



矩 阵

线性方程组是线性代数的基础. 矩阵是线性代数的重要研究对象和重要工具, 矩阵不仅可以用来研究线性方程组, 而且在自然科学、工程技术、社会科学等各个领域也具有非常广泛的应用.

本章主要讨论

1. 什么是线性方程组?
2. 什么是矩阵? 矩阵有哪些主要运算?
3. 何谓矩阵的初等变换? 何谓初等矩阵?
4. 如何用初等变换求解线性方程组?
5. 何谓逆矩阵?
6. 什么是分块矩阵?

1.1 线性方程组的概念

形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad (1.1)$$

的方程称为 n 元线性方程(linear equation), 其中 b 及系数 a_1, a_2, \cdots, a_n 为常数, x_1, x_2, \cdots, x_n 为未知数.

由几个包含相同未知数 x_1, x_2, \cdots, x_n 的线性方程构成的方程组称为线性方程组(system of linear equations). 含 m 个方程 n 个未知数的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 a_{ij} 是此方程组中的第 i 个方程的第 j 个未知数 x_j 的系数, b_i 是第 i 个方程的常数项, $i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n$. 称形如(1.2)式的方程组为 $m \times n$ 的线性方程组. 为方便, 本书中的线性方程组也常简称方程组. 下面是一些线性方程组的例子:

$$(1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 - 3x_2 = -7; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 = 2; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$



其中方程组(1)是 2×2 的,方程组(2)是 2×3 的,方程组(3)是 3×2 的.

定义 1.1 (线性方程组的解) 若将线性方程组(1.2)中的未知数 x_1, x_2, \dots, x_n 分别用数 k_1, k_2, \dots, k_n 代替后,所有方程的两边都相等,则称 $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$ 为线性方程组(1.2)的一个解(a solution to system(1.2)).

例如, $x_1 = 2, x_2 = 3$ 是方程组(1)的一个解. $x_1 = -1, x_2 = -3, x_3 = 3$ 为方程组(2)的一个解.事实上,方程组(2)有无穷多解,可以验证,对于任意实数 $k, x_1 = 2 - k, x_2 = -k, x_3 = k$ 都是方程组(2)的解.

注 线性方程组的解也可以用有序数组来表示,例如方程组(1)的唯一解 $x_1 = 2, x_2 = 3$ 可以表示为 $(2, 3)$,可用 $(-1, -3, 3)$ 来表示方程组(2)的一个解.

一个线性方程组的所有解的集合称为此线性方程组的解集(solution set).例如,方程组(1)的解集为 $\{(2, 3)\}$,方程组(2)的解集为 $\{(2 - k, -k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$.

显然,方程组(3)无解,即该方程组的解集是空集 \emptyset .

若线性方程组无解,我们称这个方程组是**不相容的**(inconsistent);若线性方程组至少有一个解,我们称这个方程组是**相容的**(consistent).一般地,线性方程组的解有如下三种情况.

- (1) **有唯一解**(exactly one solution); (2) **有无穷多解**(infinitely many solutions); (3) **无解**(no solution).

可以验证,方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 - 3x_2 = -7 \end{cases}$ 具有相同的解 $x_1 = 2, x_2 = 3$.

若两个线性方程组具有相同的解集,则称这两个方程组为**同解方程组**,或者称这两个方程组是**等价的**(equivalent).

定义 1.2 (线性方程组的初等变换) 我们称以下三种变换为线性方程组的初等变换.

- (1) **对换变换**: 交换任意两个方程的顺序;
 (2) **倍乘变换**: 方程两边同乘以一个非零的常数;
 (3) **倍加变换**: 某个方程的任意倍数加到另一个方程上.

显然,对线性方程组施行有限次初等变换后,得到的方程组与原方程组是同解的(或等价的).

例 1 已知线性方程组(1) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + 2x_3 = 7, \\ 2x_3 = 4. \end{cases}$ 验

证这两个方程组是同解的.

解 只要看线性方程组(1)是否可以通过若干次初等变换变到线性方程组(2)即可.

首先,方程组(1)和方程组(2)中的第一个方程相同.方程组(1)中的第三个方程加到第



二个方程上得

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ (+) -3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ \hline x_2 + 2x_3 = 7 \end{array}$$

而 $x_2 + 2x_3 = 7$ 是方程组(2)中的第二个方程. 方程组(1)中的第一个方程乘以 -1 加到第三个方程上得

$$\begin{array}{r} -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ (+) 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ \hline 2x_3 = 4 \end{array}$$

而 $2x_3 = 4$ 是方程组(2)中的第三个方程. 这样, 方程组(1)经过两次初等变换变到了方程组(2), 从而方程组(1)和方程组(2)是同解的, 即方程组(1)和(2)的解集是相同的.

显然方程组(2)容易求解, 由方程组(2)中的第三个方程得 $x_3 = 2$, 将其代入第二个方程得 $x_2 = 3$, 最后将 $x_2 = 3$ 及 $x_3 = 2$ 代入第一个方程, 得 $x_1 = -2$. 所以方程组(1)和方程组(2)的解都为 $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 2$.

定义 1.3 (上三角形方程组) 若 $n \times n$ 的线性方程组的第 k 个方程中的前 $k-1$ 个未知数的系数都为零, 而未知数 $x_k (k=1, 2, \dots, n)$ 的系数不为零, 则称这种形式的线性方程组为上三角形线性方程组 (upper triangular system), 简称上三角形方程组.

例如, 例 1 中的方程组(2)就是一个上三角形方程组. 由定义 1.3 知, 上三角形方程组有唯一解.

若 $n \times n$ 的线性方程组有唯一解, 利用线性方程组的初等变换, 可以将其变为上三角形方程组. 但一般来说, 这个过程是比较复杂的.

? 思考题

1. 设 k, h 为常数, 线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = 2, \\ kx_3 = h \end{cases}$ 是否为上三角形方程组?
2. 与 $n \times n$ 的线性方程组等价的上三角形方程组 (若存在的话) 是否唯一?

✍ 习题 1.1

A 组

1. 判断下列方程是否为线性方程:

- | | |
|-------------------------------|----------------------------|
| (1) $3x_1^2 + 4x_2^2 = 12$; | (2) $x_1 + \cos x_2 = 0$; |
| (3) $x_1 + 2\sqrt{x_2} = 5$; | (4) $2x_1 - x_2 = 3$. |

2. $n \times 2$ 的线性方程组中的每一个方程可以在平面上表示一条直线. 说明下列线性方程组所表示的直线间的位置关系:



$$(1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5, \\ 3x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 = 13; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3, \\ -4x_1 + 2x_2 = -6; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ -3x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

3. 求解下列上三角形方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_2 + x_3 = 11, \\ 3x_3 = 15; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_3 + 2x_4 = -1, \\ 4x_4 = 4. \end{cases}$$

4. 下列线性方程组中,方程组(b)是与方程组(a)同解(或等价)的上三角形方程组,请写出用线性方程组的初等变换将方程组(a)化为方程组(b)的过程.

$$(1) (a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - 8x_3 = 8, \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9; \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - 4x_3 = 4, \\ x_3 = 3; \end{cases}$$

$$(2) (a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ -7x_2 - 6x_3 = -10, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

$$5. \text{验证 } x_1=1, x_2=2, x_3=5 \text{ 是线性方程组 } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases} \text{ 的一个解,并进一步说明此解为该方程组的唯一解.}$$

B 组

1. 设有三个二维平面向量 $\alpha=(1,1)$, $\beta=(-2,2)$, $\gamma=(1,5)$, 若存在实数 x 和 y 满足 $x\alpha+y\beta=\gamma$, 试求 x 和 y .

2. 已知曲线 $y=c_0+c_1x+c_2x^2$ 通过三点 $(1,4)$, $(2,5)$ 和 $(3,8)$, 试求出该曲线的方程.

3. (百鸡问题)一百文铜钱买了一百只鸡,公鸡每只 5 文钱,母鸡每只 3 文钱,小鸡一文钱 3 只,问:一百只鸡中公鸡、母鸡、小鸡各有多少只?

1.2 矩阵的概念

1.2.1 矩阵的定义

在用初等变换将线性方程组变为同解的上三角形方程组的过程中,参与运算的是未知量的系数及常数项,而未知量并没有参与运算,它们只起到定位的作用.为此,我们把未知量的系数及常数项抽取出来,引入矩阵的概念.

对于线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 = 2, \end{cases} \quad (1.3)$$



将每个未知数的系数写在对齐的一列中,并用括号括起来,得到数表

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

若将系数和常数项写在一起,则得到数表

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

我们将数表(1.4)和(1.5)都称为**矩阵**(matrix).称(1.4)式为线性方程组(1.3)的**系数矩阵**(coefficient matrix),称(1.5)式为线性方程组(1.3)的**增广矩阵**(augmented matrix),它包含了线性方程组的全部信息.

定义 1.4 (矩阵) 由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

称为一个 $m \times n$ 矩阵,其中数 a_{ij} 表示矩阵的位于第 i 行第 j 列的**元素**(entry),称为矩阵的 (i, j) 元, $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$.

矩阵的记号一般为圆括号 $()$ 或方括号 $[\]$,为方便起见,矩阵(1.6)也可以表示为 $\mathbf{A}_{m \times n}$, $(a_{ij})_{m \times n}$ 或 $[a_{ij}]_{m \times n}$.

元素是实数的矩阵称为实矩阵,元素是复数的矩阵称为复矩阵.本书中的矩阵如无特别说明,都指实矩阵.

矩阵通常用大写字母 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$ 表示,在出版物中,大多用大写黑斜体字母表示矩阵,例如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

这里 \mathbf{A} 是 2×3 的, \mathbf{B} 是 2×4 的, \mathbf{A}, \mathbf{B} 还可以写成 $\mathbf{A}_{2 \times 3}, \mathbf{B}_{2 \times 4}$.

1.2.2 几种特殊矩阵

下面介绍几种常用的特殊矩阵.

(1) 零矩阵:元素全为零的矩阵称为**零矩阵**(zero matrix),一般用 \mathbf{O} 或 $\mathbf{O}_{m \times n}$ 表示,也可以用黑体数字 $\mathbf{0}$ 表示.例如

$$\mathbf{O}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 行矩阵和列矩阵:只有一行的矩阵称为**行矩阵**(row matrix),只有一列的矩阵称为**列矩阵**(column matrix).

例如, $(2, -1, 5, 7)$ 或 $(2 \quad -1 \quad 5 \quad 7)$ 为行矩阵, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为列矩阵.



行矩阵常称为**行向量**(row vector),列矩阵常称为**列向量**(column vector).

(3) 方阵: 行数和列数相同的矩阵称为**方阵**(square matrix). 例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

为一个 3×3 方阵,通常称为**三阶方阵**或**三阶矩阵**,在这个方阵中,经过元素 a_{11}, a_{22}, a_{33} 所在位置的直线称为**主对角线**,主对角线上的元素称为**主对角元**. 经过元素 a_{13}, a_{22}, a_{31} 所在位置的直线称为**副对角线**.

(4) 对角矩阵: 主对角元以外的元素全为零的方阵称为**对角矩阵**(diagonal matrix),即对 n 阶方阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})$,当 $i \neq j$ 时, $a_{ij}=0$. 例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}$$

为三阶对角矩阵,也可记为 $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33})$,矩阵中有规则的零元素可省略不写.

(5) 单位矩阵: 主对角元全为 1 的对角矩阵称为**单位矩阵**(identity matrix),一般用大写英文字母 \mathbf{E} 或 \mathbf{I} 表示. 例如

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

为三阶单位矩阵.

(6) 三角形矩阵: 主对角线下方的元素全为零的方阵称为**上三角形矩阵**(upper triangular matrix),即对 n 阶方阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})$,当 $i > j$ 时, $a_{ij}=0$. 例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{pmatrix}.$$

主对角线上方的元素全为零的方阵称为**下三角形矩阵**(lower triangular matrix),即对 n 阶方阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})$,当 $i < j$ 时, $a_{ij}=0$. 例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

例 1 写出下面的线性方程组对应的系数矩阵和增广矩阵.

$$(1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - 8x_3 = 8, \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - 4x_3 = 4, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

解 (1) 系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix}.$$



(2) 系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

显然,上三角形方程组的系数矩阵为上三角形矩阵.

如果矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的行数、列数分别对应相等,则称 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 为同型矩阵.

如果两个同型矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 对应位置处的元素完全相同,则称矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相等,记作 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. 例如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ -1 & b & -5 \end{pmatrix} \text{ 与 } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ c & 7 & d \end{pmatrix}$$

是同型矩阵,并且当 $a=6, b=7, c=-1, d=-5$ 时, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

例 2 (用矩阵表示航线图) 考虑一张航线图,用点表示城市,两城市之间有直达航班时,就用一条线将两个点连接起来. 图 1-1 中给出的是某航空公司部分城市间的航线图,图中用 C_1, C_2, C_3, C_4 分别表示北京、乌鲁木齐、西安、大连四个城市.

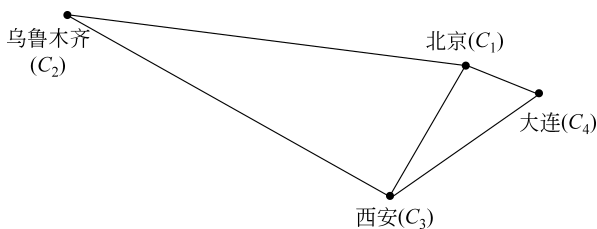


图 1-1

若令 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & C_i \text{ 与 } C_j \text{ 间有直达航班,} \\ 0, & C_i \text{ 与 } C_j \text{ 间无直达航班} \end{cases} (i, j = 1, 2, 3, 4)$, 则图 1-1 中城市间的航线关系可以用矩阵表示为

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

称矩阵 \mathbf{A} 为 C_1, C_2, C_3, C_4 四个城市间的航线图矩阵.



思考题

1. 如果一个方阵既是上三角形矩阵又是下三角形矩阵,问该方阵是什么类型的矩阵.
2. 设 $\mathbf{A}_{3 \times 5}$ 为某线性方程组的增广矩阵,试问该线性方程组的方程个数和未知数个数分别为多少.

习题 1.2

A 组

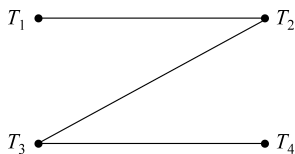
1. 写出下列线性方程组的系数矩阵和增广矩阵:

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ -7x_2 - 6x_3 = -10, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

2. 若一个线性方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, 写出该线性方程组.

3. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ -6 & 0 & z \\ 7 & y & 9 \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ a & b & 8 \\ 7 & 6 & c \end{pmatrix}$ 相等, 试求 x, y, z, a, b, c 的值.

4. (用矩阵表示通信网络) 设某通信网络中, 有 T_1, T_2, T_3, T_4 四台计算机. 在计算机 T_1 和 T_2, T_2 和 T_3 及 T_3 和 T_4 之间有直接通信, 如下图所示.



若令 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & T_i \text{ 与 } T_j \text{ 间有直接通信,} \\ 0, & T_i \text{ 与 } T_j \text{ 间无直接通信} \end{cases} (i, j = 1, 2, 3, 4)$, 试用矩阵表示出该图中的通信网络.

信网络.

B 组

1. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 满足 $a + b = 4, a + c = 2, c + d = 8, 2b + d = 10$, 求矩阵 \mathbf{A} .

2. 利用线性方程组的初等变换将线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$ 化为上三角形方程

组, 并观察相应的增广矩阵的变化.

3. 下列矩阵都是某线性方程组的增广矩阵, 写出对应的线性方程组并求解.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



1.3 矩阵的运算

1.3.1 矩阵的加法

定义 1.5 (矩阵的加法) 设矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$, 称矩阵 $\mathbf{C} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ 为 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的和, 记为 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

注 两个同型矩阵才能相加, 两矩阵相加就是把它们对应位置处的元素相加.

称矩阵 $(-a_{ij})_{m \times n}$ 为 \mathbf{A} 的负矩阵, 记作 $-\mathbf{A}$. 矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的差则定义为

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

可以验证, 矩阵的加法 (matrix addition) 满足下面的运算律:

- (1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (交换律, commutative law);
- (2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ (结合律, associative law);
- (3) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$, 其中 \mathbf{O} 是与 \mathbf{A} 同型的零矩阵;
- (4) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

例 1 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ -5 & -9 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

解

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+4 & -3+(-1) & 8+2 \\ -5+3 & -9+(-2) & 7+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 10 \\ -2 & -11 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2-4 & -3-(-1) & 8-2 \\ -5-3 & -9-(-2) & 7-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -8 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

1.3.2 数与矩阵的乘法

定义 1.6 (数乘) 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是一个 $m \times n$ 矩阵, k 是一个数, 称矩阵 $(ka_{ij})_{m \times n}$ 为数 k 与矩阵 \mathbf{A} 的乘积, 简称数乘 (scalar multiplication), 记作 $k\mathbf{A}$.

由定义 1.6 可知, 数乘 $k\mathbf{A}$ 就是用数 k 乘矩阵 \mathbf{A} 的每一个元素所得到的矩阵. 例如, 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ -5 & -9 & 7 \end{pmatrix},$$

则

$$3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 3 \times (-3) & 3 \times 8 \\ 3 \times (-5) & 3 \times (-9) & 3 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 24 \\ -15 & -27 & 21 \end{pmatrix}.$$

容易验证, 数与矩阵的乘法满足如下运算律, 其中 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为同型矩阵, k, l 为数.

- (1) $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$;
- (2) $(k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$;
- (3) $k(l\mathbf{A}) = (kl)\mathbf{A}$.



1.3.3 矩阵的乘法

定义 1.7 (矩阵的乘法) 设矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times s}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{s \times n}$, 定义矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的乘积为 $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n}$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}, i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n,$$

记作 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

注 对于矩阵的乘法(matrix multiplication), 需注意以下几点:

- (1) 只有第一个矩阵 \mathbf{A} 的列数与第二个矩阵 \mathbf{B} 的行数相同时, \mathbf{AB} 才有意义.
- (2) 乘积矩阵 \mathbf{AB} 的行数等于 \mathbf{A} 的行数, \mathbf{AB} 的列数等于 \mathbf{B} 的列数.
- (3) 乘积矩阵 \mathbf{AB} 的 (i, j) 元 c_{ij} 等于 \mathbf{A} 的第 i 行与 \mathbf{B} 的第 j 列对应元素乘积的和.

例 2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 \mathbf{AB} 与 \mathbf{BA} .

解 设 $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, 则

$$c_{11} = 4 \times (-2) + (-1) \times 0 + 2 \times (-1) = -10, c_{12} = 4 \times 3 + (-1) \times 1 + 2 \times 0 = 11,$$

$$c_{21} = 3 \times (-2) + (-2) \times 0 + 0 \times (-1) = -6, c_{22} = 3 \times 3 + (-2) \times 1 + 0 \times 0 = 7.$$

于是

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -10 & 11 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

同理可得

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

注 注意矩阵的乘法与数的乘法的不同之处.

- (1) 矩阵乘法不满足交换律, 即 \mathbf{AB} 一般不等于 \mathbf{BA} .

首先, \mathbf{AB} 有意义, \mathbf{BA} 不一定有意义. 例如, 设 \mathbf{A} 为 2×2 矩阵, \mathbf{B} 为 2×3 矩阵, 则 \mathbf{AB} 为 2×3 矩阵, 而 \mathbf{B} 与 \mathbf{A} 不能相乘. 其次, 即使 \mathbf{AB} 与 \mathbf{BA} 都有意义, 它们也不一定相等. 例如, 前面的例 2, 虽然 \mathbf{AB} 与 \mathbf{BA} 都有意义, 但它们不是同型矩阵, 所以不可能相等. 又例如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

计算可得

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

尽管 \mathbf{AB} 与 \mathbf{BA} 是同型矩阵, 但它们也不相等.

- (2) 两个非零矩阵的乘积可能为零矩阵. 例如, 上面的例子中, $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}, \mathbf{B} \neq \mathbf{O}$, 但