

# 第3章

## 核衰变中的数学



### 3.1 指数衰减

第2章介绍了不稳定同位素的核衰变物理过程,包括电子俘获、 $\beta^-$ 衰变、 $\beta^+$ 衰变以及其他衰变类型。本章将探讨衰变过程的数学描述。为了说明数学描述的重要性,考虑 $^{125}\text{I}$ 通过电子俘获衰变到Te(碲)的过程。这种同位素可用于前列腺癌的低剂量率近距离治疗和其他方面的应用。为了计算上述应用中的辐射剂量,我们需要知道一段时间后存在的放射性 $^{125}\text{I}$ 的数量(数量越多,剂量率越高)。本章提供了理解此问题的数学框架。

#### 3.1.1 指数式衰减导论

这里我们考虑一种简单情况,即同位素衰变成另一种同位素。如图3.1.1所示,样品中有数量为 $N$ 的不稳定原子核,给定某个时间间隔,我们写为 $\Delta t$ 。在这个时间间隔内,某些原子核发生衰变,衰变的数量我们写成 $\Delta N$ 。衰变过程有两个性质:第一,衰变的数量与样品中原子核的总数成正比(原子核越多,衰变事件就越多);第二,衰变的数量与我们给定的时间间隔 $\Delta t$ 成正比(时间越长衰变越多)。因此,我们可以把这个方程写成 $\Delta N = -\lambda N \Delta t$ 。在这里, $\lambda$ 是衰变常数,代表在总量为 $N$ 的样本中每秒的衰变次数,负号表示原子核数量减少,即它们衰变为其他原子核。我们可以用微积分表示法来替换符号, $\Delta t$ 变成 $dt$ , $\Delta N$ 变成 $dN$ (表示每个变量的微小变化),方程变成 $dN = -\lambda N dt$ ,也可写作 $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ 。此方程有一个解 $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ ,我们把 $N$ 写成 $N(t)$ ,也就是数字 $N$ ,在某个时间 $t$ 的值,这是指数衰减的公式。 $e$ 是一个特殊的数字,是自然对数的底数,即2.71828。当 $t=0$ 时,样品中的核数为 $N_0$ 。这个方程对应的衰减曲线如图3.1.1所示。

活度的指数衰减依赖于衰变常数 $\lambda$ ,衰变常数越大,指数衰减越快。衰变常数由原子核的稳定性决定:不稳定的原子核每秒会有更多的衰变或者具有更大的衰变常数。

衰变曲线的指数形式来源于核衰变过程的独立性和随机性。也就是说,任何一个衰变事件与它之前发生的衰变事件或之后将要发生的衰变事件是完全无关的。在这种情况下,我们可以写出简单的比例方程 $\Delta N = -\lambda N \Delta t$ ,它的解是指数形式。在其他情况下也会出现同样的数学表述,所以有必要思考一下这个表述。

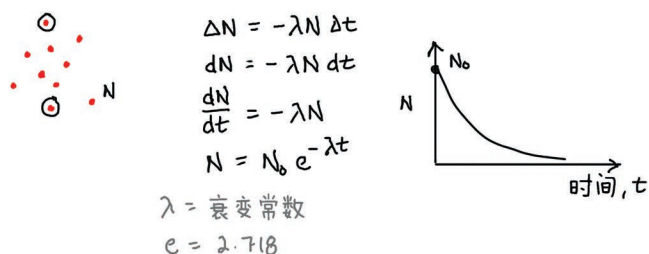


图 3.1.1 核衰变方程

一个样本中有  $N$  个原子核(红色), 其中某些会发生衰变

### 3.1.2 活度和活度单位

原子核的数量  $N$  是很难测量或量化的。比较容易计算的量是其活度, 即每秒的衰变次数, 它可以通过产生的衰变产物来测量(如从同质异能跃迁产生的光子等)。  $A$  是每秒衰变的次数, 可以写成  $A = \frac{dN}{dt}$ , 这个方程的解是  $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ ,  $A(t)$  为  $t$  时刻的活度,  $t$  为 0 时刻的活度为  $A_0$  (图 3.1.2)。活度的国际标准(SI)单位是“每秒对应的衰变次数”, 专用单位是贝可勒尔(Becquerel), 用符号 Bq 表示。另一个常用的单位是居里(Curie), 用符号 Ci 表示。两个活度单位的换算为  $1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$  或  $1 \text{ mCi} = 3.7 \times 10^7 \text{ Bq} = 37 \text{ MBq}$ 。

<p>活度, <math>A</math></p> $A = \frac{dN}{dt} = \lambda N$ $A = A_0 e^{-\lambda t}$ <p>比活度 活度/质量 = <math>\lambda \frac{N_A}{A}</math></p>	<p>单位</p> <p>1 衰变/s = 贝可勒尔 (Bq)</p> <p>1 Ci = <math>3.7 \cdot 10^{10}</math> Bq</p> <p>2 居里</p> <p>1 mCi = 37 MBq</p>
--	---

图 3.1.2 活度

活度是一个可测量的物理量, 定义是每秒对应的衰变次数。活度随时间呈指数衰减

还有一个重要的物理量是比活度, 定义为单位质量对应的活度, 由  $\lambda \frac{N_A}{A}$  给出。比活度表示某一特定放射性同位素的“浓度”, 即对于给定的质量, 该同位素发生了多少次衰变事件。

### 3.1.3 半衰期

从概念上讲, 半衰期是指同位素的活度衰减到其初始活度一半所需的时间, 定义为  $A(t) = \frac{1}{2} A_0 = A_0 e^{-\lambda t}$ , 通过这个方程可以解出时间  $t$ , 如图 3.1.3 所示。我们用符号  $t_h$  来表示这个半衰期, 半衰期与衰变常数  $\lambda$  之间的关系如下:

$$t_h = \frac{0.693}{\lambda} \quad (3.1)$$

衰变常数(和半衰期)由原子核的稳定性决定。不稳定的原子核每秒会有更多的衰变,或有更大的衰变常数 $\lambda$ ,导致更短的半衰期。

有了这些物理量,那么上面的活度方程可以改写为

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-0.693 \cdot t/t_h} \quad (3.2)$$

活度方程可以用另一种形式来改写,注意每经历一个半衰期活度就会减少一半。 $n$ 个半衰期之后,活度将变为

$$A(\text{经过 } n \text{ 个半衰期}) = A_0 (1/2)^n \quad (3.3)$$

半衰期

时间  $A = \frac{1}{2} A_0$   
 $A_0 e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} A_0$   
 $\ln(e^{-\lambda t}) = \ln(\frac{1}{2})$   
 $-\lambda t = -\ln 2$   
 $t_h = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$

经过  $n$  个半衰期:  
 $A = A_0 (\frac{1}{2})^n$

图 3.1.3 半衰期

放射源活度的指数式衰减的强度取决于衰减常数 $\lambda$ 或半衰期 $t_h$ 。不稳定同位素具有较大的衰变常数和较小的半衰期

注意,式(3.3)尽管与式(3.2)有不同的形式,但仍然描述的是指数衰减。人们可以从数学上证明这两个公式是等价的。在下面的习题集和本书其他地方的计算中,将会反复使用式(3.2)和式(3.3),因此很有必要认识和理解它们。

### 3.1.4 平均寿命

最后要考虑的是平均寿命。虽然有些难以理解,但它对放射性粒子永久性植入的剂量计算很有帮助。

首先考虑一个放射源,总原子核个数为 $N_0$ 。在这个放射源的生命周期中,会有 $N_0$ 次总衰变,也就是放射源衰变到其他原子核,直到没有原来的原子核剩下。现在,出于概念上的考虑,考虑一个“假源”。这个假源不经历指数衰减,而是有一个恒定活度,可以写成 $A = \lambda N_0$ 。在总时间 $\tau$ 内,这个源衰变的次数将是 $\lambda N_0 \tau$ 。如果我们设定 $\lambda N_0 \tau$ 数值等于来自真实源( $N_0$ )的衰减总数,可得到方程: $\lambda N_0 \tau = N_0$ 。解这个方程,会发现 $\tau = \frac{1}{\lambda}$ ,也可以写成

$$\tau = \frac{t_h}{0.693}, \text{ 或者}$$

$$\tau = 1.44 t_h \quad (3.4)$$

因此,平均寿命 $\tau$ 是衰变次数等于具有恒定活度放射源的初始活度 $A_0$ 所对应的时间。这对永久植入放射源的剂量计算很有帮助(见4.2.5节)。



## 3.2 同位素的平衡

本章描述了一种同位素衰变为子产物(另一种同位素)的情况。然而,在一些医学物理应用中,情况更加复杂。可能有一种同位素会衰变成另一种同位素,而另一种同位素又会衰变成第三种同位素,以此类推。也就是说,可能会有一连串的衰变。随着时间的推移,这些同位素的活度将达到平衡。这种情况将在视频中进行更详细的讨论。

### 进阶阅读

Khan, F.M. and J.P. Gibbons. 2014. *Khan's The Physics of Radiation Therapy*. 5th Edition. Chapter 2. Philadelphia, PA: Wolters Kluwer.

McDermott, P.N. and C.G. Orton. 2010. *The Physics of Radiation Therapy*. Chapter 3. Madison, WI: Medical Physics Publishing.

Podgorsak, E.B. 2016. *Radiation Physics for Medical Physicists*. 3rd Edition. Chapter 10. Switzerland: Springer.

### 习题

注: \* 表示问题较难。

相关的半衰期参见表 2.2.2。

- 哪个源的活度最高? ( )
  - 1 mCi  $^{125}\text{I}$
  - 1 mCi  $^{131}\text{I}$
  - 1 mCi  $^{192}\text{Ir}$
  - 都一样
- 在 PET 扫描中,注射 10 mCi  $^{18}\text{F}$ -FDG,对应的活度(以 Bq 为单位)是多少? ( )
  - $2.70 \times 10^{-13}$
  - $2.70 \times 10^{-10}$
  - $3.70 \times 10^8$
  - $3.70 \times 10^{11}$
- 采购了一个活度为 38 mCi 的  $^{137}\text{Cs}$  放射源,10 年后的活度是多少? ( )
  - 12.6 mCi
  - 27.3 mCi
  - 30.2 mCi
  - 37.1 mCi
- 一个  $^{60}\text{Co}$  外照射治疗机的初始剂量率为 2 Gy/min,安装 10 年后的参考剂量率是多少? ( )
  - 0.30 Gy/min
  - 0.54 Gy/min
  - 1.75 Gy/min
  - 3.80 Gy/min
- 根据规定,放射性同位素在 10 个半衰期后,可以在没有特别预防措施的情况下进行废物处理。0.5 mCi  $^{125}\text{I}$  放射源经过 10 个半衰期后的活度是多少? ( )
  - 0.02  $\mu\text{Ci}$
  - 0.49  $\mu\text{Ci}$
  - 0.02 mCi
  - 0.49 mCi
- 根据 NRC NUREG-1556 规定,如果 1 m 处测量到的辐射强度小于 1 mR/h,进

行 $^{125}\text{I}$ 植入治疗的患者可以出院。如果植入后测量的照射量率为 $1.1\text{ mR/h}$ ,那么从技术上讲,患者还需要多久才能出院? ( )

- a. 2.3 min      b. 5.9 d      c. 8.2 d      d. 54.0 d

7. 在 $^{223}\text{RaCl}_2$  (Xofigo)治疗中,如果注射 $130\ \mu\text{Ci}$ 药量,总共会发生多少次衰变? 假设整个过程没有 $^{223}\text{RaCl}_2$ 排出体外。( )

- a. 7692      b.  $8.43 \times 10^7$       c.  $6.84 \times 10^{12}$       d.  $4.74 \times 10^{18}$

\*8.  $^{90}\text{Sr}$ 的初始活度是 $10\text{ mCi}$ ,当 $^{90}\text{Sr}$ 与其子同位素 $^{90}\text{Yr}$ 达到平衡时, $^{90}\text{Sr}$ 的活度是多少? (形式见视频)( )

- a. 1 mCi      b. 5 mCi      c. 10 mCi      d. 15 mCi

\*9. 证明活度的两个公式是等价的:  $A = A_0 e^{-0.693 \cdot t/t_h}$  和  $A = A_0 (1/2)^n$ 。其中 $n$ 是半衰期数。

10. 描述如何用 $^{137}\text{Cs}$ 来确定陈年葡萄酒的年份。(提示:  $^{137}\text{Cs}$ 是 $^{235}\text{U}$ 核裂变的副产物)

# 第4章

## 近距离治疗



### 4.1 近距离治疗放射源和同位素

前几章我们重点介绍了一些基本的物理概念,如原子结构、原子核和不稳定同位素的衰变等。本章将介绍它们在治疗中的应用——近距离治疗,即通过向组织中植入放射源而进行的治疗。本章仅对近距离治疗进行概念性的介绍,详细内容将在后续章节中展开。在第26章中,我们还将介绍近距离治疗的实际示例(如前列腺癌粒子植入和针对妇科肿瘤的高剂量率近距离治疗)。

#### 4.1.1 常用同位素:低剂量率/高剂量率近距离治疗

近距离治疗可以采用两种不同的方式:低剂量率(low-dose rate, LDR)近距离治疗,即剂量率小于 2 Gy/h;高剂量率(high-dose rate, HDR)近距离治疗,即剂量率大于 12 Gy/h。国际辐射单位与测量委员会(ICRU)第38号报告给出了这些定义和标准(Wyckoff et al., 1985)。

最常见的近距离治疗方法是使用放射性同位素,放射性同位素会发生衰变并发射粒子。最常用的近距离放射源通过发射光子来沉积能量。LDR治疗中使用的同位素半衰期相对较短,发射光子的能量相对较低,而HDR治疗中使用的同位素半衰期稍长,发射光子的能量相对较高。LDR植入通常是永久性的(即放射源植入患者体内并留在体内),而HDR植入是暂时性的(即导管插入患者体内,放射源暂时植入这些导管以沉积能量)。

同位素示例如图4.1.1所示。LDR治疗中使用的两种同位素是 $^{121}\text{I}$ 和 $^{103}\text{Pd}$ ,它们都通过电子俘获的方式衰变并发射低能光子。 $^{103}\text{Pd}$ 的半衰期略短于 $^{121}\text{I}$ ,发射的光子能量略低。这两种放射源均用于前列腺癌的近距离治疗(见第26章)。在HDR治疗中,一种常用的同位素是 $^{192}\text{Ir}$ ,它首先通过 $\beta^-$ 衰变为 $^{192}\text{Ro}$ 的激发态,然后通过发射不同能量的光子衰变为基态,光子能量的平均值为380 keV。

#### 4.1.2 低剂量率放射源的设计

许多近距离治疗应用依赖于封装在“粒子”中的放射源,粒子是一种约米粒大小的小型金属输送容器(图4.1.2)。这种设计的目的在于封装放射性同位素,并且过滤掉不需要的

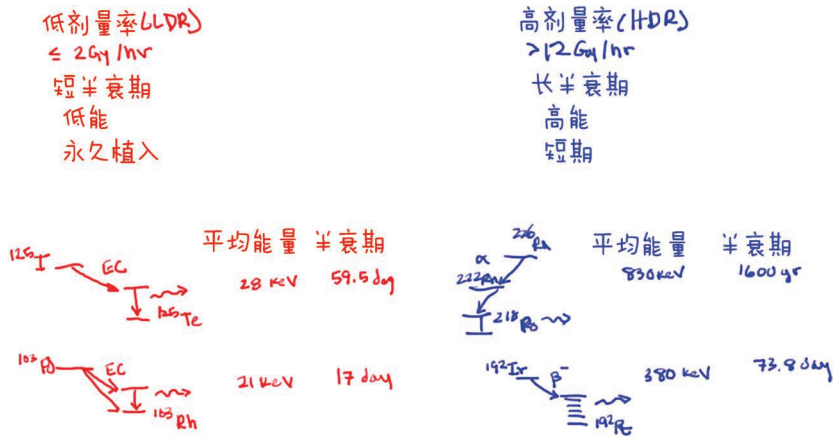


图 4.1.1 LDR 和 HDR 近距离治疗以及各自的示例同位素

粒子(如<sup>192</sup>Ir 发生 β<sup>-</sup> 衰变时所产生的电子,它在治疗上没有用处),此外粒子可以作为射线成像标记的载体,在 X 射线或 CT 图像上显示。



图 4.1.2 近距离治疗粒子(来自维基共享开源资源)

图 4.1.3 给出了一个此类源的示例,即 Amersham 公司作为 6711 型粒子出售的<sup>125</sup>I 粒子。放射性同位素沉积在银棒表面,封装在 50 μm 厚的钛包壳中,钛包壳可以保护源并吸收同位素 β<sup>-</sup> 衰变中产生的俄歇电子。银棒用作射线成像标记。注意,源的尺寸较小,设计用于 17 号或 18 号针头。

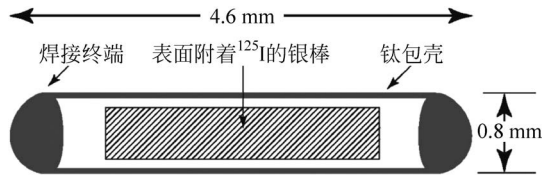


图 4.1.3 LDR 近距离治疗源示例

Amersham 公司 6711 型号的<sup>125</sup>I 粒子(来自美国医学物理师协会第 43 号报告更新版, Rivard et al. 2004.)

图 4.1.4 展示了 LDR 近距离治疗源的另一个示例,即 Theragenics 公司的 200 型的  $^{103}\text{Pd}$  粒子,同位素涂覆在一端的石墨颗粒上。铅标记包含在其中,用于可视化射线成像。

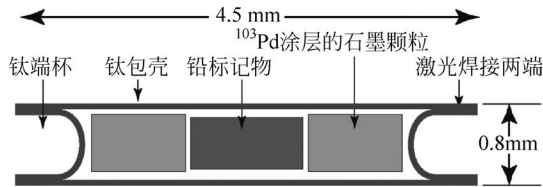


图 4.1.4 LDR 近距离治疗源示例

Theragenics 公司型号 200 的  $^{103}\text{Pd}$  粒子(来自美国医学物理师协会第 43 号报告更新版, Rivard et al. 2004.)

### 4.1.3 高剂量率放射源的设计

图 4.1.5 展示了 HDR 近距离治疗源的示例,即 Nucletron 公司的  $^{192}\text{Ir}$  源。该源尺寸较小,设计把它安装在导管中,并封装在不锈钢包壳中,源的包壳被激光焊接到不锈钢电缆上。电缆允许源暂时插入导管,然后使用远程后装机移除(见第 26 章)。使用远程后装技术的原因是安装过程放射性活度非常高(安装时约 10 Ci)。因此,该程序不能由工作人员手动完成,必须在远程控制放射源的屏蔽室中执行。

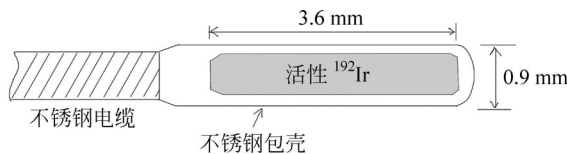


图 4.1.5 HDR 近距离治疗源示例

Nucletron 公司的  $^{192}\text{Ir}$  源(改编自 G. Douysset et al. 2008. Comparison of air kerma standards of LNE-LNHB and NPL for  $^{192}\text{Ir}$  HDR brachytherapy sources; EUROMET Project No 814. Phys Med Biol 53. N85-N97 doi: 10.1088/031-9155/53/6/N02.)

### 4.1.4 其他形式的近距离治疗

注意,并非所有的近距离治疗都使用粒子,还有其他形式的近距离治疗:

(1) 电子近距离治疗(eBT)。该治疗的实现方式有很多种,如将微型 X 射线管插入导管(如 Axxent<sup>®</sup>, Xofigo/iCad Inc.),或封装在球形施源器中的电子靶上(Intrabeam<sup>®</sup>, Carl Zeiss Meditec AG)。更多信息参见美国医学物理学家协会(The American Association of Physicists in Medicine, AAPM)第 182 号报告。

(2) 放射性核素治疗。有时被归类为近距离治疗,这种治疗是通过将非密封的源注射到患者体内来完成的。包括用于甲状腺癌的  $^{131}\text{I}$ 、用于骨转移的  $^{223}\text{Ra}$ -氯化物和用于肝脏的  $^{90}\text{Yr}$  涂层微球等不同的形式。更多信息参见第 26 章。



## 4.2 近距离治疗照射量和剂量

在临床应用中使用近距离放射源的关键是理解其产生的剂量。第 3 章介绍了源活度的

概念,即每秒的衰变数,但这并没有直接告诉我们组织中剂量的任何信息。为了从活度得到剂量,我们必须计算照射量这一中间物理量。即活度( $A$ )→照射量( $X$ )→剂量( $D$ )。这样,知道了放射源的活度,就可以计算剂量。本节将对此主题进行介绍。

### 4.2.1 照射量

照射量的概念不仅对近距离治疗很重要,而且对医学物理中的其他应用同样重要。为理解照射量,考虑图 4.2.1 中所示的实验。使用光子源(图中绿色部分)照射充满空气的腔室(图中黑色圆圈)。这些光子可能来自近距离治疗源或其他源,当光子与腔室内的空气相互作用时,会使空气电离,即导致电子从空气中的分子中释放。这一过程在第 5 章有详细的描述。在这个空腔里,我们放置了一个高压电极(如图 4.2.1 中红色所示)。高压电极会在腔室中产生电场。电子被电场加速,流向电极并被电极收集。最终在电极上收集到电荷(符号“ $Q$ ”)。电荷的国际单位是库仑(C)。

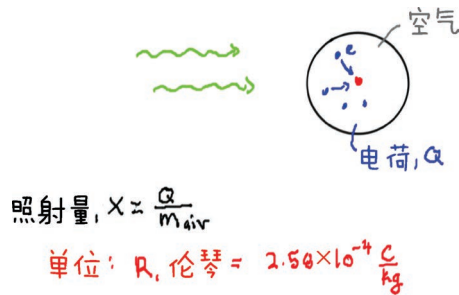


图 4.2.1 照射量的定义

在此演示实验中,光子(绿色)电离电离室(黑色圆圈)中的空气分子,导致在腔室中产生电荷  $Q$ 。

照射量定义为腔室中每单位质量的空气产生的电荷,并用符号  $X$  表示:

$$\text{照射量, } X = \frac{Q}{m_{\text{air}}} \quad (4.1)$$

如果我们知道腔室中的空气质量(或通过校准得出),并测量电荷,我们就可以知道入射光子产生的照射量。照射量的单位是伦琴(R),定义为  $2.58 \times 10^{-4} \text{ C/kg}$ 。在旧的单位制(即非国际单位制、厘米-克-秒单位制)下,1R 定义为  $1 \text{ esu/cm}^3$ 。

### 4.2.2 近距离治疗放射源的照射量率

为理解活度与剂量的关系,我们现在考虑近距离放射源的照射量。

放射性活度( $A$ ) → 照射量( $X$ ) → 剂量率( $D$ )

对于近距离治疗,我们通常不考虑照射量,而是考虑照射量率,不考虑剂量,而是考虑剂量率。这是因为近距离放射源是连续发射射线的,其量用活度来表征,活度也是一个比率(即每秒的衰变数)。照射量率可以写成  $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ ,即单位时间( $dt$ )内的照射量变化( $dX$ )。

注意,物理量上的点表示每单位时间的变化(例如, $\dot{D}$  是剂量率)。

照射量率与活度除以距离  $r$  的平方成正比:  $\dot{X} = \Gamma \frac{A}{r^2}$ 。比例常数  $\Gamma$  称为照射量率常

数,不同源的照射量率常数不同,因为不同源发射的光子能量不同(见图 4.1.1)。相同活度的不同近距离放射源产生的照射量率不同,这是一个关键概念。发射高能光子的源(如<sup>192</sup>Ir)在空气中产生的电离比发射低能光子的源(如<sup>103</sup>Pd)多得多。照射量率常数的单位是 R cm<sup>2</sup>/(h · mCi)。一些示例值如表 2.2.2 所示。历史上活度的曾用单位是毫克镭当量(mg-Ra-Eq),即与该放射源具有相同照射量的镭的质量。以 mg-Ra-Eq 为单位表示源的活度可以简单地通过如下计算得到, $\frac{\Gamma_{\text{source}}}{\Gamma_{\text{Ra}}}A_{\text{source}}$ (图 4.2.2)。照射量率的概念很重要,但它不再直接用于近距离治疗剂量计算,因为它已被 4.2.3 节所示的新公式所取代。

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \quad \text{目标: } A \rightarrow \text{照射量} \rightarrow \text{剂量} \quad \text{(在空气中)}$$

$$\text{照射量率 } \dot{X} = \Gamma \frac{A}{r^2} \quad \Gamma \text{ 照射量率常数}$$

( $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ )

eg. Ra : 8.25 R cm<sup>2</sup>/hr/mCi  
 ≈ R cm<sup>2</sup>/hr/mg

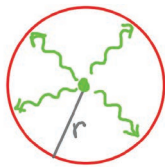
$$\text{mg Ra Eq} = \frac{\Gamma_{\text{source}}}{\Gamma_{\text{Ra}}} \cdot A_{\text{source}}$$

图 4.2.2 近距离治疗放射源的照射量

### 4.2.3 平方反比衰减

在上述等式中,我们注意到照射量取决于距源距离的平方分之一,1/r<sup>2</sup>,即与距离的平方成反比。平方反比衰减是放射治疗物理学中的一个关键概念。

平方反比的概念如图 4.2.3 所示。源在所有方向上均匀地发射光子(如图中绿色部分)。有一些强度(即每秒光子数)的光子从源中发射。我们将其记为 I<sub>0</sub>。现在我们要计算出距离源 r 处每单位面积的光子强度。单位面积的强度(或“通量”)将决定照射量和其他量。为此,我们在距离源周围 r 处画一个球壳,面积为 4πr<sup>2</sup>。该球壳每单位面积的强度可以表示为  $\frac{I_0}{4\pi r^2}$ 。也可写成  $\frac{C}{r^2}$ ,这里 C 是一个常数。这就是平方反比衰减的本质,单位面积的强度下降为 1/r<sup>2</sup>。



在 r 处的强度 = # γs / 面积

$$I_0 / \text{Area} = I_0 / 4\pi r^2 = \frac{C}{r^2}$$

图 4.2.3 平方反比衰减

距离源 r 处的球壳面积为 4πr<sup>2</sup>。因此,单位面积的强度正比于 1/r<sup>2</sup>