frac{1}{4}$	$2 - \frac{1}{9}$	$2 - \frac{1}{16}$	$2 - \frac{1}{25}$	...	$\rightarrow 2$
(3) $x_n = (-1)^n \frac{1}{3^n}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{243}$	...	$\rightarrow 0$
(4) $x_n = -3$	-3	-3	-3	-3	-3	...	$\rightarrow -3$

由表 1-3 中各数列的变化趋势,根据数列极限的定义可知:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n^2}\right) = 2;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{3^n} = 0;$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-3) = -3。$$

注意 并不是任何数列都有极限。

例如,数列 $x_n = 2^n$,当 n 无限增大时, x_n 也无限增大,但不能无限接近于一个确定的常数,所以这个数列没有极限。

又如,数列 $x_n = (-1)^{n+1}$,当 n 无限增大时, x_n 在 1 与 -1 两个数上来回跳动,不能无限接近于一个确定的常数,所以这个数列也没有极限。

数列没有极限,也说数列的极限不存在。

二、数列极限的四则运算

设有数列 x_n 和 y_n ,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$,则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b。$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b。$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0)。$$

这里(1)和(2)可推广到有限个数列的情形。

推论 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, c 为常数, $k \in \mathbf{N}^+$,则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^k = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^k。$$

例 8 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2$,求:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{5};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3x_n - \frac{y_n}{5}\right)。$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3 \times 5 = 15$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{5} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{2}{5}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3x_n - \frac{y_n}{5}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{5} = 15 - \frac{2}{5} = 14 \frac{3}{5}$$

例9 求下列各极限。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{1 + n^2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right); \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 4 - 0 + 3 \times 0 = 4$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{1 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{3 - 0 + 0}{0 + 1} = 3$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 2$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

三、无穷递缩等比数列的求和公式

等比数列 $a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots, a_1q^{n-1}, \cdots$, 当 $|q| < 1$ 时, 称为无穷递缩等比数列。现在来求它的前 n 项的和 S_n 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限。

$$\text{由于 } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^n) = \frac{a_1}{1-q} (\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n).$$

$$\text{当 } |q| < 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} (1-0) = \frac{a_1}{1-q}.$$

我们把无穷递缩等比数列前 n 项的和当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限叫作这个无穷递缩等比数列的和, 并用符号 S 表示, 从而有公式

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

这个公式叫作无穷递缩等比数列的求和公式。

例10 求数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$ 各项的和。

解 因为 $|q| = \frac{1}{2} < 1$, 所以它是无穷递缩等比数列, 因此有 $S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ 。

思 考 题

1. “对数列 $\{x_n\}$, 如果当 n 无限增大时, x_n 越来越接近于常数 A , 则称数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限”, 这种说法正确吗?

2. 数列 $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \cdots$ 是否有极限?

习题 1-2



习题讲解视频 1-2

1. 观察下列数列当 $n \rightarrow \infty$ 时的变化趋势, 写出极限。

- (1) $x_n = \frac{1}{2^n}$; (2) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$; (3) $x_n = 2 - \frac{1}{n^2}$;
 (4) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$; (5) $x_n = 1 - \frac{1}{5^n}$; (6) $x_n = -5$;
 (7) $x_n = (-1)^n n$; (8) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ 。

2. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\frac{1}{2}$, 求下列各极限。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n + 3y_n)$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - y_n}{x_n}$ 。

3. 求下列各极限。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n^2}\right)$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n}$; (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2+1}{7n^2-3}$;
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3+n-5}{3+n^3}$; (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{3}{2^n} + \frac{1}{n^2}\right)$; (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2^n}\right) \left(6 - \frac{7}{n}\right)$;
 (7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+5}{3-2n^2}$; (8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3}{n+1} - n\right)$; (9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-1}{1+2^n}$;
 (10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$; (11) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n})$; (12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2+n}}{2n+5}$;
 (13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n+2})$ 。

4. 求下列无穷递缩等比数列的和。

- (1) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$; (2) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, \dots$; (3) $1, -x, x^2, -x^3, \dots (|x| < 1)$ 。

第三节 函数的极限

本节将讨论一般函数 $y=f(x)$ 的极限, 主要研究以下两种情形:

(1) 当自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大, 即 x 趋向无穷大(记为 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的极限;

(2) 当自变量 x 任意接近于 x_0 , 即 x 趋向于定值 x_0 (记为 $x \rightarrow x_0$) 时, 函数 $f(x)$ 的极限。

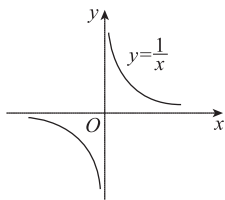
一、当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

图 1-4

先看下面的例子:

考察当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的变化趋势。由图 1-4 可以看出, 当 x 的绝对值无限增大时, $f(x)$ 的值无限接近于 0, 即当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$ 。

对于这种当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的变化趋势, 给出下面的定义。

定义 7 如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x \rightarrow \infty$)时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A ,那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad \text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } f(x) \rightarrow A$$

根据上述定义可知,当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) = \frac{1}{x}$ 的极限是 0,可记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

注意 自变量 x 的绝对值无限增大指的是 x 既取正值而无限增大(记为 $x \rightarrow +\infty$),也取负值而绝对值无限增大(记为 $x \rightarrow -\infty$),但有时 x 的变化趋势只能或只需取这两种变化中的一种情形。下面给出当 $x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$ 时函数极限的定义。

定义 8 如果当 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$) 时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A ,那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$) 时的**极限**,记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} f(x) = A \quad \text{或} \quad \text{当 } x \rightarrow +\infty (x \rightarrow -\infty) \text{ 时, } f(x) \rightarrow A$$

例如,如图 1-5 所示, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ 及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ 。

由于当 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 时,函数 $y = \arctan x$ 不是无限接近于同一个确定的常数,所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在。

一般地, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 。

例 11 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$ 。

解 如图 1-6 所示,可知 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ 。

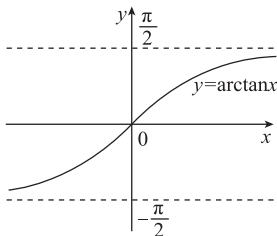


图 1-5

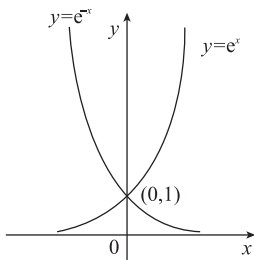


图 1-6

例 12 讨论当 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 的极限。

解 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$,虽然 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x$ 都存在,但是不相等,所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} x$ 不存在。

二、当 $x \rightarrow x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 9 如果当 x 无限接近于定值 x_0 ,即 $x \rightarrow x_0$ (x 可以不等于 x_0) 时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A ,那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad \text{当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时, } f(x) \rightarrow A$$

注意 (1) 在上面的定义中, $x \rightarrow x_0$ 表示既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋近于 x_0 。

(2) 定义中考虑的是当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的变化趋势,并不考虑 $f(x)$ 在点 x_0 是否有

定义。

例 13 考察极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} c$ (c 为常数) 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} x$ 。

解 设 $f(x) = c, \varphi(x) = x$ 。

当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的值恒等于 c , 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ 。

当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\varphi(x)$ 的值无限接近于 x_0 , 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ 。

三、当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的左极限与右极限

前面讨论的当 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限中, x 既从 x_0 的左侧无限接近于 x_0 (记为 $x \rightarrow x_0 - 0$ 或 x_0^-), 也从 x_0 的右侧无限接近于 x_0 (记为 $x \rightarrow x_0 + 0$ 或 x_0^+)。下面再给出当 $x \rightarrow x_0^-$ 或 $x \rightarrow x_0^+$ 时函数极限的定义。

定义 10 如果当 $x \rightarrow x_0^-$ 时, 函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A , 那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 - 0) = A$$

如果当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, 函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A , 那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 + 0) = A$$

一般地, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 。

例 14 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的极限。

解 作出这个分段函数的图像(见图 1-7), 由图可知函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$$

右极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$

因为当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的左极限与右极限虽各自存在但不相等, 所以极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在。

例 15 讨论函数 $y = \frac{x^2-1}{x+1}$ 当 $x \rightarrow -1$ 时的极限。

解 函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$; 因为 $x \neq -1$, 所以 $y = \frac{x^2-1}{x+1} = x-1$ 。作出这个函数的图像(见图 1-8), 由图 1-8 可知

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x-1) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1) = -2$$

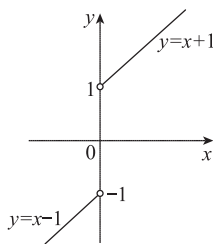


图 1-7

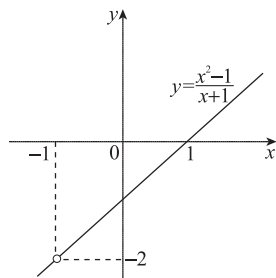


图 1-8