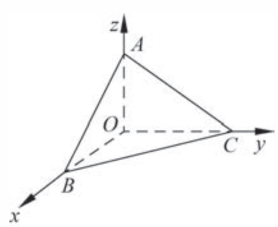
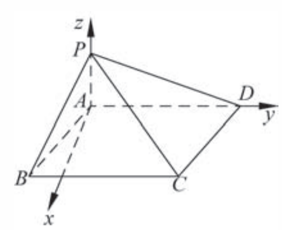
第1章 空间向量与立体几何

空间直角坐标系的常用建系方法

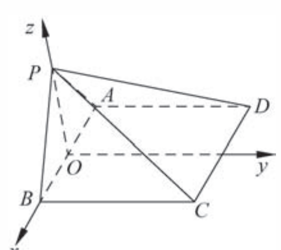
利用共顶点且相互垂直的三条棱建系



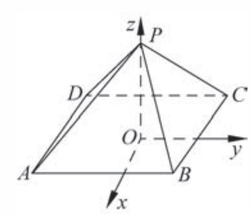
利用线面垂直建系



利用面面垂直建系



利用图形中的对称关系建系



1.1 空间向量及其运算

核心笔记

1. 空间向量的有关概念

(1) 空间向量：在空间中，具有大小和方向的量叫作空间向量，其大小叫作向量的模或长度。

(2) 几种常用特殊向量：

① 单位向量：长度或模为 1 的向量。

② 零向量：长度为 0 的向量。

③ 相等向量：方向相同且模相等的向量。

④ 相反向量：方向相反而模相等的向量。

⑤ 共线向量(平行向量)：如果表示空间向量的有向线段所在的直线平行或重合，则这些向量叫作共线向量或平行向量。

⑥ 共面向量：平行于同一个平面的向量。

2. 空间向量的线性运算

(1) 空间向量的加减与数乘运算是平面向量运算的推广。

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是空间任意两向量(如图 1-1 所示)，若 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$P\in OC$，则 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda\in\mathbf{R})$。

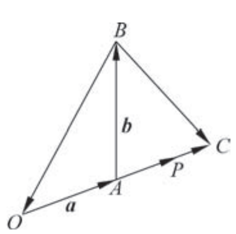


图 1-1

(2) 向量加法与数乘向量运算满足以下运算律：

① 加法交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

② 加法结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

③ 数乘分配律：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

④ 数乘结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}(\lambda\in\mathbf{R},\mu\in\mathbf{R})$。

核心例题 1 空间向量的概念

( )给出以下结论：

① 空间任意两个共起点的向量是共面的；

② 两个相等向量就是相等长度的两条有向线段表示的向量；

③ 空间向量的加法满足结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

④ 首尾相接的若干向量之和，等于由起始向量的起点指向末尾向量的终点的向量。

请将正确说法的题号填在横线上：________。

【答案】 ①③④

【解析】 ①：两个向量共起点，与两向量终点共有 3 个点，则 3 点共面，可知两向量共面，①正确。

②：两个相等向量需大小相等，方向相同，②错误。

③：空间向量加法满足结合律，③正确。

④：由向量加法的三角形法则可知④正确。

故填①③④。

努力是一种习惯，不是三分钟热度，更不是一时心血来潮！坚持才能胜利，每一个令人羡慕的收获和成功，都是努力用心拼来的！人可以抱怨，也可以无视，但记住，不努力，连认输的资格都没有！越努力，越幸运！(推荐人：@佟海燕老师(内蒙古))

解题必备

1. 空间向量的定义

在空间中，我们把具有大小和方向的量叫作空间向量，向量的大小叫作向量的长度或模。

2. 空间向量的表示方法

(1) 几何表示：空间向量用有向线段表示，有向线段的长度表示向量的模。

(2) 符号表示：空间向量可用一个字母表示，如向量 $\boldsymbol{a}$，也可用有向线段的起点、终点的字母表示，如图 1-2 所示，可用表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段的起点 A 和终点 B 表示为 $\overrightarrow{AB}$，向量的模记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$。

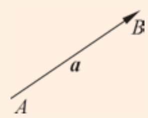


图　1-2

3. 几个特殊的空间向量

零向量	长度为 0 的向量叫作零向量，记为 $\boldsymbol{0}$
单位向量	模为 1 的向量称为单位向量
相反向量	与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等而方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，记为 $-\boldsymbol{a}$
相等向量	方向相同且大小相等的向量称为相等向量

题型训练 · 练其形

1.1 ( )下列命题中，假命题是(　　)。

A. 同平面向量一样，任意两个空间向量都不能比较大小

B. 两个相等的向量，若起点相同，则终点也相同

C. 只有零向量的模等于 0

D. 共线的单位向量都相等

1.2 ( )下列说法中正确的是(　　)。

A. 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的长度相等，方向相同或相反

B. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

C. 空间向量的减法满足结合律

D. 在四边形 $ABCD$ 中，一定有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

1.3 ( )给出下列命题：

① 若空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

② 空间任意两个单位向量必相等；

③ 对于非零向量 $\boldsymbol{c}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

④ 在向量的数量积运算中 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$。

其中假命题的个数是(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

题型训练 · 悟其神

1.4 (，多选题)在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，与向量 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有(　　)。

A. $\overrightarrow{CD}$　　B. $\overrightarrow{A'B'}$

C. $\overrightarrow{D'C'}$　　D. $\overrightarrow{BC}$

1.5 ( )给出下列命题：

① 空间向量就是空间中的一条有向线段；

② 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，必有

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$；

③ $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$是向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的必要不充分条件；

④ 若空间向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}$ 满足 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{p}$，则$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{p}$。

其中正确的命题的个数是(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

1.6 ( )如图 1-3 所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，长、宽、高分别为 $AB=3$，$AD=2$，$AA_1=1$，以该长方体的八个顶点中的两点为起点和终点的向量中：

(1) 单位向量共有________个；

(2) 模为$\sqrt{5}$的向量共有________个；

(3) 与 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 相等的向量共有________个；

(4) $\overrightarrow{CC_1}$ 的相反向量共有________个。

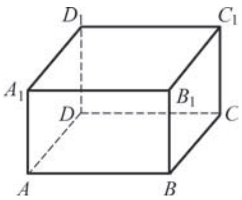


图 1-3

核心例题 2 空间向量加减运算

( )如图 1-4 所示，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AC 与 BD 的交点为 M，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则下列选项中与向量 $\overrightarrow{MC_1}$ 相等的是(　　)。

A. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　D. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

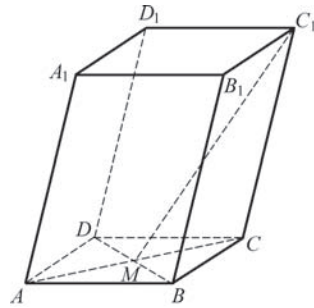


图 1-4

【答案】B

【解析】因为 $\overrightarrow{MC_1}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CC_1}$，$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{c}$，所以 $\overrightarrow{MC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$。故选 B。

解题必备

1. 空间向量的加法和减法运算

已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，可以把它们平移到同一个平面 α 内，以任意点 O 为起点，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，如图 1-5 所示类似于平面向量，可以定义空间向量的加法和减法运算(如图 1-6 所示)：

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。

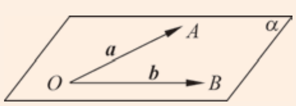


图 1-5

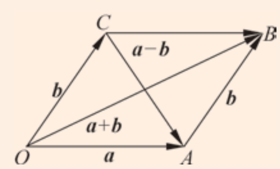


图 1-6

2. 空间向量的加法运算律

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。

用图 1-7、图 1-8 来验证空间向量的加法运算律如下：

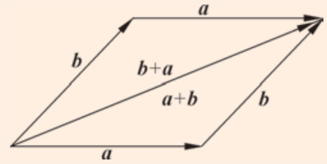


图　1-7

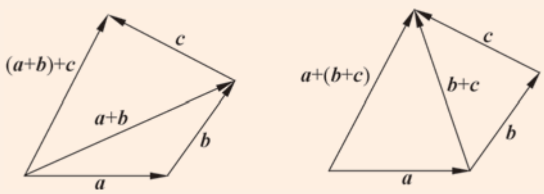


图　1-8

题型训练 · 练其形

2.1 ( )如图 1-9 所示，平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{A_1M}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AA_1}$，则实数 x,y,z 的值分别为(　　)。

A. $\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}$

B. $\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3}$

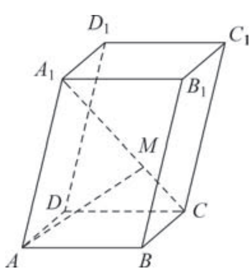


图　1-9

2.2 ( )如图 1-10 所示，在三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，D 是 CC_1 的中点，F 是 A_1B 的中点，且 $\overrightarrow{DF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，则(　　)。

A. $\alpha=\frac{1}{2},\beta=-1$

B. $\alpha=-\frac{1}{2},\beta=1$

C. $\alpha=1,\beta=-\frac{1}{2}$

D. $\alpha=-1,\beta=\frac{1}{2}$

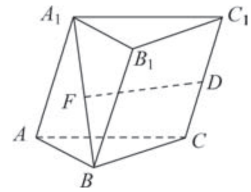


图　1-10

2.3 (，多选题)如图 1-11 所示，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，下列各式中运算的结果为 $\overrightarrow{AC_1}$ 的有(　　)。

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

B. $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{D_1C_1}$

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{B_1C_1}$

D. $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{B_1C_1}$

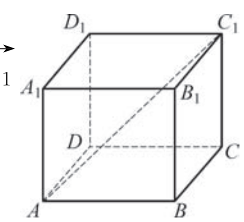


图　1-11

题型训练 · 悟其神

2.4 ( )如图 1-12 所示，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，点 F 是侧面 CDD_1C_1 的

中心，若 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AA_1}$，则 $x-y+z=$________。

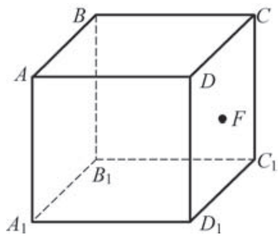


图　1-12

2.5 (　)如图 1-13 所示，四面体 $ABCD$ 中，M，N 分别是线段 BC，AD 的中点，已知 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$，有下面四个结论：

(1) $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC})$；

(2) $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$；

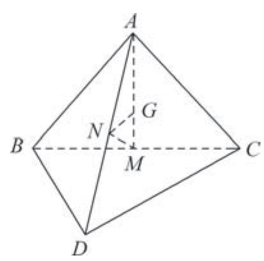


图　1-13

(3) $\overrightarrow{NG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC})$；

(4) 存在实数 x，y，使得 $\overrightarrow{NG}=x\overrightarrow{DB}+y\overrightarrow{DC}$。

其中正确的结论是________。（把你认为是正确的所有结论的序号都填上）

2.6 (　)如图 1-14 所示，已知空间四边形 $OABC$，其对角线为 OB，AC。M，N 分别是对边 OA，BC 的中点，点 G 在线段 MN 上，$\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GN}$，现用基向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 表示向量 $\overrightarrow{OG}$，设 $\overrightarrow{OG}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，则 x，y，z 的值分别是（　　）。

A. $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3}$，$z=\frac{1}{3}$

B. $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3}$，$z=\frac{1}{6}$

C. $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{6}$，$z=\frac{1}{3}$

D. $x=\frac{1}{6}$，$y=\frac{1}{3}$，$z=\frac{1}{3}$

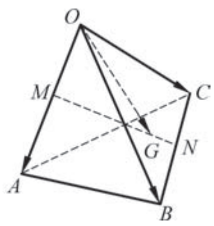


图　1-14

核心例题 3　空间向量的数量积运算

(　，多选题)正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，则下列结论正确的是（　　）。

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-a^2$

B. $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD_1}=2a^2$

C. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-a^2$

D. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_1}=2a^2$

【答案】 BC

【解析】 如图 1-15 所示：

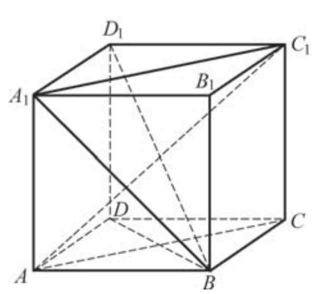


图　1-15

请你一定要相信自己，不到最后一刻千万不要放弃。不认真一把真的不知道自己会有多厉害。请你一定要好好学习，它给你带来的不仅会是站在人群中的自信，更会是在环境中的多种选择。（推荐人：@姚帅（广东））

A：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}^2=a^2$，A 错误。

B：$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD_1}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1})=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})=\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AB}^2=2a^2$，B 正确。

C：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})=-\overrightarrow{AB}^2=-a^2$，C 正确。

D：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=\overrightarrow{AB}^2=a^2$，D 错误。故选 BC。

解题必备

1. 已知两个非零空间向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，则数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，其中 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角。规定 $\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$。
2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义：数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的乘积。

题型训练 · 练其形

3.1 （　）如图 1-16 所示，平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=AA_1=1$，$\angle BAD=\angle BAA_1=120°$，$\angle DAA_1=60°$，则 $AC_1=$（　　）。

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{2}$

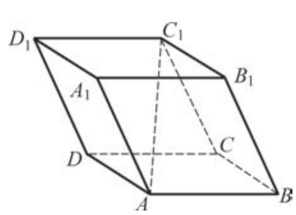


图　1-16

3.2 （　）如图 1-17 所示，直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=AB=2$，$\angle BAD=60°$，M 是 BB_1 的中点，则异面直线 A_1M 与 B_1C 所成角的余弦值为（　　）。

A. $-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

B. $-\dfrac{1}{5}$

C. $\dfrac{1}{5}$

D. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

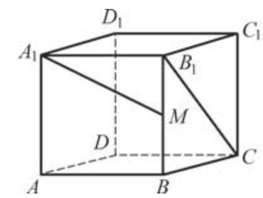


图　1-17

3.3 （　）正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a，点 E，F 分别是 BC，AD 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的值为________。

题型训练 · 悟其神

3.4 （　）如图 1-18 所示，已知 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，$PA\perp PC$，$PB\perp PC$，$PA\perp PB$，求证：P 在平面 ABC 上的射影 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

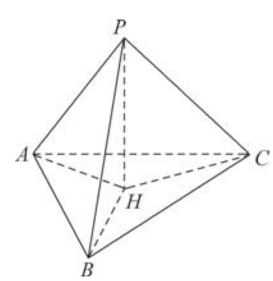


图　1-18

3.5 如图 1-19 所示，已知三棱锥 O-ABC 中，$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC$，且 $OA=OB=OC$，M，N 分别是 OA，BC 的中点，G 是 MN 的中点，求证：$OG\perp BC$。

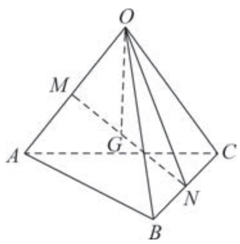


图 1-19

3.6 已知 MN 是长方体外接球的一条直径，点 P 在长方体表面上运动，长方体的棱长分别是 $1,1,\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的取值范围为（　　）。

A. $\left[-\frac{1}{2},0\right]$　　B. $\left[-\frac{3}{4},0\right]$

C. $\left[-\frac{1}{2},1\right]$　　D. $\left[-\frac{3}{4},1\right]$

达标全刷

1. 已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，化简：$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})+5\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)-3(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$ ________。

2. 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，给出以下向量表达式：

① $(\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1A})-\overrightarrow{AB}$；

② $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1})-\overrightarrow{D_1C_1}$；

③ $(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})-2\overrightarrow{DD_1}$；

④ $(\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{A_1A})+\overrightarrow{DD_1}$。

其中能够化简为向量 $\overrightarrow{BD_1}$ 的是________（填序号）。

3. 如图 1-20 所示，在平行六面体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 的棱中，与向量 $\overrightarrow{AA'}$ 模相等的向量有（　　）。

A. 0 个　B. 3 个

C. 7 个　D. 9 个

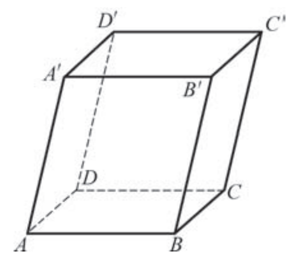


图 1-20

4. 如图 1-21 所示，在平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，点 P 在 A_1C 上，且 $A_1P:PC=2:3$，则 $\overrightarrow{AP}=$（　　）。

A. $\frac{2}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}+\frac{3}{5}\boldsymbol{c}$

B. $\frac{3}{5}\boldsymbol{a}+\frac{2}{5}\boldsymbol{b}+\frac{2}{5}\boldsymbol{c}$

C. $-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}+\frac{2}{5}\boldsymbol{b}+\frac{3}{5}\boldsymbol{c}$

D. $\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\frac{2}{5}\boldsymbol{b}-\frac{2}{5}\boldsymbol{c}$

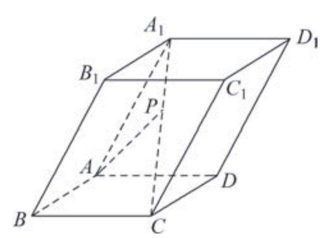


图 1-21

5. 如图 1-22 所示，空间四边形 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，且 $OM=$

$2MA$，$BN=NC$，则 $\overrightarrow{MN}=$（　　）。

A. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

C. $-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

D. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

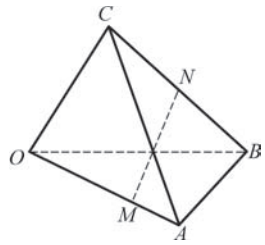


图　1-22

6.（　）如图 1-23 所示，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则与 $\overrightarrow{BM}$ 相等的向量是（　　）。

A. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

B. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

D. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

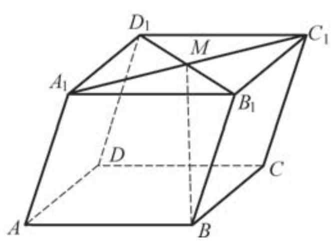


图　1-23

7.（　）已知四面体 $ABCD$ 的所有棱长都是 2，点 E 是 AD 的中点，则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CE}=$（　　）。

A. 1　　B. -1　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

8.（　）在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，有下列命题：

① $(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})^2=3|\overrightarrow{AB}|^2$；② $\overrightarrow{A_1C}\cdot(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A})=0$；③ $\overrightarrow{AD_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1B}$ 的夹角为 60°。其中正确的命题有（　　）。

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 0 个

9.（　）已知 O,A,B,C,D,E,F,G,H 为空间的 9 个点（如图 1-24 所示），并且 $\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EH}+m\overrightarrow{EF}$。

求证：(1) A,B,C,D 四点共面，E,F,G,H 四点共面；

(2) $AC/\!/EG$。

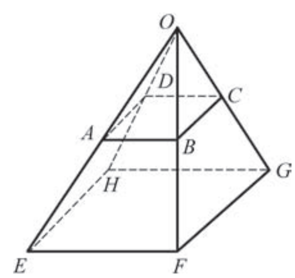


图　1-24

10.（　）如图 1-25 所示，已知三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 ABC，记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AA_1}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$。

(1) 用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{AB_1}$，$\overrightarrow{A_1C}$，$\overrightarrow{BC_1}$；

(2) 若 $AB_1\perp BC_1$，$A_1C\perp BC_1$，求证：$AB_1=A_1C$。

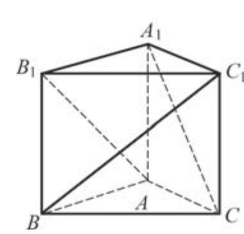


图　1-25

高考着实是一种丰收，它蕴含着太多的内涵。无论高考成绩如何，你的成长与成熟是任何人无法改变的事实，这三年的辛勤走过，你获得的太多太多。（推荐人：@陈市耀（辽宁））

1.2 空间向量基本定理

核心笔记

1. 空间向量基本定理

如果三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在有序实数组 $\{x,y,z\}$，使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，其中 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 叫作空间的一个基底，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都叫作基向量。

2. 共线向量定理

对空间任意两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$。

3. 共面向量定理

如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x,y)，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$。

核心例题 1 空间向量的基底

( )$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为空间向量的一组基底，则下列各项中，能构成空间向量的基底的一组向量是(　　)。

A. $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\}$

B. $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\}$

C. $\{\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\}$

D. $\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\}$

【答案】 C

【解析】 A：因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共面，不能构成基底，排除 A。

B：因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共面，不能构成基底，排除 B。

C：若 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共面，则 $\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(\lambda-\mu)\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，与 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为空间向量的一组基底相矛盾，故 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以构成空间向量的一组基底，C 正确。

D：因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共面，不能构成基底，排除 D。

故选 C。

解题必备

1. 空间任意三个不共面的向量都可构成基底。
2. 基底选定后，空间的所有向量均可由基底唯一表示。
3. $\boldsymbol{0}$ 不能作为基向量。

题型训练 · 练其形

1.1 (，多选题)若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，则(　　)。

A. $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}$ 共面

B. $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},2\boldsymbol{b}$ 共面

C. $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 共面

D. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}$ 共面

1.2 ( )已知点 O,A,B,C 为空间不共面的四点，且向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，向量 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$，则与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不能构成空间基底的向量是(　　)。