新高考数学

你必须掌握的基础题和中档题

张杨文　兰师勇　王成江
主编

清華大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书基于作者团队多年教学研究和考前辅导经验，历时三年，对历年高考真题与教材中的基础题与中档题进行了认真梳理，找出了它们反复出现、高度重合的部分，同时将新教材中出现更新的部分重点提取。

本书严格按照绝大多数高中的数学一轮复习顺序来编排，大部分的节都由知识点填空、基础题和中档题三个部分组成。书中每道题都配有免费视频讲解，详细的文字解析加上耐心的视频讲解能让读者将这些题彻底弄懂并掌握。

图书在版编目(CIP)数据

新高考数学你必须掌握的基础题和中档题 / 张杨文，兰师勇，王成江主编. —北京：清华大学出版社，2022.11
ISBN 978-7-302-62184-3

Ⅰ. ①新… Ⅱ. ①张… ②兰… ③王… Ⅲ. ①中学数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 214328 号

责任编辑：汪 操
封面设计：袁 芳
责任校对：王淑云
责任印制：朱雨萌

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084
社 总 机：010-83470000 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：保定市中画美凯印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：210mm×285mm 印 张：26.25 字 数：634 千字
版 次：2022 年 12 月第 1 版 印 次：2022 年 12 月第 1 次印刷
定 价：79.00 元（全两册）

产品编号：099540-01

编　委　会

“高掌”说

《新高考数学你真的掌握了吗？平面几何与三角函数》《新高考数学你真的掌握了吗？立体几何与概率统计》……如此长的书名是否足够吸引眼球？其实不仅是书名惹眼, 其内容也相当精彩。读者朋友爱不释手, 称之为“高掌”的这套书, 一经问世便被炒得沸沸扬扬, 多年来不断获得各种赞誉。“高掌”助力绩优的同学筑梦高考数学登峰, 同时“非本心地”却落了个“难度大”的美名。

读者朋友们迫切期待“高掌”团队能创作一套针对高考数学基础题和中档题的书, 来满足全国多个地区更广泛的备考需求, 但要编写出让大家满意的这样一本书却并非易事。为此, “高掌”团队苦心钻研三年, 认真梳理历年高考真题与教材中的基础题与中档题, 凝练它们中反复出现、高度重合的考点, 同时将新教材中更新的部分重点提取, 分类加工, 并辅以详尽解析, 最终创作出了这本《新高考数学你必须掌握的基础题与中档题》。

本书的特色可以用八个字来描述: 基础、中档, 真题、教材。

对于基础比较薄弱的同学, 专注基础题与中档题非常重要, 它们是你登上大学这艘人生航船的“船票”。对于基础比较好的同学, 也不能完全跳过基础题和中档题的练习, 因为它们承载了高考中大部分的考查内容, 小心马失前蹄。我们认为, 通过对基础题和中档题的强化训练, 可以提升答题的正确率和速度。

真题的重要性不必多说, 高考考什么, 我们就练什么, 历年真题无疑是最适合的一类题。而教材是知识的来源, 是每年高考命题范围和梯度的重要参考, 尤其是高考数学大纲取消后, 教材的地位就显得更为重要了。遗憾的是, 它没能引起很多同学的足够重视, 其原因或许是这些同学并不知道教材上哪些是重点。

本书严格按照绝全国大多数地区高中数学一轮复习的顺序编排, 大部分的节都由知识点填空、基础题和中档题三个部分组成。其中知识点填空看起来简单, 实际上对夯实基础、查缺补漏非常关键; 基础题和中档题则循序渐进, 可以帮助同学不漏过本节的所有易错点。很多题的答案详解中都有我们精心提炼出的【题型归纳】, 短小精悍, 触类旁通, 希望同学们能在做题中养成及时总结的好习惯, 这是高考复习的点睛之笔。

关于如何做题, 尤其是如何刷本书中的题, 我们给出如下建议:

（1）如果一道题, 看到就有思路, 也能做对, 那就将它标上记号 0, 表示将来无需重复刷这种自己已经掌握了的题。

（2）如果一道题, 看到后有一定的思路, 但是做错了, 根据我们的经验, 这样的错题至少还需要再做 3 遍才能掌握, 于是将它标上记号 3(表示还需要做 3 遍)。利用书上提供的解析, 将这道错题搞懂, 然后立即脱离解析, 将它的步骤与答案独立完整地写一遍, 保证没有错误。大约三天后再将这道错题重刷, 如果对了, 将前面的数字 3 改为 2; 大约三周后, 再刷一次, 如果对了, 就将数字改为 1; 三个月后, 再刷一次, 如果对了, 就将数字改为 0, 此时恭喜你已经将一道错题通过自己的努力掌握了。而如果上述的复刷过程中有任何一次没有做对, 那就重新来一次, 直到连续三次都做对为止。

（3）如果一道题, 看到后过了 3 分钟还没有任何思路, 请暂时放弃并标上记号 ∞, 等到把书里面所有标记为 1, 2, 3 的题全部归零后, 最后再反复结合解析来逐一突破。

（4）如果几乎每道题看到后都没思路, 那就先将本书每节中归纳的重点知识逐一夯实, 认真复习并填写完毕, 再做基础题, 待所有基础题完成后再回头做中档题。

踔厉前进, 即便遭遇逆水行舟, 重复刷错题也会成为最强有力的船桨, 助大家突破阻力, 终到彼岸。为此, 本书特赠错题本, 方便同学整理错题使用。第一次错, 或许不是你的错, 第二次错, 肯定是你的错, 希望同学们别让自己有机会一错再错。

本书中每道题都配有免费视频讲解, 详细的文字解析加上耐心的视频讲解, 定能让同学彻底理解并掌握高考数学之要义。精诚所至, 金石为开。

最后, 关于本书的建议和意见, 以及与全国各地高中教师和同学的交流学习, 尽在高考 QQ 群：134953628, 期待你的加入！

目　　录

第 1 章　集合与常用逻辑用语、不等式

1.1 集 合

1.1.1 知识逐点夯实

1. 集合与元素

(1) 集合中元素的三个特征:______、______、______.

(2) 元素与集合的两种关系: 属于, 记为______; 不属于, 记为______.

(3) 集合的三种表示方法:______、______、______.

(4) 五个特定的集合

集合	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	______	$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$	______	______	______

2. 集合间的基本关系

(1) 子集: 一般地, 对于两个集合 A, B, 如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作______(或 $B \supseteq A$).

(2) 真子集: 如果集合 A 是集合 B 的子集, 且集合 B 中至少有一个元素不属于 A, 则称 A 是 B 的真子集, 记作______(或 $B \supsetneqq A$).

(3) 集合相等: 如果 $A \subseteq B$, 并且 $B \subseteq A$, 则______.

(4) 空集: 不含任何元素的集合, 记作______. 规定: 空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集.

3. 集合的基本运算

(1) 交集: 一般地, 由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合, 称为 A 与 B 的交集, 记作______, 即 $A \bigcap B = \{x|x \in A且x \in B\}$.

(2) 并集: 一般地, 由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素组成的集合, 称为 A 与 B 的并集, 记作 $A \bigcup B$, 即 $A \bigcup B =$ __________.

(3) 补集: 对于一个集合 A, 由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集, 简称为集合 A 的补集, 记作______, 即 $\complement_U A =$ ______.

4. 常用的性质

(1) 子集的性质: $A \subseteq A$, $\varnothing \subseteq A$, $A \bigcap B \subseteq A$, $A \bigcap B \subseteq B$.

(2) 交集的性质: $A \bigcap A = A$, $A \bigcap \varnothing = \varnothing$.

(3) 并集的性质: $A \subseteq (A \bigcup B)$, $B \subseteq (A \bigcup B)$.

(4) 补集的性质: $A \bigcup (\complement_U A) = U$, $A \bigcap (\complement_U A) = \varnothing$, $\complement_U(\complement_U A) = A$.

$(\complement_U A) \bigcup (\complement_U B) = \complement_U (A \bigcap B)$.

$(\complement_U A) \bigcap (\complement_U B) = \complement_U (A \bigcup B)$.

(5) 子集的个数: 含有 n 个元素的集合共有 2^n 个子集, 其中有 $2^n - 1$ 个真子集.

(6) 等价关系: $A \bigcap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$, $A \bigcup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

1.1.2　基础题

1. (2021 新高考 I 卷 1) 设集合 $A=\{x|-2<x<4\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, 则 $A\bigcap B=$ (　　).

A. $\{2\}$　　B. $\{2,3\}$

C. $\{3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. (2017 新课标全国 Ⅱ 卷文 1) 设集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $A\bigcup B=$ (　　).

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{1,2,3\}$

C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,3,4\}$

3. (2016 新课标全国 Ⅲ 卷文 1) 设集合 $A=\{0,2,4,6,8,10\}$, $B=\{4,8\}$, 则 $\complement_A B=$ (　　).

A. $\{4,8\}$

B. $\{0,2,6\}$

C. $\{0,2,6,10\}$

D. $\{0,2,4,6,8,10\}$

4. (2013 大纲卷理 1) 设集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5\}$, $M=\{x|x=a+b,a\in A,b\in B\}$, 则 M 中元素的个数为 (　　).

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

5. (2007 全国 I 卷理 5) 设 $a,b\in\mathbf{R}$, 集合 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\dfrac{b}{a},b\right\}$, 则 $b-a=$ (　　).

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

6. (2021 新课标全国乙卷理 2) 已知集合 $S=\{s|s=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$, $T=\{t|t=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$, 则 $S\bigcap T=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. S　　C. T　　D. $\mathbf{Z}$

7. (2011 辽宁卷理 2) 已知 M,N 为集合 I 的非空真子集, 且 M,N 不相等, 若 $N\bigcap(\complement_I M)=\varnothing$, 则 $M\bigcup N=$(　　).

A. M　　B. N　　C. I　　D. $\varnothing$

8. (人教 B 版必修第一册 P19 练习 BT4) 设全集 $U=\{2,4,a^2\}$, 集合 $A=\{4,a+3\}$, $\complement_U A=\{1\}$, 则实数 a 的值为 ______.

9. (人教 B 版必修第一册 P19 练习 BT2 改编) 已知集合 $A=\{a,b,c\}$, 满足条件 $A\bigcap C=C$ 的集合 C 的个数有 ______ 个.

10. (1992 全国卷理 21 改编) 设含有 10 个元素的集合 A 的非空真子集数为 T, 则 T 的值为 ______.

11. (2013 山东卷文 2) 已知集合 A,B 均为全集 $U=\{1,2,3,4\}$ 的子集, 且 $\complement_U(A\bigcup B)=\{4\}$, $B=\{1,2\}$, 则 $A\bigcap(\complement_U B)=$(　　).

A. $\{3\}$　　B. $\{4\}$

C. $\{3,4\}$　　D. $\varnothing$

12. (2013 新课标全国 I 卷理 1) 已知集合 $A=\{x|x^2-2x>0\}$, $B=\{x|-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\}$, 则 (　　).

A. $A\bigcap B=\varnothing$　　B. $A\bigcup B=\mathbf{R}$

C. $B\subseteq A$　　D. $A\subseteq B$

1.1.3 中档题

1. (2006 江苏卷理 7) 若 A,B,C 为三个集合,$A\bigcup B=B\bigcap C$, 则一定有 (　　).

A. $A\subseteq C$　　B. $C\subseteq A$

C. $A\neq C$　　D. $A=\varnothing$

2. (人教 B 版必修第一册 P46 练习 BT5) 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x|ax=1\}$, 若 $B\subseteq A$, 则实数 a 的取值集合为 ______.

3. (人教 B 版必修第一册 P21 习题 1-1CT1) 已知集合 $A=\{1,3,m\}$, $B=\{1,m^2\}$, $A\bigcup B=A$, 则 m 的取值集合为 ______.

4. (2004 湖南卷理 9 改编) 设集合 $M=\{x|\sqrt{2ax-1}<3\}$, $2\notin M$, 则实数 a 的取值范围是 (　　).

A. $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{2}\right)$

B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right)\bigcup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

C. $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{2}\right)$

D. $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]\bigcup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

5. (人教 B 版必修第一册 P21 习题 1-1BT6 改编) 已知 $A=[-2,5]$, $B=[m+1,2m-1]$, 若 $B\subseteq A$, 则实数 m 的取值范围为 ______.

6. (2010 天津卷理 9) 设集合 $A=\{x||x-a|<1,x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x||x-b|>2,x\in\mathbf{R}\}$, 若 $A\subseteq B$, 则实数 a,b 必须满足 (　　).

A. $|a+b|\leqslant 3$　　B. $|a+b|\geqslant 3$

C. $|a-b|\leqslant 3$　　D. $|a-b|\geqslant 3$

7. (人教 B 版必修第一册 P19 练习 BT5) 已知区间 $A=(2,4)$, $B=(a,5)$, 若 $A\bigcup B=(2,5)$, 则实数 a 的取值范围为______.

8. (1999 全国卷理 1) 如图 1-1 所示,I 是全集, M,P,S 是 I 的 3 个子集, 则阴影部分所表示的集合是 (　　).

A. $(M\bigcap P)\bigcap S$

B. $(M\bigcap P)\bigcup S$

C. $(M\bigcap P)\bigcap(\complement_I S)$

D. $(M\bigcap P)\bigcup(\complement_I S)$

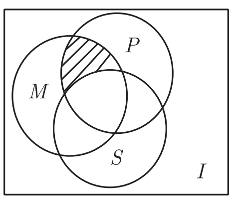


图 1-1

9. (人教 A 版必修第一册 P14 习题 1.3T6) 已知全集 $U=A\bigcup B=\{x\in\mathbf{N}|0\leqslant x\leqslant 10\}$, $A\bigcap(\complement_U B)=\{1,3,5,7\}$, 则集合 $B=$______.

10. (人教 B 版必修第一册 P14 练习 BT5 改编) 设全集 U 为自然数集 $\mathbf{N}$, $E=\{2n|n\in\mathbf{N}\}$, $F=\{4n|n\in\mathbf{N}\}$, 那么集合 $\mathbf{N}$ 可表示成 (　　).

A. $E\bigcap F$　　B. $(\complement_U E)\bigcup F$

C. $E\bigcup(\complement_U F)$　　D. $(\complement_U E)\bigcap(\complement_U F)$

1.2　充分条件与必要条件、全称量词与存在量词

1.2.1　知识逐点夯实

1．充分条件、必要条件与充要条件

(1) 如果 $p\Rightarrow q$, 则 p 是 q 的______条件, q 是 p 的______条件.

(2) 如果既有 $p\Rightarrow q$, 又有 $q\Rightarrow p$, 记作 $p\Leftrightarrow q$. 则 p 是 q 的______条件.

2．全称量词与全称量词命题

(1) 全称量词: 短语“所有的”“任意一个”等在逻辑中通常叫作全称量词.

(2) 全称命题: 含有全称量词的命题.

(3) 全称命题的符号表示: 形如“对 M 中任意一个 x, 有 $p(x)$ 成立”的命题, 用符号简记为______.

3．存在量词与存在量词命题

(1) 存在量词: 短语“存在一个”“至少有一个”等在逻辑中通常叫作存在量词.

(2) 存在量词命题: 含有存在量词的命题.

(3) 存在量词命题的符号表示: 形如“存在 M 中的元素 x_0, 有 $p(x_0)$ 成立”的命题, 用符号简记为______.

4．全称量词命题与存在量词命题的否定

(1) 全称量词命题:$\forall x \in M$, $p(x)$, 它的否定:______.

(2) 存在量词命题:$\exists x \in M$, $p(x)$, 它的否定:______.

1.2.2 基础题

1. (人教 A 版必修第一册 P35 复习参考题 1T7(1)) 命题“$\forall a \in \mathbf{R}$, 一元二次方程 $x^2-ax-1=0$ 有实根”的真假为 ______.(填“真”或“假”).

2. (2015 山东理 12) 若“$\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right], \tan x \leqslant m$”是真命题, 则实数 m 的最小值为 ______.

3. (人教 B 版必修第一册 P29 练习 BT3) 已知区间 $M=[a, a+1]$, 且“$\forall x \in M, x+1>0$”是真命题, 则实数 a 的取值范围是 ______.

4. (人教 A 版必修第一册 P29 习题 1.5T3(3)) 命题“$\exists x \in \mathbf{R}, x+1 \geqslant 0$”的否定为 ______.

5. (2016 浙江卷理 4) 命题“$\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $n \geqslant x^2$”的否定形式是 (　　).

A. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $n<x^2$

B. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $n<x^2$

C. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $n<x^2$

D. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $n<x^2$

6. (2020 天津卷理 2) 设 $a \in \mathbf{R}$, 则“$a>1$”是“$a^2>a$”的 (　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. (2010 广东卷理 5) “$m < \frac{1}{4}$” 是 “一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有实数解” 的 (　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. (2015 湖南卷理 2) 设 A, B 是两个集合, 则 “$A \bigcap B = A$” 是 “$A \subseteq B$” 的 (　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. (2015 四川卷文 4) 设 a, b 为正实数, 则 “$a > b > 1$” 是 “$\log_2 a > \log_2 b > 0$” 的 (　　).

A. 充要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

10. (2011 天津卷文 4) 设集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x - 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x < 0\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} | x(x-2) > 0\}$, 则 “$x \in A \bigcup B$” 是 “$x \in C$” 的 (　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

11. (2011 大纲卷理 3) 下列四个条件中, 使 $a > b$ 成立的充分而不必要的条件是 (　　).

A. $a > b + 1$　　B. $a > b - 1$

C. $a^2 > b^2$　　D. $a^3 > b^3$

12. (人教 B 版必修第一册 P36 习题 1-2BT5) 已知 $A = (-\infty, a]$, $B = (-\infty, 3)$, 且 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围是 ______.

1.2.3　中档题

1. (人教 B 版必修第一册 P26 练习 BT4(1)) 已知 “$\forall x \in [a, +\infty)$, $x^2 \geqslant 1$” 是真命题, 则实数 a 的取值范围是 ______.

2. (人教 B 版必修第一册 P26 练习 BT4(2)) 已知“$\exists x \in (-\infty, a]$, $x^2 = 1$”是假命题, 则实数 a 的取值范围是 ______.

3. (1988 全国卷理 11) 设命题甲: $\triangle ABC$ 的一个内角为 60°. 命题乙: $\triangle ABC$ 的三内角的度数成等差数列, 那么 (　　).

A. 甲是乙的充分条件, 但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件, 但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

4. (2019 北京卷文 6) 设函数 $f(x) = \cos x + b\sin x$(b 为常数), 则“$b = 0$”是“$f(x)$ 为偶函数”的 (　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. (1991 全国卷文 11) 设甲、乙、丙是三个命题. 如果甲是乙的必要条件; 丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件, 那么 (　　).

A. 丙是甲的充分条件, 但不是甲的必要条件

B. 丙是甲的必要条件, 但不是甲的充分条件

C. 丙是甲的充要条件

D. 丙既不是甲的充分条件, 也不是甲的必要条件

6. (2005 湖北卷理 2 改编-多选题) 对于任意实数 a, b, c, 下列说法正确的是 (　　).

A.“$a = b$”是“$ac = bc$”的充要条件

B.“$a + 5$ 是无理数”是“a 是无理数”的充要条件

C.“$a > b$”是“$a^2 > b^2$”的充分条件

D.“$a < 5$”是“$a < 3$”的必要条件

7. (2011 湖北卷理 9) 若实数 a, b 满足 $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, 且 $ab = 0$, 则称 a 与 b 互补, 记 $\varphi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b$, 那么 $\varphi(a, b) = 0$ 是 a 与 b 互补的 (　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. (人教 B 版必修第一册 P40 复习题 C 组 T5) 设 U 为全集,A, B 是集合, 则“存在集合 C 使得 $A \subseteq C$, $B \subseteq (\complement_U C)$”是“$A \bigcap B = \varnothing$”的 ______ 条件.

9. (2014 江西卷文 6) 下列叙述中正确的是 (　　).

A. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则“$ax^2 + bx + c \geqslant 0$”的充分条件是“$b^2 - 4ac \leqslant 0$”

B. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则“$ab^2 > cb^2$”的充要条件是“$a > c$”

C. 命题“对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $x^2 \geqslant 0$”的否定是“存在 $x \in \mathbf{R}$, 有 $x^2 \geqslant 0$”

D. l 是一条直线, α, β 是两个不同的平面, 若 $l \perp \alpha$, $l \perp \beta$, 则 $\alpha // \beta$

10. (2014 天津卷理 7) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“$a > b$”是“$a|a| > b|b|$”的 (　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

1.3 不等关系与一元二次不等式

1.3.1 知识逐点夯实

1. 两个实数比较大小的依据

(1) $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$;

(2) $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$;

(3) $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$.

2. 不等式的性质

(1) 对称性:$a > b \Leftrightarrow$ ______;

(2) 传递性:$a > b, b > c \Rightarrow$ ______;

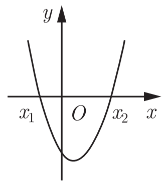
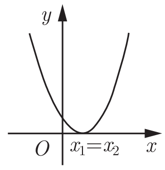
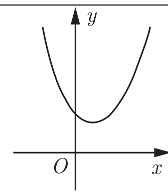
(3) 可加性:$a > b \Leftrightarrow a + c$ ______ $b + c$;$a > b, c > d \Rightarrow a + c$ ______ $b + d$;

(4) 可乘性:$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$;$a > b > 0$, $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$;

(5) 可乘方性:$a > b > 0 \Rightarrow a^n$ ______ $b^n (n \in \mathbf{N}, n > 1)$;

(6) 可开方性:$a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2)$.

3. 一元二次不等式与相应的二次函数及一元二次方程的关系如下表所示:

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	______	$\{x\mid x\neq x_1\}$	$\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

4. 常用性质与结论

(1) 倒数性质

① $a>b,\ ab>0\Rightarrow\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$;

② $a<0<b\Rightarrow\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$;

③ $a>b>0,d>c>0\Rightarrow\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$.

(2) 简单分式不等式

① $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\geqslant 0\\ g(x)\neq 0\end{cases}$;

② $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$.

(3) 一元二次不等式恒成立

① 不等式$ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$ 对任意实数 x 恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$;

② 不等式$ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$ 对任意实数 x 恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$.

1.3.2 基础题

1. (人教 A 版必修第一册 P42 习题 2.1T3 改编) 已知 $a=x^2+y^2+1$, $b=2(x+y-1)$, 则 a 与 b 的大小关系为 (　　).

A. $a>b$　　B. $a<b$

C. $a\leqslant b$　　D. $a\geqslant b$

2. (人教 B 版必修第一册 P50 练习 AT3(1)) 方程 $2x^4-7x^2+3=0$ 的解集为 ______.

3. (人教 B 版必修第一册 P81 复习题 A 组 T12) 已知数轴上, $A(x)$, $B(-1)$, 且线段 AB 的中点到原点的距离大于 5, 则 x 的取值范围为 ______.

4. (2013 大纲卷文 4) 不等式 $|x^2-2|<2$ 的解集是 (　　).

A. $(-1,1)$

B. $(-2,2)$

C. $(-1,0)\bigcup(0,1)$

D. $(-2,0)\bigcup(0,2)$

5. (2019 天津卷文 10) 设 $x \in \mathbf{R}$, 使不等式 $3x^2 + x - 2 < 0$ 成立的 x 的取值范围为 ______.

6. (2020 新课标全国 I 卷理 2) 设集合 $A = \{x|x^2 - 4 \leqslant 0\}$, $B = \{x|2x + a \leqslant 0\}$, 且 $A \bigcap B = \{x|-2 \leqslant x \leqslant 1\}$, 则 $a =$(　　).

A. -4　B. -2　C. 2　D. 4

7. (人教 B 版必修第一册 P51 练习 BT3) 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ 的两根同号, 则实数 m 的取值范围为 ______.

8. (人教 B 版必修第一册 P71 例 3) 不等式 $\dfrac{2x+1}{x-2} \geqslant 1$ 的解集为 ______.

9. (2010 全国 I 卷理 13) 不等式 $\sqrt{2x^2+1} - x \leqslant 1$ 的解集是 ______.

10. (2009 山东卷文 5) 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\bigodot$:$a \bigodot b = ab + 2a + b$, 则满足 $x \bigodot (x-2) < 0$ 的实数 x 的取值范围为 (　　).

A. $(0, 2)$

B. $(-2, 1)$

C. $(-\infty, -2) \bigcup (1, +\infty)$

D. $(-1, 2)$

11. (人教 A 版必修第一册 P42 习题 2.1T5) 已知 $2 < a < 3$, $-2 < b < -1$, 则 $2a + b$ 的取值范围为 ______.

12. (2007 上海卷理 13) 设 a, b 是非零实数, 若 $a < b$, 则下列不等式成立的是 (　　).

A. $a^2 < b^2$　　B. $ab^2 < a^2b$

C. $\dfrac{1}{ab^2} < \dfrac{1}{a^2b}$　　D. $\dfrac{b}{a} < \dfrac{a}{b}$

1.3.3 中档题

1. (人教 B 版必修第一册 P55 练习 BT2(2)) 方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ 的解集为 ______.

2. (2013 江西卷文 6) 下列选项中, 使不等式 $x < \dfrac{1}{x} < x^2$ 成立的 x 的取值范围是 (　　).

A. $(-\infty, -1)$　　B. $(-1, 0)$

C. $(0, 1)$　　D. $(1, +\infty)$

3. (人教 B 版必修第一册 P77 习题 2-2BT7) 已知 $-x^2+ax+b \geqslant 0$ 的解集为 $[-2,3]$, 则 $x^2-5ax+b<0$ 的解集为 ______.

4. (人教 B 版必修第一册 P57 习题 2-1BT12(2)) 已知方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根为 x_1 与 x_2, 则 $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=$ ______.

5. (人教 B 版必修第一册 P81 练习 BT3) 已知 α 和 β 是方程 $x^2+2x-5=0$ 的两根, 则 $\alpha^2+\alpha\beta+2\alpha=$ ______.

6. (2011 江西卷文 15) 对于 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $|x+10|-|x-2| \geqslant 8$ 的解集为 ______.

7. (2007 安徽卷理 3) 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $|x| \geqslant ax$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 (　　).

A. $a<-1$　　B. $|a| \leqslant 1$

C. $|a|<1$　　D. $a \geqslant 1$

8. (2004 湖北卷理 5 改编-多选题) 若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$, 则下列正确的不等式有 (　　).

A. $a+b<ab$　　B. $|a|>|b|$

C. $a>b$　　D. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$

9. (2005 辽宁卷理 7) 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\otimes$:$x \otimes y=x(1-y)$. 若不等式 $(x-a) \otimes(x+a)<1$ 对任意实数 x 成立, 则 (　　).

A. $-1<a<1$　　B. $0<a<2$

C. $-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$

10. (2015 上海卷理 17) 记方程①:$x^2+a_1x+1=0$, 方程②:$x^2+a_2x+2=0$, 方程③:$x^2+a_3x+4=0$, 其中 a_1,a_2,a_3 是正实数. 当 a_1,a_2,a_3 成等比数列时, 下列选项中, 能推出方程③无实根的是 (　　).

A. 方程①有实根, 方程②有实根

B. 方程①有实根, 方程②无实根

C. 方程①无实根, 方程②有实根

D. 方程①无实根, 方程②无实根

11. (2014 湖南卷理 13) 若关于 x 的不等式 $|ax-2|<3$ 的解集为 $\left\{x \left\lvert -\frac{5}{3}<x<\frac{1}{3}\right.\right\}$, 则 $a=$ ______.

12. (人教 A 版必修第一册 P58T6 改编) 已知不等式 $x^2-2ax-1 \leqslant 0$ 对任意的 $x \in [0,2]$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ______.

1.4　基本不等式

1.4.1　知识逐点夯实

1. 基本不等式:$\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$

(1) 基本不等式成立的条件:__________.

(2) 等号成立的条件: 当且仅当______时取等号.

2. 算术平均数与几何平均数

设 $a>0$, $b>0$, 则 a,b 的算术平均数为 $\dfrac{a+b}{2}$, 几何平均数为 $\sqrt{ab}$, 基本不等式可叙述为: 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

3. 利用基本不等式求最值问题

已知 $x>0$, $y>0$, 则

(1) 如果 xy 是定值 p, 那么当且仅当 $x=y$ 时, $x+y$ 有最小值是______(简记: 积定和最小);

(2) 如果 $x+y$ 是定值 q, 那么当且仅当 $x=y$ 时, xy 有最大值______(简记: 和定积最大).

4. 常用性质与结论

(1) $a^2+b^2 \geqslant 2ab$;

(2) $ab \leqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$;

(3) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqslant 2(ab>0)$;

(4) $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

1.4.2　基础题

1. (2007 上海卷理 5) 若 $x,y \in \mathbf{R}^+$ 且 $x+4y=1$, 则 xy 的最大值是 ______.

2. (人教 B 版必修第一册 P77 习题 2-2BT9) 已知 $a>0$, $b>0$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$, 则 ab 的最小值为 ____.

3. (2011 湖南卷理 10) 设 $x,y \in \mathbf{R}$, 且 $xy \neq 0$, 则 $\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+4y^2\right)$ 的最小值为 ______.

4. (2011 陕西卷文 3) 设 $0<a<b$, 则下列不等式中正确的是 (　　).

A. $a<b<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$

B. $a<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<b$

C. $a<\sqrt{ab}<b<\dfrac{a+b}{2}$

D. $\sqrt{ab}<a<\dfrac{a+b}{2}<b$

5. (2013 四川卷文 13) 已知函数 $f(x)=4x+\dfrac{a}{x}(x>0,a>0)$ 在 $x=3$ 时取得最小值, 则 $a=$ ______.

6. (2014 上海卷理 5) 若实数 x,y 满足 $xy=1$, 则 x^2+2y^2 的最小值为 ______.

7. (2011 重庆卷理 7) 已知 $a>0$, $b>0$, $a+b=2$, 则 $y=\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值是 (　　).

A. $\dfrac{7}{2}$　　B. 4　　C. $\dfrac{9}{2}$　　D. 5

8. (人教 A 版必修第一册 P48 复习巩固 T1) 已知 $x>1$, 则 $x+\dfrac{1}{x-1}$ 的最小值为 ______.

9. (人教 B 版必修第一册 P77 习题 2-2BT11) 已知 $x\in(0,+\infty)$, 则 $y=1-2x-\dfrac{4}{x}$ 的最大值为 ______.

10. (2010 山东卷理 14) 若对任意 $x>0$, $\dfrac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 ______.

11. (人教 A 版必修第一册 P46 例 3(2)) 用一段长为 36m 的篱笆围成一个矩形菜园, 则菜园的面积的最大值为 ______m^2.

12. (人教 A 版必修第一册 P46 练习 T5) 已知直角三角形的面积等于 $50\mathrm{cm}^2$, 则两条直角边的和的最小值为 ______cm.

1.4.3 中档题

1. (2020 江苏卷 12) 已知 $5x^2y^2+y^4=1(x,y\in\mathbf{R})$, 则 x^2+y^2 的最小值是 ______.

2. (2008 江苏卷 11) 设 x,y,z 为正实数, 满足 $x-2y+3z=0$, 则 $\dfrac{y^2}{xz}$ 的最小值是 ______.

3. (2017 天津卷理 12) 已知 $a,b\in\mathbf{R}$, $ab>0$, 则 $\dfrac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为 ______.

4. (人教 B 版必修第一册 P78 习题 2-2CT3) 已知 $x\in(1,+\infty)$, 则 $y=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$ 的最小值为 ______.

5. (2007 陕西卷理 8) 已知不等式 $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{y}\right)\geqslant 9$ 对任意正实数 x, y 恒成立, 则正数 a 的最小值为 (　　).

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 2

6. (2020 天津卷理 14) 已知 $a>0$, $b>0$, 且 $ab=1$, 则 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$ 的最小值为 ______.

7. (2012 浙江卷文 9) 若正数 x, y 满足 $x+3y=5xy$, 则 $3x+4y$ 的最小值为 (　　).

A. $\frac{24}{5}$　　B. $\frac{28}{5}$　　C. 5　　D. 6

8. (2010 重庆卷理 7) 已知 $x>0$, $y>0$, $x+2y+2xy=8$, 则 $x+2y$ 的最小值是 (　　).

A. 3　　B. 4　　C. $\frac{9}{2}$　　D. $\frac{11}{2}$

9. (人教 A 版必修第一册 P58 复习参考题 2T5) 若 $a>0$, 　$b>0$, 且 $ab=a+b+3$, 则 ab 的取值范围为 ______.

10. (2015 山东卷文 14) 定义运算“$\otimes$”:$x\otimes y=\frac{x^2-y^2}{xy}(x,y\in\mathbf{R},xy\neq 0)$. 当 $x>0,y>0$ 时, $x\otimes y+(2y)\otimes x$ 的最小值是 ______.

11. (2020 新高考 I 卷 11-多选题) 已知 $a>0$, $b>0$, 且 $a+b=1$, 则 (　　).

A. $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$

B. $2^{a-b}>\frac{1}{2}$

C. $\log_2 a+\log_2 b\geqslant -2$

D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

12. (人教 A 版必修第一册 P48 习题 2.2T3) 某公司建造一间背面靠墙的房屋, 底面面积为 $48\mathrm{m}^2$, 房屋正面每平方米的造价为 1200 元, 房屋侧面每平方米的造价为 800 元, 屋顶的造价为 5800 元. 如果墙高为 3m, 且不计房屋背面和底面的费用, 则最低造价为 ______ 元.

第 2 章　函数的概念与性质、指数函数与对数函数、幂函数

2.1　函数及其表示

2.1.1　知识逐点夯实

1. 函数的有关概念

	函数
两集合 A,B	A,B 是两个______
对应关系 $f:A\longrightarrow B$	如果按照某种确定的对应关系 f, 使对于集合 A 中的______一个数 x, 在集合 B 中都有______的数 $f(x)$ 与之对应
名称	称 ______ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数
记法	$y=f(x),x\in A$

2. 函数的定义域、值域

(1) 函数 $y=f(x)$ 中______取值范围 A 叫作函数的定义域; 与 x 的值相对应的 y 值叫作函数值, 函数值的集合______叫作函数的值域.

(2) 函数的三要素: 定义域、值域和对应关系.

(3) 如果两个函数的______相同, 并且______完全一致, 则这两个函数为同一个函数.

3. 函数的三种表示法

表示函数常用方法有______、______和______.

4. 分段函数

若函数在其定义域内, 对于定义域内的不同取值区间, 有着不同的______, 这样的函数通常叫作分段函数.

5. 常用性质与结论

(1) 直线 $x=a$(a 是常数) 与函数 $y=f(x)$ 的图像有 0 个或 1 个交点.

(2) 判断两个函数是同一个函数的依据是两个函数的定义域和对应关系完全一致.

(3) 抽象函数定义域求法

① 函数定义域指的是自变量的取值范围;

② 同一对应法则下括号中整体的取值范围相同.

2.1.2　基础题

1. (2019 江苏卷 4) 函数 $y=\sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是 ______.

2. (2015 新课标全国 Ⅱ 卷文 13) 已知函数 $f(x)=ax^3-2x$ 的图像过点 $(-1,4)$, 则 $a=$ ______.

3. (人教 B 版必修第一册 P94 练习 BT4 改编) 下列各组函数为同一函数的是 (　　).

A. $f(x)=\dfrac{x^2}{x}, g(x)=x$

B. $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}, g(x)=x^2-1$

C. $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$

D. $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}, g(x)=\sqrt{x^2-1}$

4. (人教 B 版必修第一册 P94 练习 BT8 改编) 已知函数 $f(x+1)=2x-3$, 则 $f(x)=$ ______.

5. (2013 大纲卷理 4) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$, 则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 (　　).

A. $(-1,1)$　　B. $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$

C. $(-1,0)$　　D. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

6. (人教 B 版必修第一册 P91 例 5 改编) 已知取整函数 $y=[x]$ 的图像如图 2-1所示, 其定义域是 ______, 值域是 ______.

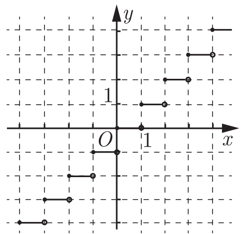


图 2-1

7. (人教 B 版必修第一册 P111 习题 3-1BT1 改编) 已知集合 $A=[a,+\infty)$, 对应关系 f 为“求倒数”, 而且 f 为 A 上的函数, 则实数 a 的取值范围为 ______.

8. (2012 安徽卷理 2) 下列函数中, 不满足 $f(2x)=2f(x)$ 的是 (　　).

A. $f(x)=|x|$　　B. $f(x)=x-|x|$

C. $f(x)=x+1$　　D. $f(x)=-x$

9. (2016 浙江卷文 12) 设函数 $f(x)=x^3+3x^2+1$, 已知 $a\neq 0$, 且 $f(x)-f(a)=(x-b)(x-a)^2$, $x\in\mathbf{R}$, 则实数 $a=$ ______, $b=$ ______.

10. (2021 浙江卷 12) 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x>2\\ |x-3|+a, & x\leqslant 2\end{cases}$. 若 $f(f(\sqrt{6}))=3$, 则 $a=$ ______.

11. (2011 北京卷理 6) 根据统计, 一名工人组装第 x 件某产品所用的时间 (单位: 分钟) 为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{x}}, & x<A\\ \dfrac{c}{\sqrt{A}}, & x\geqslant A\end{cases}$ $(A,c$ 为常数). 已知工人组装第 4 件产品用时 30 分钟, 组装第 A 件产品用时 15 分钟, 那么 c 和 A 的值分别是 (　　).

A. $75,25$　　B. $75,16$

C. $60,25$　　D. $60,16$

12. (2015 浙江卷文 12) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ x+\dfrac{6}{x}-6, & x>1\end{cases}$, 则 $f(f(-2))=$ ______, $f(x)$ 的最小值是 ______.

2.1.3　中档题

1. (2004 湖北卷理 3) 已知 $f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, 则 $f(x)$ 的解析式可取为 (　　).

A. $\dfrac{x}{1+x^2}$　　B. $-\dfrac{2x}{1+x^2}$

C. $\dfrac{2x}{1+x^2}$　　D. $-\dfrac{x}{1+x^2}$

2. (2013 安徽卷文 14) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)$. 若当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(x)=x(1-x)$, 则当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时, $f(x)=$ ______.

3. (2015 湖北卷文 7) 设 $x\in\mathbf{R}$, 定义符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$, 则 (　　).

A. $|x|=x|\operatorname{sgn}x|$　　B. $|x|=x\operatorname{sgn}|x|$

C. $|x|=|x|\operatorname{sgn}x$　　D. $|x|=x\operatorname{sgn}x$

4. (人教 A 版必修第一册 P73 复习题 3.1T11 改编) 函数 $r=f(p)$ 的图像如图 2-2所示, 函数 $r=f(p)$ 的定义域为 ______; 若只有唯一的 p 与之对应, 则 r 的取值范围为 ______.

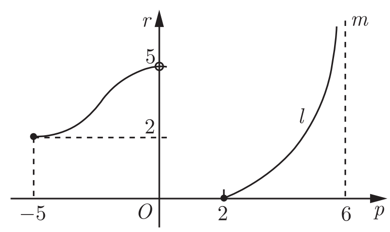


图 2-2

5. (2002 全国卷文 16) 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, 则 $f(1)+f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f(4)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)=$ ________.

6. (2008 重庆卷理 4) 已知函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的最大值为 M, 最小值为 m, 则 $\dfrac{m}{M}$ 的值为 (　　).

A. $\dfrac{1}{4}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. (2008 陕西卷理 11) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x,y\in\mathbf{R})$, $f(1)=2$, 则 $f(-3)$ 等于 (　　).

A. 2　B. 3　C. 6　D. 9

8. (2011 江苏卷 11) 已知实数 $a\neq 0$, 函数 $f(x)=\begin{cases}2x+a & x<1\\ -x-2a & x\geqslant 1\end{cases}$, 若 $f(1-a)=f(1+a)$, 则 a 的值为 ______.

9. (2014 浙江卷理 6) 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 且 $0<f(-1)=f(-2)=f(-3)\leqslant 3$, 则 (　　).

A. $c\leqslant 3$　B. $3<c\leqslant 6$

C. $6<c\leqslant 9$　D. $c>9$

10. (2007 重庆卷理 13) 已知函数 $f(x)=\sqrt{2^{x^2+2ax-a}-1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则 a 的取值范围为 ______.

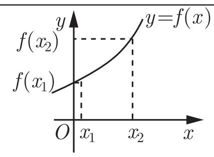
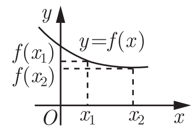
11. (2004 福建卷文 14) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-1, & x\geqslant 0\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$, 若 $f(a)>a$, 则实数 a 的取值范围是 ________.

12. (2017 新课标全国 Ⅲ 卷理 15) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$, 则满足 $f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+f(x)>1$ 的 x 的取值范围是 ______.

2.2 函数的单调性与最值

2.2.1 知识逐点夯实

1. 增函数、减函数

		增函数	减函数
定义	要求 x_1, x_2	一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I, 区间 $D \subseteq I$, 如果对于任意 $x_1, x_2 \in D$, 且 $x_1 < x_2$	
	要求 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$	都有______	都有______
	结论	函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数	函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数
图像描述		 自左向右看图像是上升的	 自左向右看图像是下降的

2. 单调性、单调区间

若函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上是______或______, 则称函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有 (严格的) 单调性, 区间 D 叫作函数 $y = f(x)$ 的单调区间.

3. 函数的最值

前提	设函数 $f(x)$ 的定义域为 I, 如果存在 $M \in \mathbf{R}$	
条件	①对于任意的 $x \in I$, 都有______; ②存在 $x_0 \in I$, 使得______	①对于任意的 $x \in I$, 都有______; ②存在 $x_0 \in I$, 使得______
结论	M 是 $f(x)$ 的最大值	M 是 $f(x)$ 的最小值

4. 常用性质与结论

(1) 若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 I 上具有单调性, 则在区间 I 上具有以下性质:

①当 $f(x), g(x)$ 都是增 (减) 函数时, $f(x)+g(x)$ 是增 (减) 函数;

②若 $k > 0$, 则 $kf(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相同; 若 $k < 0$, 则 $kf(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相反;

③函数 $y = f(x)(f(x) > 0)$ 在公共定义域内与 $y = -f(x)$, $y = \dfrac{1}{f(x)}$ 的单调性相反;

④对勾函数 $y = x + \dfrac{a}{x}(a > 0)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -\sqrt{a})$, $(\sqrt{a}, +\infty)$; 单调递减区间为 $[-\sqrt{a}, 0)$, $(0, \sqrt{a}]$;

⑤复合函数 $y = f[g(x)]$ 的单调性与 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的单调性有关. 简记: “同增异减”.

(2) 增函数与减函数的等价变形: 对任意的 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 且 $x_1 \neq x_2$, 则

①$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增函数;

②$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是减函数.

2.2.2 基础题

1. (2021 新课标全国甲卷文 4) 下列函数中是增函数的为 (　　).

A. $f(x)=-x$　　B. $f(x)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

C. $f(x)=x^2$　　D. $f(x)=\sqrt[3]{x}$

2. (2009 福建卷理 5) 下列函数 $f(x)$ 中, 满足 "对任意 $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$" 的是 (　　).

A. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

B. $f(x)=(x-1)^2$

C. $f(x)=\mathrm{e}^x$

D. $f(x)=\ln(x+1)$

3. (2001 全国卷文 10 改编-多选题) 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是单调函数, 则下列的结论正确的是 (　　).

A. 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增

B. 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递增

C. 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减

D. 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)-g(x)$ 单调递减

4. (2011 江苏卷 2) 函数 $f(x)=\log_5(2x+1)$ 的单调递增区间是 ______.

5. (人教 B 版必修第一册 P133B 组 T4 改编) 已知 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在 $(-\infty,4]$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是 ______.

6. (2012 安徽卷文 13) 若函数 $f(x)=|2x+a|$ 的单调递增区间是 $[3,+\infty)$, 则 $a=$ ______.

7. (人教 B 版必修第一册 P111 习题 3-1BT4 改编) 已知函数 $f(x)=3x-4$ 的定义域为 D, 值域为 $[-10,5]$, 则 D 为 ______.

8. (2014 新课标全国 Ⅱ 卷理 15 改编) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减, 且 $f(2)=0$, 若 $f(x-1)>0$, 则 x 的取值范围是 ______.

9. (2008 辽宁卷理 12 改编) 已知 $f(x)$ 是单调函数, 则满足 $f(x)=f\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 x 之和为 (　　).

A. -5　　B. -3　　C. 3　　D. 5

10. (2017 北京卷文 10) 函数 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ $(x \geqslant 2)$ 的最大值为 ______.

11. (2004 天津卷文 6 改编) 若函数 $f(x) = ax+2(a>0)$ 在区间 $[a,4a]$ 上的最大值是最小值的 3 倍, 则 $a=$(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

12. (2021 北京卷 3) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 则“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增”是“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$”的 (　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

2.2.3　中档题

1. (2004 湖南卷文 7) 若 $f(x) = -x^2+2ax$ 与 $g(x) = \dfrac{a}{x+1}$ 在区间 $[1,2]$ 上都是减函数, 则 a 的取值范围是 (　　).

A. $(-1,0)\bigcup(0,1)$

B. $(-1,0)\bigcup(0,1]$

C. $(0,1)$

D. $(0,1]$

2. (1997 全国卷文 13 改编) 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, $a+b \leqslant 0$, 则 (　　).

A. $f(a)+f(b) \leqslant -f(a)-f(b)$

B. $f(a)+f(b) \geqslant -f(a)-f(b)$

C. $f(a)+f(b) \leqslant f(-a)+f(-b)$

D. $f(a)+f(b) \geqslant f(-a)+f(-b)$

3. (2015 福建卷理 14 改编) 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x+6, & x \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{2}x^2-ax+8, & x>2 \end{cases}$ 的值域是 $[4,+\infty)$, 则实数 a 的取值范围是 ______.

4. (2009 天津卷理 8) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+4x, & x \geqslant 0 \\ 4x-x^2, & x<0 \end{cases}$, 若 $f(2-a^2) > f(a)$, 则实数 a 的取值范围是 (　　).

A. $(-\infty,-1)\bigcup(2,+\infty)$

B. $(-1,2)$

C. $(-2,1)$

D. $(-\infty,-2)\bigcup(1,+\infty)$

5. (人教 B 版必修第一册 P103 练习 BT1 改编-多选题) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上单调递增, 在区间 $[2,5]$ 上单调递减, 则 (　　).

A. $f(2)<f(3)$

B. $f(x)$ 的最大值为 $f(2)$

C. $f(x)$ 在区间 $[-1,5]$ 上有最小值

D. $f(0)$ 与 $f(3)$ 的大小不确定

6. (2006 北京卷理 5) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, & x<1\\ \log_a x, & x\geqslant 1\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数, 那么 a 的取值范围是 (　　).

A. $(0,1)$　　B. $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$

C. $\left[\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left[\dfrac{1}{7},1\right)$

7. (2017 新课标全国 Ⅱ 卷文 8) 函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间是 (　　).

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

8. (2013 新课标全国 Ⅱ 卷文 12) 若存在正数 x 使 $2^x(x-a)<1$ 成立, 则 a 的范围是 (　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $(-2,+\infty)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $(-1,+\infty)$

9. (2014 上海卷 18) $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, & x\leqslant 0\\ x+\dfrac{1}{x}+a, & x>0\end{cases}$, 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 则 a 的取值范围为 (　　).

A. $[-1,2]$　　B. $[-1,0]$

C. $[1,2]$　　D. $[0,2]$

10. (2018 新课标全国 Ⅰ 卷文 12) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$, 则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 x 的取值范围是 (　　).

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(0,+\infty)$

C. $(-1,0)$　　D. $(-\infty,0)$

11. (2008 重庆卷文 7) 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ 的最大值为 (　　).

A. $\dfrac{2}{5}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

12. (2011 四川卷文 16 改编-多选题) 函数 $f(x)$ 的定义域为 A, 若 $x_1, x_2 \in A$ 且 $f(x_1) = f(x_2)$ 时总有 $x_1 = x_2$, 则称 $f(x)$ 为单函数. 下列说法正确的是 (　　).

A. 函数 $f(x) = x^2(x \in \mathbf{R})$ 是单函数

B. 函数 $f(x) = 2^x(x \in \mathbf{R})$ 是单函数

C. 函数 $f(x)$ 是单函数, $x_1, x_2 \in A$ 且 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$

D. 在定义域上具有单调性的函数一定是单函数

2.3 函数的奇偶性与周期性

2.3.1 知识逐点夯实

1. 函数的奇偶性

奇偶性	定义	图像特点
偶函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x, 都有______, 那么函数 $f(x)$ 是偶函数	关于______对称
奇函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x, 都有______, 那么函数 $f(x)$ 是奇函数	关于______对称

2. 函数的周期性

(1) 周期函数: 对于函数 $f(x)$, 如果存在一个非零常数 T, 使得当 x 取定义域内的任何值时, 都有______, 那么就称 $f(x)$ 为周期函数, 称 T 为这个函数的周期.

(2) 最小正周期: 如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个______, 那么这个______就叫作 $f(x)$ 的最小正周期.

3. 常用性质与结论

(1) 函数奇偶性常用性质:

①如果函数 $f(x)$ 是奇函数且在 $x=0$ 处有定义, 则一定有 $f(0)=0$; 如果函数 $f(x)$ 是偶函数, 那么 $f(x) = f(|x|)$.

②奇函数在关于原点对称的区间上具有相同的单调性; 偶函数在关于原点对称的区间上具有相反的单调性.

(2) 函数周期性常用性质

对于 $f(x)$ 定义域内任一自变量 x, 有:

①若 $f(x+a) = -f(x)$, 则 $T = 2a(a>0)$;

②若 $f(x+a) = \dfrac{1}{f(x)}$, 则 $T = 2a(a>0)$;

③若 $f(x+a) = -\dfrac{1}{f(x)}$, 则 $T = 2a(a>0)$.

(3) 函数图像的对称性

①若函数 $y = f(x+a)(a>0)$ 是偶函数, 即 $f(a-x) = f(a+x)$, 再把 $y = f(x+a)$ 的图像向右平移 a 个单位, 故函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 对称.

②若函数 $y=f(x+b)(b>0)$ 是奇函数, 即 $f(b-x)=-f(b+x)$, 再把 $y=f(x+b)$ 的图像向右平移 b 个单位可得 $y=f(x)$ 的图像, 故函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(b,0)$ 中心对称.

2.3.2 基础题

1. (人教 B 版必修第一册 P106 例 2 改编) 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 且 $0\in D$, 则 $f(0)$ 的值为 ______.

2. (1991 全国卷理 13) 如果奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3,7]$ 上是增函数且最小值为 5, 那么 $f(x)$ 在区间 $[-7,-3]$ 上是 (　　).

A. 增函数且最小值为 -5

B. 增函数且最大值为 -5

C. 减函数且最小值为 -5

D. 减函数且最大值为 -5

3. (2021 新课标全国乙卷理 4) 设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是 (　　).

A. $f(x-1)-1$　　B. $f(x-1)+1$

C. $f(x+1)-1$　　D. $f(x+1)+1$

4. (人教 A 版必修第一册 P84 例 1 改编-多选题) 下列函数是奇函数的是 (　　).

A. $f(x)=x^4$　　B. $f(x)=x^5$

C. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$　　D. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

5. (2014 新课标全国 I 卷理 3) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论中正确的是 (　　).

A. $f(x)g(x)$ 是偶函数

B. $|f(x)|g(x)$ 是奇函数

C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数

D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

6. (2020 新课标全国 Ⅱ 卷文 10) 设函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$, 则 $f(x)$(　　).

A. 是奇函数, 且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

B. 是奇函数, 且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

C. 是偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

D. 是偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

7. (2013 大纲卷文 13) 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数, 且当 $x\in[1,3]$ 时, $f(x)=x-2$, 则 $f(-1)=$ ______.

8. (2019 新课标全国 Ⅱ 卷文 6) 设函数 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geqslant 0$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^{x}-1$, 则当 $x<0$ 时, $f(x)=($　　$)$.

A. $\mathrm{e}^{-x}-1$　　B. $\mathrm{e}^{-x}+1$

C. $-\mathrm{e}^{-x}-1$　　D. $-\mathrm{e}^{-x}+1$

9. (2012 重庆卷文 12) 若 $f(x)=(x+a)(x-4)$ 为偶函数, 则实数 $a=$______.

10. (2012 上海卷理 8) 已知 $y=f(x)+x^{2}$ 是奇函数, 且 $f(1)=1$. 若 $g(x)=f(x)+2$, 则 $g(-1)=$______.

11. (2017 新课标全国 I 卷理 5) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减, 且为奇函数, 若 $f(1)=-1$, 则满足 $-1 \leqslant f(x-2) \leqslant 1$ 的 x 的取值范围是 (　　).

A. $[-2,2]$　　B. $[-1,1]$

C. $[0,4]$　　D. $[1,3]$

12. (2011 大纲卷理 9) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时, $f(x)=2x(1-x)$, 则 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=($　　$)$.

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

2.3.3　中档题

1. (2021 新高考全国 Ⅱ 卷 8) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+2)$ 为偶函数, $f(2x+1)$ 为奇函数, 则 (　　).

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　B. $f(-1)=0$

C. $f(2)=0$　　D. $f(4)=0$

2. (2021 新课标全国甲卷文 12) 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且 $f(1+x)=f(-x)$. 若 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$, 则 $f\left(\frac{5}{3}\right)=($　　$)$.

A. $-\frac{5}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{5}{3}$

3. (2013 湖北卷文 8) x 为实数, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则函数 $f(x)=x-[x]$ 在 $\mathbf{R}$ 上为 (　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 增函数　　D. 周期函数

4. (2009 辽宁卷文 12) 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加, 则满足 $f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 的取值范围是 (　　).

A. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$　　B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

5. (2012 重庆卷理 7) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且以 2 为周期, 则 “$f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的增函数” 是 “$f(x)$ 为 $[3,4]$ 上的减函数” 的 (　　).

A. 既不充分也不必要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 充要条件

6. (2011 广东卷文 12) 设函数 $f(x)=x^3\cos x+1$, 若 $f(a)=11$, 则 $f(-a)=$ ______.

7. (2011 江苏卷 8) 在平面直角坐标系 xOy 中, 过坐标原点的一条直线与函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}$ 的图像交于 P,Q 两点, 则线段 PQ 长的最小值是 ______.

8. (2013 江苏卷 11) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x>0$ 时, $f(x)=x^2-4x$, 则不等式 $f(x)>x$ 的解集用区间表示为 ______.

9. (2009 浙江卷文 8) 若函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}(a\in\mathbf{R})$, 则下列结论正确的是 (　　).

A. $\forall a\in\mathbf{R}$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

B. $\forall a\in\mathbf{R}$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

C. $\exists a\in\mathbf{R}$, $f(x)$ 是偶函数

D. $\exists a\in\mathbf{R}$, $f(x)$ 是奇函数

10. (人教 A 版必修第一册 P160 复习参考题 4T6 改编) 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$, $g(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$, 给出下列结论:

①$f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数;

②$[g(x)]^2-[f(x)]^2=1$;

③$f(2x)=2f(x)g(x)$;

④$g(2x)=[g(x)]^2+[f(x)]^2$.

其中结论正确的个数为 (　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. (2020 新高考全国 I 卷 8) 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减, 且 $f(2)=0$, 则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是 (　　).

A. $[-1,1]\bigcup[3,+\infty)$

B. $[-3,-1]\bigcup[0,1]$

C. $[-1,0]\bigcup[1,+\infty)$

D. $[-1,0]\bigcup[1,3]$

12. (2009 山东卷文 12) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 满足 $f(x-4)=-f(x)$ 且在区间 $[0,2]$ 上是增函数, 则 (　　).

A. $f(-25)<f(80)<f(11)$

B. $f(80)<f(11)<f(-25)$

C. $f(11)<f(80)<f(-25)$

D. $f(-25)<f(11)<f(80)$

2.4　二次函数与幂函数

2.4.1　知识逐点夯实

1. 幂函数的概念

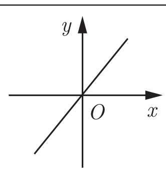
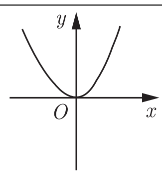
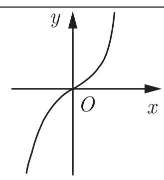
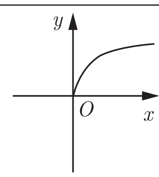
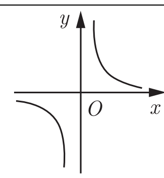
一般地, 形如______ ($\alpha \in \mathbf{R}$) 的函数称为幂函数, 其中底数 x 是自变量, α 为常数. 幂函数具备以下几个特征:

(1) 自变量 x 处在幂底数的位置, 幂指数 α 为常数;

(2) x^α 的系数为 1;

(3) 只有一项.

2. 五种常见幂函数的图像与性质

函数	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
图像					
定义域	$\mathbf{R}$	______	$\mathbf{R}$	______	______
奇偶性	______	______	______	非奇非偶函数	______
单调性	在 $\mathbf{R}$ 上单调递增	在______上单调递减, 在______上单调递增	在 $\mathbf{R}$ 上单调递增	在______上单调递增	在______和______上单调递减
公共点	______				

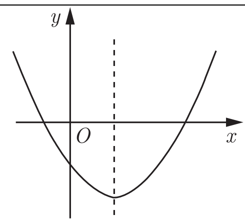
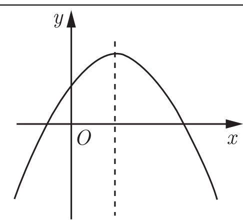
3. 二次函数解析式的三种形式

(1) 一般式:$f(x)=$______$(a\neq 0)$;

(2) 顶点式:$f(x)=a(x-k)^2+h(a\neq 0)$, 顶点坐标为______;

(3) 两根式:$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$, x_1,x_2 为 $f(x)$ 的______.

4. 二次函数的图像与性质

解析式	$f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$	$f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$
图像		
定义域	**R**	**R**
值域	______	______
单调性	在______上单调递减, 在______上单调递增	在______上单调递增, 在______上单调递减
对称性	函数的图像关于直线______对称	

5. 常用性质与结论

(1) 有关幂函数的常用性质: 对于形如 $f(x)=x^{\frac{n}{m}}$(其中 $m\in\mathbf{N}^*$, $n\in\mathbf{Z}$, m 与 n 互质) 的幂函数:

①当 n 为偶函数时,$f(x)$ 为偶函数, 图像关于 y 轴对称;

②当 m,n 都为奇数时,$f(x)$ 为奇函数, 图像关于原点对称;

③当 m 为偶数时,$x>0$(或 $x\geqslant 0$), $f(x)$ 是非奇非偶函数, 图像只在第一象限 (或第一象限及原点处).

(2) 二次函数在闭区间上的最值: 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$, 闭区间为 $[m,n]$:

①当 $-\dfrac{b}{2a}\leqslant m$ 时, 最小值为 $f(m)$, 最大值为 $f(n)$;

②当 $m<-\dfrac{b}{2a}\leqslant\dfrac{m+n}{2}$ 时, 最小值为 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$, 最大值为 $f(n)$;

③当 $\dfrac{m+n}{2}<-\dfrac{b}{2a}\leqslant n$ 时, 最小值为 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$, 最大值为 $f(m)$;

④当 $-\dfrac{b}{2a}>n$ 时, 最小值为 $f(n)$, 最大值为 $f(m)$.

2.4.2 基础题

1. (人教 A 版必修第一册 P91 练习 T1 改编) 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图像经过点 $(2,\sqrt{2})$, 则这个函数的解析式为 ______.

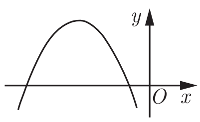
2. (2018 上海卷 7) 已知 $\alpha\in\left\{-2,-1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1,2,3\right\}$, 若幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 为奇函数, 且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 则 $\alpha=$ ______.

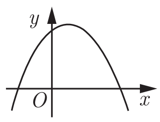
3. (2016 山东卷文 3) 设 $a=0.6^{0.6}$, $b=0.6^{1.5}$, $c=1.5^{0.6}$, 则 a,b,c 的大小关系是 (　　).

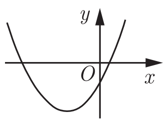
A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

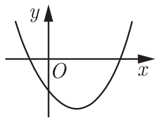
C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

4. (2010 安徽卷文 6) 设 $abc>0$, 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像可能是 (　　).


A.


B.


C.


D.

5. (人教 B 版必修第一册 P50 练习 AT2 改编) 已知关于 x 的方程 $x^2-3mx+1=0$ 有两个相等的实数根, 则实数 m 的取值集合为 ______.

6. (2013 重庆卷文 7) 关于 x 的不等式 $x^2-2ax-8a^2<0(a>0)$ 的解集为 (x_1,x_2), 且 $x_2-x_1=15$, 则 $a=$(　　).

A. $\dfrac{5}{2}$　　B. $\dfrac{7}{2}$　　C. $\dfrac{15}{4}$　　D. $\dfrac{15}{2}$

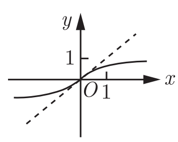
7. (2006 福建卷文 21(I)) 已知 $f(x)$ 是二次函数, 不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $(0,5)$, 且 $f(x)$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最大值是 12, 则函数 $f(x)$ 的解析式为 ____________.

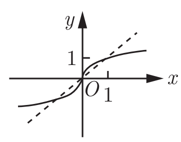
8. (2005 北京春季卷理 14) 若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a>0$ 的解集为 $(-\infty,+\infty)$, 则实数 a 的取值范围为 ______; 若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a\leqslant-3$ 的解集不是空集, 则实数 a 的取值范围是 __________.

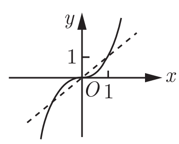
9. (2004 北京卷理 13) 在函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 中, 若 a,b,c 成等比数列且 $f(0)=-4$, 则 $f(x)$ 有最 ______ 值 (填“大”或“小”), 且该值为 ______.

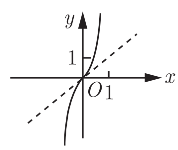
10. (人教 B 版必修第一册 P82 复习题 B 组 T11 改编) 已知点 $P(x,y)$ 在一次函数 $y=-2x+4$ 的图像上运动, 则它的横、纵坐标之积的最大值为 ______, 此时点 P 的坐标为 ______.

11. (2011 陕西卷文 4) 函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图像 (　　).


A.


B.


C.


D.

12. (1992 全国卷文 6) 如图 2-3 所示, 图中曲线是幂函数 $y=x^n$ 在第一象限的图像. 已知 n 取 ±2, $\pm\frac{1}{2}$ 四个值, 则相应于曲线 C_1,C_2,C_3,C_4 的 n 依次为 (　　).

A. -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 2　B. 2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, -2

C. $-\frac{1}{2}$, -2, 2, $\frac{1}{2}$　D. 2, $\frac{1}{2}$, -2, $-\frac{1}{2}$

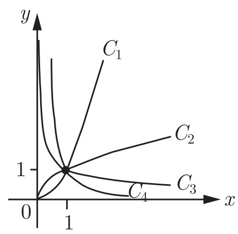


图 2-3

2.4.3 中档题

1. (2016 新课标全国 Ⅲ 卷文 7) 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$, $b=3^{\frac{2}{3}}$, $c=25^{\frac{1}{3}}$, 则 (　　).

A. $b<a<c$　B. $a<b<c$

C. $b<c<a$　D. $c<a<b$

2. (人教 B 版必修第一册 P51 练习 BT1 改编) 已知关于 x 的方程 $mx^2-3x+1=0$ 的解集为空集, 则实数 m 的取值范围为______.

3. (人教 A 版必修第一册 P58 复习参考题 2T6 改编) 当 k 取 ______ 时, 一元二次不等式 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$ 对一切实数 x 成立.

4. (1992 全国卷文 17) 如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$, 那么 (　　).

A. $f(2)<f(1)<f(4)$

B. $f(1)<f(2)<f(4)$

C. $f(2)<f(4)<f(1)$

D. $f(4)<f(2)<f(1)$

5. (2017 浙江卷 5) 若函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值是 M, 最小值是 m, 则 $M-m$(　　).

A. 与 a 有关, 且与 b 有关

B. 与 a 有关, 但与 b 无关

C. 与 a 无关, 且与 b 无关

D. 与 a 无关, 但与 b 有关

6. (2013 浙江卷文 7) 已知 $a,b\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=ax^2+bx+c$. 若 $f(0)=f(4)>f(1)$, 则 (　　).

A. $a>0, 4a+b=0$

B. $a<0, 4a+b=0$

C. $a>0, 2a+b=0$

D. $a<0, 2a+b=0$

7. (2006 陕西卷理 9) 已知函数 $f(x)=ax^2+2ax+4(0<a<3)$, 若 $x_1<x_2$, $x_1+x_2=1-a$, 则 (　　).

A. $f(x_1)>f(x_2)$

B. $f(x_1)<f(x_2)$

C. $f(x_1)=f(x_2)$

D. $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系不能确定

8. (2014 江苏卷 10) 已知函数 $f(x)=x^2+mx-1$, 若任意的 $x\in[m,m+1]$ 都有 $f(x)<0$, 则实数 m 的取值范围为 ______.

9. (2006 江西卷理 6) 若不等式 $x^2+ax+1\geqslant 0$ 对一切 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 成立, 则实数 a 的最小值为 (　　).

A. 0　　B. -2　　C. $-\dfrac{5}{2}$　　D. -3

10. (2012 江苏卷 13) 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$ 的值域为 $[0,+\infty)$, 若关于 x 的不等式 $f(x)<c$ 的解集为 $(m,m+6)$, 则 c 的值为 ____.

11. (2007 辽宁卷文 22(I) 改编) 已知函数 $f(x)=3x^2-18x\cos\alpha+48\cos\beta$, 且对任意实数 t, 均有 $f(1+\cos t)\geqslant 0$, $f(3+\sin t)\leqslant 0$, 则 $f(x)=$ ________.

12. (2010 天津卷文 16) 函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in[1,+\infty)$, $f(mx)+mf(x)<0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ______.

2.5 指数与指数函数

2.5.1 知识逐点夯实

1. 指数与指数运算

(1) n 次方根的概念

一般地, 如果 $x^n=a$, 那么 x 叫作 a 的 ______$(n>1, n\in\mathbf{N}^*)$.

①当 n 为奇数时, 正数的 n 次方根是正数, 负数的 n 次方根是负数; 此时 a 的 n 次

方根记作 $\sqrt[n]{a}$;

②当 n 为偶数时, 正数的 n 次方根有两个, 这两个数互为______, 此时 a 的 n 次方根可记作 $\pm\sqrt[n]{a}$; 负数的偶次方根没有意义.0 的 n 次方根是 0, 记作 $\sqrt[n]{0}=0$.

(2) 根式的运算性质

①$(\sqrt[n]{a})^n=$______(a 使 $\sqrt[n]{a}$ 有意义);

②当 n 是奇数时, $\sqrt[n]{a^n}=$______;

③当 n 是偶数时, $\sqrt[n]{a^n}=|a|=$

$$\begin{cases}\underline{\qquad\quad}, & a\geqslant 0\\ \underline{\qquad\quad}, & a<0\end{cases}.$$

(3) 分数指数幂的意义

①$a^{\frac{m}{n}}=$______($a>0$, $m,n\in\mathbf{N}^*$, 且 $n>1$);

②$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=$______($a>0$, $m,n\in\mathbf{N}^*$, 且 $n>1$);

③0 的正分数指数幂等于 0, 0 的负分数指数幂没有意义.

(4) 实数指数幂的运算性质

①$a^r\cdot a^s=$______($a>0,r,s\in\mathbf{R}$);

②$\dfrac{a^r}{a^s}=$______($a>0,r,s\in\mathbf{R}$);

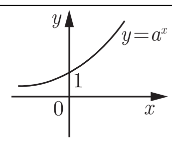
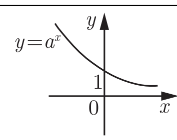
③$(a^r)^s=$______($a>0,r,s\in\mathbf{R}$);

④$(ab)^r=$______($a>0,r\in\mathbf{R}$).

2. 指数函数的概念

函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 叫作指数函数, 其中指数 x 是自变量, 函数的定义域是 $\mathbf{R}$, a 是底数. 形如 $y=ka^x$, $y=a^{x+k}$($k\in\mathbf{R}$ 且 $k\neq 0$, $a>0$ 且 $a\neq 1$) 的函数叫作指数型函数, 不是指数函数.

3. 指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图像与性质

底数	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 ①______	
	图像过定点 ②______	
	当 $x>0$ 时, 恒有 ③______; 当 $x<0$ 时, 恒有 ④______	当 $x>0$ 时, 恒有 ⑤______; 当 $x<0$ 时, 恒有 ⑥______
	在定义域 $\mathbf{R}$ 上为 ⑦______	在定义域 $\mathbf{R}$ 上为 ⑧______
注意	指数函数 $y=a^x(a>1$, 且$a\neq 1)$ 的图像和性质与 a 的取值有关, 应分为 $a>1$ 与 $0<a<1$ 来研究	

4. 常用性质与结论

> (1) 函数 $y=a^x$ 与 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图像关于 y 轴对称.
>
> (2) 在第一象限内, 指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图像越高, 底数越大.

2.5.2　基础题

1. (人教 A 版必修第一册 P107 练习 T3 改编) 计算:

   (1) $\left(\dfrac{36}{49}\right)^{\frac{3}{2}}=$ ______;

   (2) $2\sqrt{3}\times 3\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}=$ ______.

2. (人教 A 版必修第一册 P110 习题 4.1T7(1) 改编) 已知 $10^m=2, 10^n=3$, 则 $10^{\frac{3m-2n}{2}}=$ ______.

3. (人教 B 版必修第二册 P13 练习 AT1 改编) 已知指数函数的图像过点 $(2,81)$, 则这个指数函数的解析式为 ______.

4. (人教 A 版必修第一册 P110 习题 4.1T6 改编) 如果在某种细菌培养过程中, 细菌每 10 min 分裂 1 次 (1 次分裂成 2 个), 那么经过 1h, 1 个这种细菌可以分裂成 ______ 个.

5. (人教 A 版必修第一册 P159 复习参考题 4T1(1) 改编) 函数 $y=-2^{-x}$ 与 $y=2^x$ 的图像 (　　).

   A. 关于 x 轴对称

   B. 关于 y 轴对称

   C. 关于原点对称

   D. 关于直线 $y=x$ 对称

6. (2005 福建卷理 5) 函数 $f(x)=a^{x-b}$ 的图像如图 2-4所示, 其中 a,b 为常数, 则下列结论正确的是 (　　).

   A. $a>1, b<0$

   B. $a>1, b>0$

   C. $0<a<1, b>0$

   D. $0<a<1, b<0$

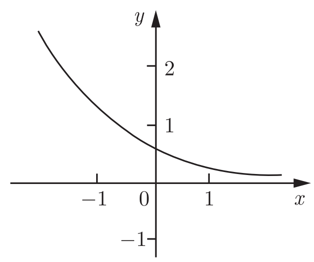


图 2-4

7. (2002 全国卷理 13) 函数 $y=a^x$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值的和为 3, 则 $a=$ ______.

8. (2009 江苏卷 10) 已知 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 函数 $f(x)=a^x$, 若实数 m,n 满足 $f(m)>f(n)$, 则 m,n 的大小关系为 ______.

9. (2010 陕西卷文 7) 下列四类函数中, 具有性质“对任意的 $x>0,y>0$, 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$”的是 (　　).

A. 幂函数　　B. 对数函数

C. 指数函数　　D. 余弦函数

10. (2021 新高考全国 I 卷 13) 已知函数 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 是偶函数, 则 $a=$ ______.

11. (2017 北京卷理 5) 已知函数 $f(x)=3^x-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, 则 $f(x)$(　　).

A. 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

B. 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

C. 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

D. 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

12. (2016 新课标全国 Ⅲ 卷理 6) 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$, $b=4^{\frac{2}{5}}$, $c=25^{\frac{1}{3}}$, 则 (　　).

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$

C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

2.5.3　中档题

1. (2010 重庆卷文 4) 函数 $y=\sqrt{16-4^x}$ 的值域是 (　　).

A. $[0,+\infty)$　　B. $[0,4]$

C. $[0,4)$　　D. $(0,4)$

2. (2005 江西卷理 10 改编-多选题) 已知实数 a,b 满足等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a=\left(\dfrac{1}{3}\right)^b$, 下列关系式成立的是 (　　).

A. $0<b<a$　　B. $a<b<0$

C. $b<a<0$　　D. $a=b=0$

3. (人教 B 版必修第二册 P52 复习题 B 组 T11 改编) 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x$ 的最小值为 ______.

4. (2004 湖南卷文 16) 若直线 $y=2a$ 与函数 $y=|a^x-1|(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图像有两个公共点, 则 a 的取值范围是 ________.

5. (2008 江西卷理 14) 不等式 $2^{x-\frac{3}{x}+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$ 的解集为 ______.

6. (2019 北京卷理 13) 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^{-x}$($a$ 为常数), 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a=$ ______; 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则 a 的取值范围是 ______.

7. (2020 天津卷 6) 设 $a=3^{0.7}$, $b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-0.8}$, $c=\log_{0.7}0.8$, 则 a,b,c 的大小关系为 (　　).

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

8. (2015 山东卷理 14) 已知函数 $f(x)=a^x+b(a>0,a\neq 1)$ 的定义域和值域都是 $[-1,0]$, 则 $a+b=$ ______.

9. (2016 浙江卷文 7) 已知函数 $f(x)$ 满足:$f(x)\geqslant |x|$ 且 $f(x)\geqslant 2^x$, $x\in\mathbf{R}$, (　　).

A. 若 $f(a)\leqslant |b|$, 则 $a\leqslant b$

B. 若 $f(a)\leqslant 2^b$, 则 $a\leqslant b$

C. 若 $f(a)\geqslant |b|$, 则 $a\geqslant b$

D. 若 $f(a)\geqslant 2^b$, 则 $a\geqslant b$

10. (2015 山东卷文 8) 若函数 $f(x)=\dfrac{2^x+1}{2^x-a}$ 是奇函数, 则使 $f(x)>3$ 成立的 x 的取值范围为 (　　).

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-1,0)$

C. $(0,1)$　　D. $(-1,+\infty)$

11. (2016 江苏卷 20 改编) 已知函数 $f(x)=2^x+2^{-x}$, 若对任意 $x\in\mathbf{R}$, 不等式 $f(2x)\geqslant mf(x)-6$ 恒成立, 则实数 m 的最大值 ______.

12. (2020 新课标全国 Ⅱ 卷理 11) 若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$, 则 (　　).

A. $\ln(y-x+1)>0$

B. $\ln(y-x+1)<0$

C. $\ln|x-y|>0$

D. $\ln|x-y|<0$

2.6 对数与对数函数

2.6.1 知识逐点夯实

1. 对数的概念

(1) 对数概念: 一般地, 如果 $a^x=N(a>$

0 且 $a\neq 1$), 那么数 x 叫作以 a 为底 N 的对数, 记作______, 其中 a 叫作对数的底数, N 叫作真数.

(2) 两个重要对数

①常用对数: 以 10 为底的对数 $\log_{10}N$, 简记为______;

②自然对数: 以无理数 $\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为底的对数 $\log_{\mathrm{e}}N$, 简记为______.

2. 对数的性质与运算法则

(1) 对数的运算法则: 如果 $a>0$, 且 $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$, 那么:

①$\log_a(MN)=$______;

②$\log_a\dfrac{M}{N}=$______;

③$\log_a M^n=$______$(n\in\mathbf{R})$.

(2) 对数的性质 ($a>0$ 且 $a\neq 1$)

①$\log_a 1=$______;

②$\log_a a=$______;

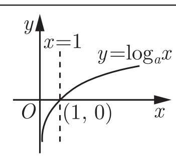
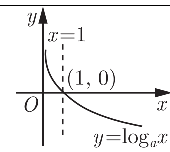
③$a^{\log_a N}=$______;

④$\log_a a^N=$______.

(3) 对数的换底公式:$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$($a>0$ 且 $a\neq 1$;$c>0$ 且 $c\neq 1$;$b>0$).

3. 对数函数的概念: 函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$) 叫作对数函数, 其中 x 是自变量, 函数的定义域为 $(0,+\infty)$.

4. 对数函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的图像与性质

<table>
<tr><td>$y=\log_a x$</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>图像</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td colspan="2">定义域为___①___</td></tr>
<tr><td colspan="2">值域为___②___</td></tr>
<tr><td colspan="2">图像过定点___③___, 即恒有 $\log_a 1=0$</td></tr>
<tr><td>当 $x>1$ 时, 恒有___④___;
当 $0<x<1$ 时, 恒有___⑤___</td><td>当 $x>1$ 时, 恒有___⑥___;
当 $0<x<1$ 时, 恒有___⑦___</td></tr>
<tr><td>在 $(0,+\infty)$ 上为___⑧___</td><td>在 $(0,+\infty)$ 上为___⑨___</td></tr>
<tr><td>注意</td><td colspan="2">对数函数的底数 a 的大小不确定时, 需分 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况进行讨论</td></tr>
</table>

5. 反函数: 指数函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$) 与对数函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$) 互为反函数, 它们的图像关于直线________对称.

6. 常用性质与结论

(1) 换底公式的变形

①$\log_a b \log_b a = 1$, 即 $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$($a, b$ 均大于 0 且不等于 1);

②$\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n} \log_a b$($a, b$ 均大于 0 且不等于 1, $m \neq 0$, $n \in \mathbf{R}$).

(2) 换底公式的推广

$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$($a, b, c$ 均大于 0 且不等于 1, $d > 0$).

(3) 对数函数图像的特点

①函数 $y = \log_a x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像关于 x 轴对称;

②在第一象限内, 不同底的对数函数的图像从左到右底数逐渐增大.

2.6.2　基础题

1. (人教 A 版必修第一册 P126 习题 4.3T2(2) 改编) 若 $\lg a(a > 0)$ 与 $\lg b(b > 0)$ 互为相反数, 则 (　　).

A. $a + b = 0$　　B. $a - b = 0$

C. $ab = 1$　　D. $\dfrac{a}{b} = 1$

2. (2015 浙江卷文 9) 计算:$\log_2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} =$ ______, $2^{\log_2 3 + \log_4 3} =$ ______.

3. (2020 新课标全国 I 卷文 8) 设 $a \log_3 4 = 2$, 则 $4^{-a} =$(　　).

A. $\dfrac{1}{16}$　　B. $\dfrac{1}{9}$　　C. $\dfrac{1}{8}$　　D. $\dfrac{1}{6}$

4. (2013 陕西卷文 3 改编-多选题) 设 a, b, c 均为不等于 1 的正实数, 则下列等式中不成立的是 (　　).

A. $\log_a b \cdot \log_c b = \log_c a$

B. $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$

C. $\log_a(bc) = \log_a b \cdot \log_a c$

D. $\log_a(b + c) = \log_a b + \log_a c$

5. (人教 A 版必修第一册 P130 例 1(1) 改编) 函数 $f(x) = \log_3 x^2$ 的定义域为 ______.

6. (人教 B 版必修第二册 P52 复习题 B 组 T7 改编) 已知 $f(x^5) = \lg x$, 则 $f(2) =$ ______.

7. (2018 新课标全国 I 卷文 13) 已知函数 $f(x) = \log_2(x^2 + a)$, 若 $f(3) = 1$, 则 $a =$ ______.

8. (2014 山东卷文 6) 已知函数 $y=\log_a(x+c)$(a,c 为常数, 其中 $a>0$, $a\neq 1$) 的图像如图 2-5 所示, 则下列结论成立的是 (　　).

A. $a>1,c>1$

B. $a>1,0<c<1$

C. $0<a<1,c>1$

D. $0<a<1,0<c<1$

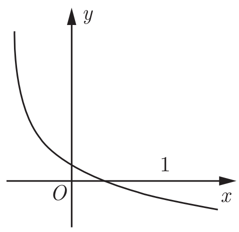


图 2-5

9. (2014 天津卷理 4) 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4)$ 的单调递增区间是 (　　).

A. $(0,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2)$

10. (2019 新课标全国 Ⅱ 卷理 14) 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x<0$ 时, $f(x)=-\mathrm{e}^{ax}$, 若 $f(\ln 2)=8$, 则 $a=$______.

11. (2015 新课标全国 I 卷理 13) 若函数 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$ 为偶函数, 则 $a=$______.

12. (2021 新高考全国 Ⅱ 卷 7) 若 $a=\log_5 2$, $b=\log_8 3$, $c=\dfrac{1}{2}$, 则 (　　).

A. $c<b<a$　　B. $b<a<c$

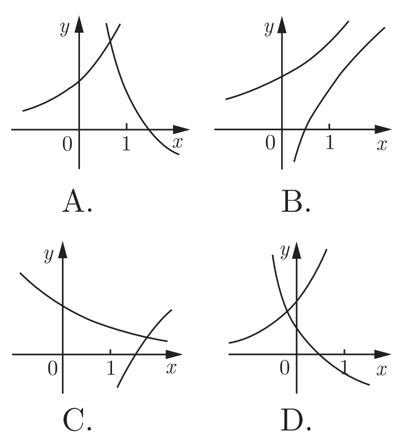
C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

2.6.3 中档题

1. (2016 浙江卷理 12) 已知 $a>b>1$, 若 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{5}{2}$, $a^b=b^a$, 则 $a=$______, $b=$______.

2. (人教 A 版必修第一册 P127 习题 4.3T8 改编) 某地 GDP 的年平均增长率为 6.5%, 按此增长率, 该地 GDP 翻两番需要 ______ 年. (参考数据:$\log_{1.065} 2\approx 11$)

3. (2019 浙江卷 6) 在同一直角坐标系中, 函数 $y=\dfrac{1}{a^x}$, $y=\log_a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的图像可能是 (　　).



4. (2012 新课标全国卷文 11) 当 $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ 时, $4^x < \log_a x$, 则 a 的取值范围是 ( ).

A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

C. $(1, \sqrt{2})$　　D. $(\sqrt{2}, 2)$

5. (2014 重庆卷理 12) 函数 $f(x) = \log_2 \sqrt{x} \cdot \log_{\sqrt{2}}(2x)$ 的最小值为 ______.

6. (人教 B 版必修第二册 P52 复习题 C 组 T3 改编) 已知 $\lg a, \lg b$ 是方程 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 的两个根, 则 $\left(\lg \frac{b}{a}\right)^2 =$ ______.

7. (2019 新课标全国 Ⅲ 卷文 12) 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 则 ( ).

A. $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$

B. $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$

C. $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$

D. $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$

8. (2018 全国 Ⅲ 卷文 16) 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + 1$, $f(a) = 4$, 则 $f(-a) =$ ______.

9. (2020 新课标全国 Ⅲ 卷文 10) 设 $a = \log_3 2$, $b = \log_5 3$, $c = \frac{2}{3}$, 则 ( ).

A. $a < c < b$　　B. $a < b < c$

C. $b < c < a$　　D. $c < a < b$

10. (2004 浙江卷文 9) 若函数 $f(x) = \log_a(x+1)(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的定义域和值域都是 $[0, 1]$, 则 $a =$( ).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 2

11. (2007 江苏卷 8) 设 $f(x) = \lg\left(\frac{2}{1-x} + a\right)$ 是奇函数, 则使 $f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是 ( ).

A. $(-1, 0)$　　B. $(0, 1)$

C. $(-\infty, 0)$　　D. $(-1, 1)$

12. (2020 新课标全国Ⅱ卷理 9) 设函数 $f(x)=\ln|2x+1|-\ln|2x-1|$, 则 $f(x)($ $)$.

A. 是偶函数, 且在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 单调递增

B. 是奇函数, 且在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 单调递减

C. 是偶函数, 且在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 单调递增

D. 是奇函数, 且在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 单调递减

2.7 函数的图像

2.7.1 知识逐点夯实

1. 利用描点法作函数图像的方法步骤

化简 → 确定函数的定义域并化简函数的解析式；讨论函数的性质（单调性、奇偶性、周期性、对称性）

列表 → 除考虑点的一般性外，尤其要注意特殊点，如：与坐标轴的交点、顶点、端点、最（极）值点、对称点等

描点 → 画出直角坐标系，准确描出表中所表示的各个点

连线 → 用光滑的曲线依次连接所描的各个点，得到图像

2. 变换法作函数的图像

(1) 平移变换

①$y=f(x)$ 的图像向右平移 $a(a>0)$ 个单位长度得到______的图像;

②$y=f(x)$ 的图像向左平移 $a(a>0)$ 个单位长度得到______的图像;

③$y=f(x)$ 的图像向上平移 $b(b>0)$ 个单位长度得到______的图像;

④$y=f(x)$ 的图像向下平移 $b(b>0)$ 个单位长度得到______的图像.

(2) 伸缩变换

①$y=f(x)$ 的图像上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{\omega}(\omega>1)$ 倍得到______的图像;

②$y=f(x)$ 的图像上所有点的横坐标伸长为原来的 $\frac{1}{\omega}(0<\omega<1)$ 倍得到______的图像;

③$y=f(x)$ 的图像上所有点的纵坐标伸长为原来的 $A(A>1)$ 倍得到______的图像;

④$y=f(x)$ 的图像上所有点的纵坐标缩短为原来的 $A(0<A<1)$ 倍得到______的图像.

(3) 对称变换

①$y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 的图像关于______对称;

②$y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的图像关于______对称;

③$y=f(x)$ 与 $y=-f(-x)$ 的图像关于______对称.

(4) 翻折变换

①$y=|f(x)|$ 的图像: 可将 $y=f(x)$ 的图像在______的部分关于 x 轴向上翻折, 其余

部分不变;

②$y=f(|x|)$ 的图像: 可先作出 $y=f(x)$ 在 y 轴及其右边的图像, 再作 y 轴右边的图像关于______对称的图像.

3. 常用性质与结论

(1) 函数图像自身的轴对称

①$f(-x)=f(x) \Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称;

②若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且有 $f(a+x)=f(b-x)$, 则函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称.

(2) 函数图像自身的中心对称

①$f(-x)=-f(x) \Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图像关于原点对称;

②函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 (a,b) 成中心对称 $\Leftrightarrow f(a+x)+f(a-x)=2b$.

(3) 两个函数图像之间的对称关系

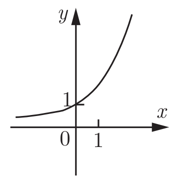
①函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=f(b-x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{b-a}{2}$ 对称 (由 $a+x=b-x$ 得对称轴方程);

②函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(2a-x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称;

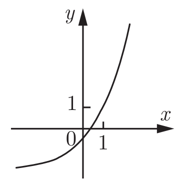
③函数 $y=f(x)$ 与 $y=2b-f(2a-x)$ 的图像关于点 (a,b) 对称.

2.7.2　基础题

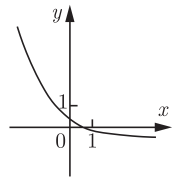
1. (2012 四川卷理 5) 函数 $y=a^x-\dfrac{1}{a}(a>0$ 且 $a \neq 1)$ 的图像可能是 (　　).



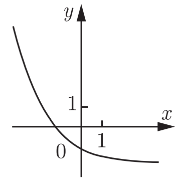
A.



B.

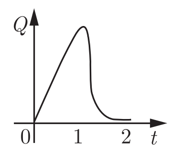


C.

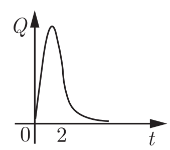


D.

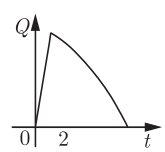
2. (人教 A 版必修第一册 P140 习题 4.4T6 改编) 在 2h 内将某种药物注射进患者的血液中, 在注射期间, 血液中的药物含量呈线性增加; 停止注射后, 血液中的药物含量呈指数衰减, 能反映血液中药物含量 Q 随时间 t 变化的图像是 (　　).



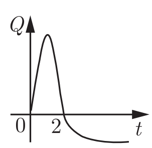
A.



B.

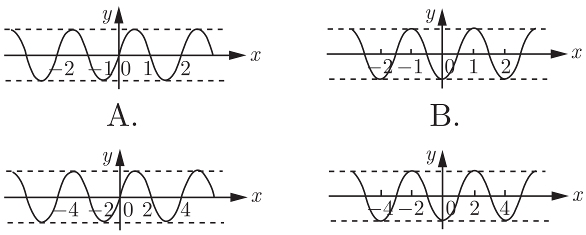


C.



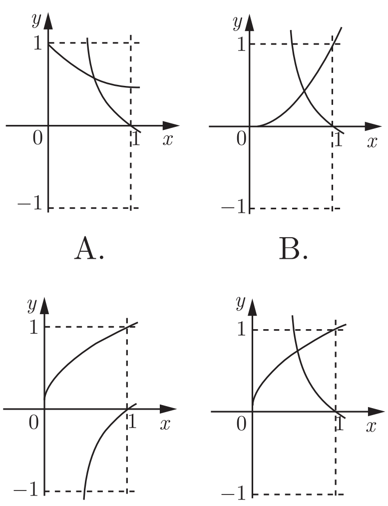
D.

3. (2011 陕西卷理 3) 设函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=f(x)$, $f(x+2)=f(x)$, 则 $y=f(x)$ 的图像可能是 (　　).



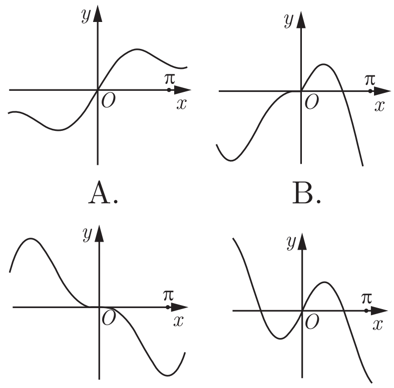
A.　B.　C.　D.

4. (2014 浙江卷理 7) 在同一直角坐标系中, 函数 $f(x)=x^a(x\geqslant 0)$, $g(x)=\log_a x$ 的图像可能是 (　　).



A.　B.　C.　D.

5. (2013 山东卷理 8) 函数 $y=x\cos x+\sin x$ 的图像大致为 (　　).



A.　B.　C.　D.

6. (2013 北京卷理 5) 函数 $f(x)$ 的图像向右平移 1 个单位长度, 所得图像与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 关于 y 轴对称, 则 $f(x)=$(　　).

A. e^{x+1}　　B. e^{x-1}

C. e^{-x+1}　　D. e^{-x-1}

7. (2009 北京卷理 3) 为了得到函数 $y=\lg\dfrac{x+3}{10}$ 的图像, 只需把函数 $y=\lg x$ 的图像上所有的点 (　　).

A. 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

B. 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

C. 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

D. 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

8. (2015 安徽卷文 14) 在平面直角坐标系 xOy 中, 若直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |x-a|-1$ 的图像只有一个交点, 则 a 的值为 ______.

9. (1997 全国卷文 7) 设函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上, 则函数 $y=f(x-1)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图像关于 (　　).

A. 直线 $y=0$ 对称

B. 直线 $x=0$ 对称

C. 直线 $y=1$ 对称

D. 直线 $x=1$ 对称

10. (2004 上海卷理 5) 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5,5]$. 若当 $x\in[0,5]$ 时, $f(x)$ 的图像如图 2-6所示, 则不等式 $f(x)<0$ 的解是 ______.

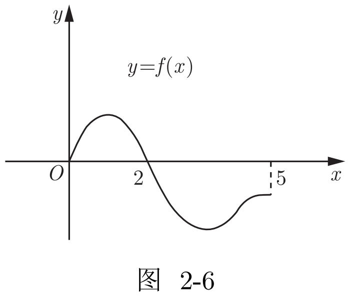


图 2-6

11. (2014 新课标全国 Ⅱ 卷文 15) 偶函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称, $f(3)=3$, 则 $f(-1)=$ ______.

12. (2020 北京卷理 6) 已知函数 $f(x)=2^x-x-1$, 则不等式 $f(x)>0$ 的解集是 (　　).

A. $(-1,1)$

B. $(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty)$

C. $(0,1)$

D. $(-\infty,0)\bigcup(1,+\infty)$

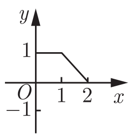
2.7.3　中档题

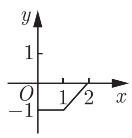
1. (2007 重庆卷理 9) 已知 $f(x)$ 在 $(8,+\infty)$ 上递减且 $y=f(x+8)$ 为偶函数, 则 (　　).

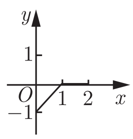
A. $f(6)>f(7)$　　B. $f(6)>f(9)$

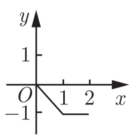
C. $f(7)>f(9)$　　D. $f(7)>f(10)$

2. (2012 湖北卷文 6) 已知定义在区间 $[0,2]$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图像如图 2-7 所示, 则 $y=-f(2-x)$ 的图像为 (　　).


A.


B.


C.


D.

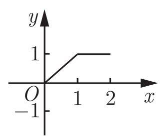


图 2-7

3. (2011 新课标全国卷文 12) 已知函数 $y=f(x)$ 的周期为 2, 当 $x\in[-1,1]$ 时 $f(x)=x^2$, 那么函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=|\lg x|$ 的图像的交点共有 (　　).

A. 10 个　　B. 9 个

C. 8 个　　D. 1 个

4. (2018 新课标全国 Ⅲ 卷文 7) 下列函数中, 其函数图像与函数 $y=\ln x$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称的是 (　　).

A. $y=\ln(1-x)$　　B. $y=\ln(2-x)$

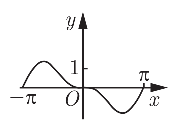
C. $y=\ln(1+x)$　　D. $y=\ln(2+x)$

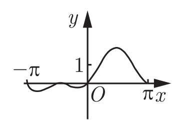
5. (2014 山东卷理 8) 已知函数 $f(x)=|x-2|+1$, $g(x)=kx$, 若 $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是 (　　).

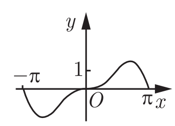
A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

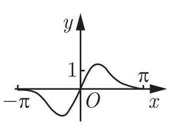
C. $(1,2)$　　D. $(2,+\infty)$

6. (2013 新课标全国 I 卷文 9) 函数 $f(x)=(1-\cos x)\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致为 (　　).


A.


B.


C.


D.

7. (2014 湖北卷文 15) 如图 2-8 所示, 函数 $y=f(x)$ 的图像由两条射线和三条线段组成. 若 $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)>f(x-1)$, 则正实数 a 的取值范围为 ______.

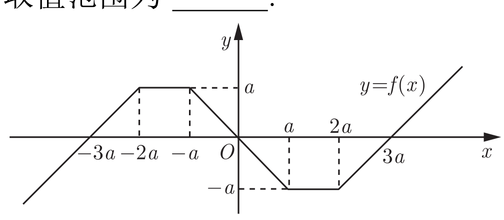


图 2-8

8. (2010 湖南卷理 8) 用 $\min\{a,b\}$ 表示 a, b 两数中的最小值. 若函数 $f(x)=\min\{|x|,|x+t|\}$ 的图像关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称, 则 t 的值为 (　　).

A. -2　B. 2　C. -1　D. 1

9. (2010 全国 I 卷理 10) 已知函数 $f(x)=|\lg x|$, 若 $0<a<b$ 且 $f(a)=f(b)$, 则 $a+2b$ 的范围是 (　　).

A. $(2\sqrt{2},+\infty)$　B. $[2\sqrt{2},+\infty)$

C. $(3,+\infty)$　D. $[3,+\infty)$

10. (2015 安徽卷理 14) 函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图像如图 2-9所示, 则下列结论成立的是 (　　).

A. $a>0,b>0,c<0$

B. $a<0,b>0,c>0$

C. $a<0,b>0,c<0$

D. $a<0,b<0,c<0$

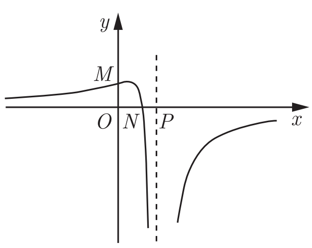


图 2-9

11. (2016 山东卷理 15) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\leqslant m\\ x^2-2mx+4m, & x>m\end{cases}$, 其中 $m>0$, 若存在 b 使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根, 则 m 的取值范围是 ______.

12. (2015 湖南卷文 14) 已知函数 $f(x)=|2^x-2|-b$ 有两个零点, 则实数 b 的取值范围是 ______.

2.8 函数与方程

2.8.1 知识逐点夯实

1. 函数的零点

(1) 零点的定义: 对于函数 $y=f(x)$, 我们把使______的实数 x 叫作函数 $y=f(x)$ 的零点.

(2) 零点的几个等价关系: 方程 $f(x)=0$ 有实根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点.

2. 函数的零点存在性定理

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图像是______的一条曲线, 并且有______, 那么, 函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点, 即存

在 $c \in (a,b)$, 使得______, 这个 c 就是方程 $f(x)=0$ 的根.

3. 二分法的定义

对于在区间 $[a,b]$ 上连续不断且 $f(a)f(b)<0$ 的函数 $y=f(x)$, 通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二, 使区间的两个端点逐步逼近零点, 进而得到零点近似值的方法叫作二分法.

4. 常用性质与结论

(1) 若连续不断的函数 $f(x)$ 在定义域上是单调函数, 则 $f(x)$ 至多有一个零点.

(2) 连续不断的函数, 其相邻两个零点之间的所有函数值保持同号.

(3) 连续不断的函数图像通过零点时, 函数值可能变号, 也可能不变号.

2.8.2 基础题

1. (人教 B 版必修第一册 P119 习题 3-2BT1(1) 改编) 函数 $f(x)=x^3-8x$ 的零点所构成的集合为______.

2. (人教 B 版必修第一册 P119 习题 3-2AT10 改编) 已知函数 $y=f(x)$ 是偶函数, 其图像与 x 轴有四个交点, 则方程 $f(x)=0$ 的所有实根的和为______.

3. (2014 湖北卷文 9) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geqslant 0$ 时, $f(x)=x^2-3x$, 则函数 $g(x)=f(x)-x+3$ 的零点的集合为 ( ).

A. $\{1,3\}$

B. $\{-3,-1,1,3\}$

C. $\{2-\sqrt{7},1,3\}$

D. $\{-2-\sqrt{7},1,3\}$

4. (人教 B 版必修第一册 P119 习题 3-2AT6 改编) 已知 $f(x)=x^2+ax+b$, 且 $f(x)<0$ 的解集为 $(-3,-1)$, 则 $a=$______, $b=$______.

5. (人教 B 版必修第一册 P119 习题 3-2AT7 改编) 函数 $f(x)=mx^2-(1-m)x+m$ 没有零点, 则实数 m 的取值范围为______.

6. (2014 北京卷文 6) 已知函数 $f(x)=\dfrac{6}{x}-\log_2 x$, 下列区间中, 包含 $f(x)$ 的零点区间的是 ( ).

A. $(0,1)$ B. $(1,2)$

C. $(2,4)$ D. $(4,+\infty)$

7. (2013 重庆卷理 6) 若 $a<b<c$, 则函数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ 的两个零点分别位于区间 (　　).

A. (a,b) 和 (b,c) 内

B. $(-\infty,a)$ 和 (a,b) 内

C. (b,c) 和 $(c,+\infty)$ 内

D. $(-\infty,a)$ 和 $(c,+\infty)$ 内

8. (2012 天津卷理 4) 函数 $f(x)=2^x+x^3-2$ 在区间 $(0,1)$ 内的零点个数是 (　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

9. (2014 福建卷文 15) 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & x\leqslant 0 \\ 2x-6+\ln x, & x>0 \end{cases}$ 的零点个数是 ______.

10. (2013 湖南卷理 5) 函数 $f(x)=2\ln x$ 的图像与函数 $g(x)=x^2-4x+5$ 的图像的交点个数为 (　　).

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

11. (2010 浙江卷文 9) 已知 x_0 是函数 $f(x)=2^x+\dfrac{1}{1-x}$ 的一个零点. 若 $x_1\in(1,x_0)$, $x_2\in(x_0,+\infty)$, 则 (　　).

A. $f(x_1)<0, f(x_2)<0$

B. $f(x_1)<0, f(x_2)>0$

C. $f(x_1)>0, f(x_2)<0$

D. $f(x_1)>0, f(x_2)>0$

12. (2013 天津卷文 8) 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x-2$, $g(x)=\ln x+x^2-3$, 若实数 a, b 满足 $f(a)=0$, $g(b)=0$, 则 (　　).

A. $g(a)<0<f(b)$

B. $f(b)<0<g(a)$

C. $0<g(a)<f(b)$

D. $f(b)<g(a)<0$

2.8.3　中档题

1. (人教 B 版必修第一册 P120 习题 3-2BT2 改编) 已知 $f(x)=mx^2-(m+3)x-1$, 且 $f(x)<0$ 对任意实数 x 均成立, 实数 m 的取值集合为 ______.

2. (人教 B 版必修第一册 P119 习题 3-2BT3 改编) 若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个零点 $-1,1,x_0$, 且 $x_0\in(2,3)$, 则实数 c 的取值范围为 ______.

3. (人教 A 版必修第一册 P160 复习参考题 4T5(3) 改编) 已知函数 $f(x)=2^x+x$, $g(x)=\log_2 x+x$, $h(x)=x^3+x$ 的零点分别为 a,b,c, 则 a,b,c 的大小顺序为 ( ).

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$

C. $c>a>b$　　D. $b>a>c$

4. (人教 B 版必修第一册 P133 复习题 C 组 T3 改编) 如果关于 x 的方程 $7x^2-(a+13)x+a^2-a-2=0$ 的两根分别在区间 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 内, 则实数 a 的取值范围为 ______.

5. (2009 山东卷文 14) 若函数 $f(x)=a^x-x-a(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围是 ______.

6. (2018 新课标全国 I 卷理 9) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0 \\ \ln x, & x>0 \end{cases}$, 若 $g(x)=f(x)+x+a$ 存在两个零点, 则 a 的取值范围是 ( ).

A. $[-1,0)$　　B. $[0,+\infty)$

C. $[-1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

7. (2013 天津卷理 7) 函数 $f(x)=2^x|\log_{0.5} x|-1$ 的零点个数为 ( ).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. (2011 湖南卷文 8) 已知函数 $f(x)=e^x-1$, $g(x)=-x^2+4x-3$, 若有 $f(a)=g(b)$, 则 b 的取值范围为 ( ).

A. $[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$

B. $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$

C. $[1,3]$

D. $(1,3)$

9. (2019 天津卷文 8) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+a$ 恰有两个互异的实数解, 则 a 的取值范围为 ( ).

A. $\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]$　　B. $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]$

C. $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]\bigcup\{1\}$　　D. $\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]\bigcup\{1\}$

10. (2009 山东卷理 16) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-4)=-f(x)$, 且在区间 $[0,2]$ 上是增函数. 若方程 $f(x)=m(m>0)$ 在区间 $[-8,8]$ 上有四个不同的根 x_1,x_2,x_3,x_4, 则 $x_1+x_2+x_3+x_4=$ ______.

11. (2003 上海卷文 16) $f(x)$ 是定义在区间 $[-c,c]$ 上的奇函数, 其图像如图 2-10 所示, 令 $g(x)=af(x)+b$, 则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是 (　　).

A. 若 $a<0$, 则函数 $g(x)$ 的图像关于原点对称

B. 若 $a=1$, $0<b<2$, 则方程 $g(x)=0$ 有大于 2 的实根

C. 若 $a=-2$, $b=0$, 则函数 $g(x)$ 的图像关于 y 轴对称

D. 若 $a\neq 0$, $b=2$, 则方程 $g(x)=0$ 有三个实根

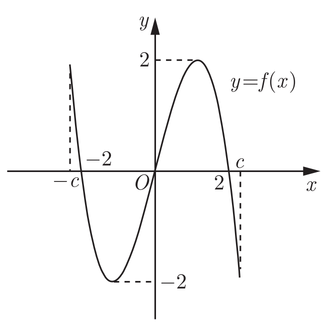


图 2-10

12. (2019 新课标全国 Ⅱ 卷理 12) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 满足 $f(x+1)=2f(x)$, 且当 $x\in(0,1]$ 时, $f(x)=x(x-1)$. 若对任意 $x\in(-\infty,m]$, 都有 $f(x)\geqslant -\dfrac{8}{9}$, 则 m 的范围是 (　　).

A. $\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right]$

C. $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{8}{3}\right]$

2.9 函数模型及其应用

2.9.1 知识逐点夯实

1. 常见的 8 种函数模型

(1) 正比例函数模型:$f(x)=kx$(k 为常数, $k\neq 0$);

(2) 反比例函数模型:$f(x)=\dfrac{k}{x}$(k 为常数, $k\neq 0$);

(3) 一次函数模型:$f(x)=kx+b$(k,b 为常数, $k\neq 0$);

(4) 二次函数模型:$f(x)=ax^2+bx+c$(a,b,c 为常数, $a\neq 0$);

(5) 指数函数模型:$f(x)=ab^x+c$(a,b,c 为常数, $a\neq 0,b>0,b\neq 1$);

(6) 对数函数模型:$f(x)=m\log_a x+n(a,m,n$ 为常数, $m\neq 0,a>0,a\neq 1)$;

(7) 幂函数模型:$f(x)=ax^n+b(a,b,n$ 为常数, $a\neq 0,n\neq 1)$;

(8) 对勾函数模型:$y=x+\dfrac{a}{x}(a>0)$.

2. 三种函数模型的性质

性质	函数		
	$y=a^x(a>1)$	$y=\log_a x(a>1)$	$y=x^n(n>0)$
在 $(0,+\infty)$ 上的增减性	单调递增	单调递增	单调递增
增长速度	越来越快	越来越慢	相对平稳
图像的变化	随 x 的增大逐渐表现为与 y 轴平行	随 x 的增大逐渐表现为与 x 轴平行	随 n 值变化而各有不同
值的比较	存在一个 x_0, 当 $x>x_0$ 时, $\log_a x<x^n<a^x$		

3. 常用性质与结论

> "直线上升"是匀速增长, 其增长量固定不变; "指数增长"是先慢后快, 其增长量成倍增加, 常用"指数爆炸"来形容;"对数增长"是先快后慢, 其增长量越来越小.

2.9.2 基础题

1. (人教 B 版必修第一册 P124 习题 3-3AT1 改编) 一种商品的售价上涨 2% 后, 又下降了 2%, 则商品最终售价 y 与原来的售价 x 之间的关系为 ______.

2. (人教 A 版必修第一册 P55 练习 T3 改编) 某网店销售一批新款削笔器, 每个削笔器的最低售价为 15 元. 若按最低销售价销售, 每天能卖出 30 个, 若一个削笔器的售价每调高 1 元, 日销售量将减少 2 个. 为了使这批削笔器每天获得 400 元以上的销售收入, 则削笔器的价格的范围为 ______ 元.

3. (2011 北京卷文 7) 某车间分批生产某种产品, 每批的生产准备费用为 800 元. 若每批生产 x 件, 则平均仓储时间为 $\dfrac{x}{8}$ 天, 且每件产品每天的仓储费用为 1 元, 为使每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小, 每批应生产产品 (　　).

A. 60 件　　B. 80 件

C. 100 件　　D. 120 件

4. (2020 新课标全国 Ⅱ 卷文 4) 在新冠肺炎疫情防控期间, 某超市开通网上销售业务, 每天能完成 1200 份订单的配货, 由于订单量大幅增加, 导致订单积压. 为解决困难, 许多志愿者踊跃报名参加配货工作. 已知该超市某日积压 500 份订单未配货, 预计第二天的新订单超过 1600 份的概率为 0.05, 志愿者每人每天能完成 50 份订单的配货, 为使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于 0.95, 则至少需要志愿者 (　　) 名.

A. 10　　B. 18　　C. 24　　D. 32

5. (2017 江苏卷 10) 某公司一年购买某种货物 600 吨, 每次购买 x 吨, 运费为 6 万元/次, 一年的总存储费用为 $4x$ 万元, 要使一年的总运费与总存储之和最小, 则 x 的值是 ______.

6. (2015 北京卷文 8) 某辆汽车每次加油都把油箱加满, 下表记录了该车相邻两次加油时的情况.

加油时间	加油量/升	加油时的累计里程/千米
2015 年 5 月 1 日	12	35000
2015 年 5 月 15 日	48	35600

注: “累计里程” 指汽车从出厂开始累计行驶的路程. 在这段时间内, 该车每 100 千米平均耗油量为 (　　) 升.

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

7. (2014 湖南卷理 8) 某市生产总值连续两年持续增加, 第一年的增长率为 p, 第二年的增长率为 q, 则该市这两年生产总值的年平均增长率为 (　　).

A. $\dfrac{p+q}{2}$

B. $\dfrac{(p+1)(q+1)-1}{2}$

C. $\sqrt{pq}$

D. $\sqrt{(p+1)(q+1)}-1$

8. (2020 新课标全国 Ⅲ 卷文 4)Logistic 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域．有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$(t 的单位：天) 的 Logistic 模型:$I(t)=\dfrac{K}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t-53)}}$，其中 K 为最大确诊病例数．当 $I(t_0)=0.95K$ 时, 标志着已初步遏制疫情, 则 t_0 约为 (　　)($\ln 19\approx 3$).

A. 60　　B. 63　　C. 66　　D. 69

9. (2020 新高考全国 I 卷 6) 基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人数, 世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间. 在新冠肺炎疫情初始阶段, 可以用指数模型:$I(t)=\mathrm{e}^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t(单位: 天) 的变化规律, 指数增长率 r 与 R_0, T 近似满足 $R_0=1+rT$. 有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$, $T=6$. 据此, 在新冠肺炎疫情初始阶段, 累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为 (　　) ($\ln 2\approx 0.69$).

A. 1.2 天　　B. 1.8 天

C. 2.5 天　　D. 3.5 天

10. (2014 北京卷文 8) 加工爆米花时, 爆开且不煳的粒数占加工总粒数的百分比称为“可食用率”. 在特定条件下, 可食用率 p 与加工时间 t(单位: 分钟) 满足的函数关系 $p=at^2+bt+c$(a,b,c 是常数), 图 2-11 记录了三次实验的数据. 根据上述函数模型和实验数据, 可以得到最佳加工时间为 (　　).

A. 3.50 分钟　　B. 3.75 分钟

C. 4.00 分钟　　D. 4.25 分钟

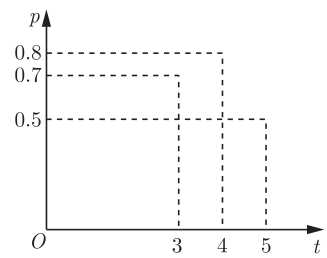


图 2-11

11. (2007 湖北卷文 15) 为了预防流感, 某学校对教室用药熏消毒法进行消毒. 已知药物释放过程中, 室内每立方米空气中的含药量 y(毫克) 与时间 t(小时) 成正比; 药物释放完毕后, y 与 t 的函数关系式为 $y=\left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$($a$ 为常数), 如图 2-12所示, 根据图中提供的信息, 回答下列问题:

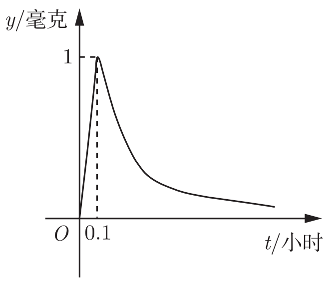


图 2-12

(I) 从药物释放开始, 每立方米空气中的含药量 y(毫克) 与时间 t(小时) 之间的函数关系式为 ______;

(Ⅱ) 据测定, 当空气中每立方米的含药量降低到 0.25 毫克以下时, 学生方可进教室, 那么药物释放开始, 至少需要经过 ______ 小时后, 学生才能回到教室.

12. (2011 湖北卷文 15) 里氏震级 M 的计算公式为:$M=\lg A-\lg A_0$, 其中 A 是测震仪记录的地震曲线的最大振幅, A_0 是相应的标准地震的振幅. 假设在一次地震中, 测震仪记录的最大振幅是 1000, 此时标准地震的振幅为 0.001, 则此次地震的震级为 ______ 级;9 级地震的最大振幅是 5 级地震最大振幅的 ______ 倍.

2.9.3　中档题

1. (人教 A 版必修第一册 P155 习题 4.5T9 改编-多选题) 如图 2-13 所示, 某池塘里浮萍的面积 y(单位:m^2) 与时间 t(单位: 月) 的关系为 $y=a^t$, 则下列说法正确的是 (　　).

A. 浮萍每月的增长率为 1

B. 第 5 个月时, 浮萍面积就会超过 $30m^2$

C. 浮萍每月增加的面积都相等

D. 若浮萍蔓延到 $2m^2$, $3m^2$, $6m^2$ 所经过的时间分别是 t_1, t_2, t_3, 则 $t_1+t_2=t_3$

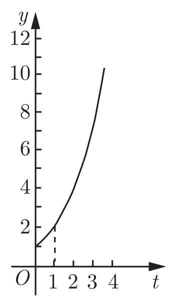


图 2-13

2. (2012 陕西卷文 10) 小王从甲地到乙地往返的时速分别为 a 和 $b(a<b)$, 其全程的平均时速为 v, 则 (　　).

A. $a<v<\sqrt{ab}$

B. $v=\sqrt{ab}$

C. $\sqrt{ab}<v<\dfrac{a+b}{2}$

D. $v=\dfrac{a+b}{2}$

3. (2005 湖南卷文 10) 某公司在甲、乙两地销售一种品牌车, 利润（单位: 万元）分别为 $L_1=5.06x-0.15x^2$ 和 $L_2=2x$, 其中 x 为销售量 (单位: 辆). 若该公司在这两地共销售 15 辆车, 则能获得的最大利润为 (　　).

A. 45.606　　B. 45.6

C. 45.56　　D. 45.51

4. (2013 陕西卷理 9) 在如图 2-14 所示的锐角三角形空地中, 欲建一个面积不小于 300m^2 的内接矩形花园 (阴影部分), 则其边长 x(单位:m) 的取值范围是 (　　).

A. $[15,20]$　　B. $[12,25]$

C. $[10,30]$　　D. $[20,30]$

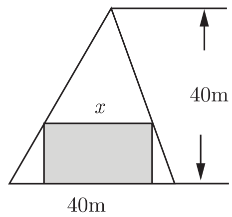


图 2-14

5. (2019 北京卷理 14) 李明自主创业, 在网上经营一家水果店, 销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃, 价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒. 为增加销量, 李明对这四种水果进行促销: 一次购买水果的总价达到 120 元, 顾客就少付 x 元. 每笔订单顾客网上支付成功后, 李明会得到支付款的 80%.

① 当 $x=10$ 时, 顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒, 需要支付 ______ 元;

② 在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则 x 的最大值为 ______.

6. (2017 北京卷理 8) 根据有关资料, 围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361}, 而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80}. 则下列各数中与 $\dfrac{M}{N}$ 最接近的是 (　　).(参考数据:$\lg 3\approx 0.48$)

A. 10^{33}　B. 10^{53}　C. 10^{73}　D. 10^{93}

7. (2019 新课标全国 I 卷理 4) 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\right.$, 称为黄金分割比例$\left.\right)$, 著名的“断臂维纳斯”便是如此. 此外, 最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述两个黄金分割比例, 且腿长为 105 cm, 头顶至脖子下端的长度为 26 cm, 则其身高可能是 (　　).

A. 165cm　　B. 175cm

C. 185cm　　D. 190cm

8. (2019 新课标全国 Ⅱ 卷理 4)2019 年 1 月 3 日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆, 我国航天事业取得又一重大成就, 实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系. 为解决这个问题, 发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”, 鹊桥沿着围绕地月拉格朗日 L_2 点的轨道运行. L_2 点是平衡点, 位于地月连线的延长线上. 设地球质量为 M_1, 月球质量为 M_2, 地月距离为 R, L_2 点到月球的距离为 r, 根据牛顿运动定律和万有引力定律, r 满足方程

$$\frac{M_1}{(R+r)^2}+\frac{M_2}{r^2}=(R+r)\frac{M_1}{R^3}$$

设 $\alpha=\frac{r}{R}$, 由于 α 的值很小, 因此在近似计算中 $\frac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx 3\alpha^3$, 则 r 的近似值为 (　　).

A. $\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}R$　　B. $\sqrt{\frac{M_2}{2M_1}}R$

C. $\sqrt[3]{\frac{3M_2}{M_1}}R$　　D. $\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}R$

9. (2019 北京卷理 6) 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$, 其中星等为 m_k 的星的亮度为 $E_k(k=1,2)$. 已知太阳的星等是 –26.7, 天狼星的星等是 –1.45, 则太阳与天狼星的亮度的比值为 (　　).

A. $10^{10.1}$　　B. 10.1

C. $\lg 10.1$　　D. $10^{-10.1}$

10. (2016 四川卷理 5) 某公司为激励创新, 计划逐年加大研发资金投入. 若该公司 2015 年全年投入研发资金 130 万元, 在此基础上, 每年投入的研发资金比上一年增长 12%, 则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是 ( ).(参考数据: $\lg 1.12 \approx 0.05$, $\lg 1.3 \approx 0.11$, $\lg 2 \approx 0.30$)

A. 2018 年　　B. 2019 年

C. 2020 年　　D. 2021 年

11. (2015 四川卷文 8) 某食品的保鲜时间 y (单位: 小时) 与储藏温度 x (单位:℃) 满足函数关系 $y=\mathrm{e}^{kx+b}$ ($\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为自然对数的底数, k,b 为常数). 若该食品在 0℃ 的保鲜时间是 192 小时, 在 22 ℃ 的保鲜时间是 48 小时, 则该食品在 33℃ 的保鲜时间是 ( ).

A. 16 小时　　B. 20 小时

C. 24 小时　　D. 28 小时

12. (2014 湖北卷文 16) 某项研究表明: 在考虑行车安全的情况下, 某路段车流量 F(单位时间内经过测量点的车辆数, 单位: 辆/小时) 与车流速度 v(假设车辆以相同速度 v 行驶, 单位: 米/秒)、平均车长 l(单位: 米) 的值有关, 其公式为 $F=\dfrac{76000v}{v^2+18v+20l}$.

(1) 如果不限定车型, $l=6.05$, 则最大车流量为 ______ 辆/时;

(2) 如果限定车型, $l=5$, 则最大车流量比 (1) 中的最大车流量增加 ______ 辆/时.

第 3 章　导数及其应用

3.1 导数的概念及运算

3.1.1 知识逐点夯实

1. 导数的概念

(1) 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数: 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$ 为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数, 记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$, 即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$.

(2) 导数的几何意义: 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是在曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的______, 相应地, 切线方程为______.

(3) $f'(x)$ 是一个函数, $f'(x_0)$ 是函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的函数值 (常数), 即 $[f'(x_0)]'=$______.

2. 基本初等函数的导数公式

原函数	导函数
$f(x)=x^n$	$f'(x)=$______
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=$______
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=$______
$f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$	$f'(x)=$______
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$f'(x)=$______
$f(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$	$f'(x)=$______
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=$______

3. 导数的运算法则

(1) $[f(x)\pm g(x)]'=$______;

(2) $[f(x)\cdot g(x)]'=$______;

(3) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=$______.

4. 复合函数的导数

复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数和函数 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x=$______, 即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积.

5. 常用性质与结论

(1) 奇函数的导数是偶函数, 偶函数的导数是奇函数. 周期函数的导数还是周期函数.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 反映了函数 $f(x)$ 的瞬时变化趋势, 其正负号反映了变化的方向, 其大小 $|f'(x)|$ 反映了变化的快慢, $|f'(x)|$ 越大, 曲线在这点处的切线越"陡".

3.1.2 基础题

1. (2020 新课标全国 Ⅲ 卷文 15) 设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+a}$, 若 $f'(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{4}$, 则 $a=$______.

2. (人教 B 版选择性必修第三册 P87 习题 6-1CT2 改编) 已知函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$, 且 $f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x$, 则 $f'(2)=$______.

3. (人教 A 版选择性必修第二册 P81 习题 5.2T8 改编) 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x-3\ln x$, 则 $f'(x)>0$ 的解集为 ______.

4. (2013 江西卷理 13) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 且 $f(\mathrm{e}^x)=x+\mathrm{e}^x$, 则 $f'(1)=$ ______.

5. (2008 辽宁卷文 6) 设 P 为曲线 $C: y=x^2+2x+3$ 上的点, 且曲线 C 在点 P 处切线倾斜角的取值范围为 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, 则点 P 横坐标的取值范围为 (　　).

A. $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $[-1,0]$

C. $[0,1]$　　D. $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

6. (人教 A 版选择性必修第二册 P81 习题 5.2T7 改编) 设函数 $f(x)=1-\mathrm{e}^x$ 的图像与 x 轴相交于点 P, 则在点 P 处的切线方程为 ______.

7. (2018 新课标全国 Ⅱ 卷理 13) 曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 ______.

8. (2020 新课标全国 Ⅰ 卷文 15) 曲线 $y=\ln x+x+1$ 的一条切线的斜率为 2, 则该切线的方程为 ______.

9. (2016 新课标全国 Ⅲ 卷理 15) 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x<0$ 时, $f(x)=\ln(-x)+3x$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线方程是 ______.

10. (人教 A 版选择性必修第二册 P70 练习 T2 改编) 函数 $f(x)$ 的图像如图 3-1 所示, 下列数值顺序正确的是 (　　).

A. $f'(1)>f'(2)>f'(3)>0$

B. $f'(1)<f'(2)<f'(3)<0$

C. $0<f'(1)<f'(2)<f'(3)$

D. $f'(1)>f'(2)>0>f'(3)$

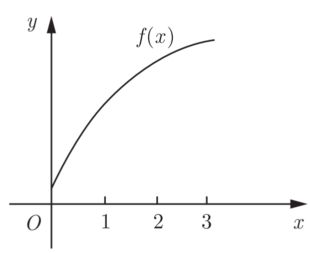


图 3-1

11. (2019 新课标全国 Ⅲ 卷理 6) 已知曲线 $y = a\mathrm{e}^x + x\ln x$ 在点 $(1, a\mathrm{e})$ 处的切线方程为 $y = 2x + b$, 则 (　　).

A. $a = \mathrm{e}, b = -1$

B. $a = \mathrm{e}, b = 1$

C. $a = \mathrm{e}^{-1}, b = 1$

D. $a = \mathrm{e}^{-1}, b = -1$

12. (2015 新课标全国 Ⅱ 卷文 16) 已知曲线 $y = x + \ln x$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与曲线 $y = ax^2 + (a+2)x + 1$ 相切, 则 $a =$ ______.

3.1.3 中档题

1. (2014 江西卷文 11) 若曲线 $y = x\ln x$ 上点 P 处的切线平行于直线 $2x - y + 1 = 0$, 则点 P 的坐标是 ______.

2. (人教 A 版选择性必修第二册 P82 习题 5.2T11 改编) 设曲线 $y = \mathrm{e}^{2ax}$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线与直线 $2x - y + 1 = 0$ 垂直, 则 $a =$ ______.

3. (2009 全国 I 卷理 9) 直线 $y = x+1$ 与曲线 $y = \ln(x + a)$ 相切, 则 a 的值为 (　　).

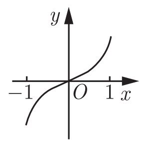
A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

4. (人教 B 版选择性必修第三册 P108 复习题 B 组 T8 改编) 已知 x 轴为函数 $f(x) = x^3 + ax + \dfrac{1}{4}$ 的图像的一条切线, 则 $a =$ ____.

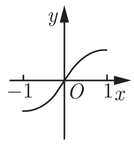
5. (2009 福建卷理 14) 若曲线 $f(x) = ax^3 + \ln x$ 存在垂直于 y 轴的切线, 则实数 a 的取值范围是 ______.

6. (人教 A 版选择性必修第二册 P103 复习参考题 5T1 改编) 已知点 P 和点 Q 是曲线 $y = x^2 - 2x - 3$ 上的两点, 且点 P 的横坐标为 1, 点 Q 的横坐标为 4, 则割线 PQ 的斜率为 ______; 点 P 处的切线方程为 ______.

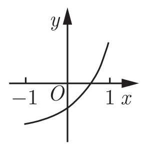
7. (2013 浙江卷文 8) 已知函数 $y = f(x)$ 的图像是下列四个图像之一, 且其导函数 $y = f'(x)$ 的图像如图 3-2 所示, 则该函数的图像是 ( ).



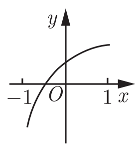
A.



B.



C.



D.

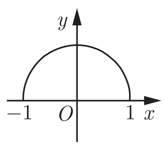


图 3-2

8. (2010 辽宁卷文 10) 已知点 P 在曲线 $y = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$ 上, α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角, 则 α 的取值范围是 ( ).

A. $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ B. $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

C. $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ D. $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right)$

9. (人教 B 版选择性必修第三册 P87 习题 6-1BT8 改编) 已知函数 $f(x) = 4x^2$, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 l, 直线 m 平行于直线 l 且过点 $(0, -6)$, 则直线 m 的方程为 ______; 曲线 $y = f(x)$ 上的点到直线 m 的最短距离为 ______.

10. (2009 陕西卷理 16) 设曲线 $y = x^{n+1}(n \in \mathbf{N}^*)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点的横坐标为 x_n, 令 $a_n = \lg x_n$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{99}$ 的值为 ______.

11. (2011 湖北卷理 10) 放射性元素由于不断有原子放射出微粒子而变成其他元素, 其含量不断减少, 这种现象称为衰变. 假设在放射性同位素铯 137 的衰变过程中, 其含量 M (单位: 太贝克) 与时间 t (单位: 年) 满足函数关系:$M(t) = M_0^{2-\frac{t}{30}}$, 其中 M_0 为 $t = 0$ 时铯 137 的含量. 已知 $t = 30$ 时, 铯 137 含量的变化率是 $-10\ln 2$ (太贝克/年), 则 $M(60) =$( ).

A. 5 太贝克

B. $75\ln 2$ 太贝克

C. $150\ln 2$ 太贝克

D. 150 太贝克

12. (2020 新课标全国 Ⅲ 卷理 10) 若直线 l 与曲线 $y = \sqrt{x}$ 和 $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{5}$ 都相切, 则 l 的方程为 ( ).

A. $y = 2x + 1$ B. $y = 2x + \dfrac{1}{2}$

C. $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ D. $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

3.2 导数与函数的单调性

3.2.1 知识逐点夯实

1. 函数的单调性与导数的关系

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导

(1) 若______, 则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调递增函数;

(2) 若______, 则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调递减函数;

(3) 若恒有______, 则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是常函数.

2. 常用性质与结论

(1) 在某区间内 $f'(x)>0(f'(x)<0)$ 是函数 $f(x)$ 在此区间上为增 (减) 函数的充分不必要条件.

(2) 可导函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是增 (减) 函数的充要条件是对 $\forall x\in(a,b)$, 都有 $f'(x)\geqslant 0(f'(x)\leqslant 0)$ 且 $f'(x)$ 在 (a,b) 上的任何子区间内都不恒为零.

3.2.2 基础题

1. (2012 辽宁卷文 8) 函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调递减区间为 (　　).

A. $(-1,1]$　　B. $(0,1]$

C. $[1,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

2. (2005 广东卷文 6) 函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 是减函数的区间为 (　　).

A. $(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,2)$

C. $(-\infty,0)$　　D. $(0,2)$

3. (2009 广东卷文 8) 函数 $f(x)=(x-3)\mathrm{e}^x$ 的单调递增区间是 (　　).

A. $(-\infty,2)$　　B. $(0,3)$

C. $(1,4)$　　D. $(2,+\infty)$

4. (人教 B 版选择性必修第三册 P91 练习 AT1 改编) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$, 且 $y=f'(x)$ 的图像如图 3-3所示, 则 $f(x)$ 的单调增区间为 ______.

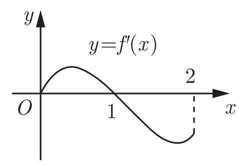


图 3-3

5. (人教 B 版选择性必修第三册 P91 练习 AT2 改编) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f'(x)=2x-1$, 则 $f(x)$ 的单调减区间为 ______.

6. (2007 新课标全国 Ⅱ 卷理 20(I)) 已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$ 的导函数, 则 $f'(x)$ 的最小值为 ______.

7. (2015 陕西卷文 9) 设 $f(x)=x-\sin x$, 则 $f(x)$(　　).

A. 既是奇函数又是减函数

B. 既是奇函数又是增函数

C. 是有零点的减函数

D. 是没有零点的奇函数

8. (2010 山东卷文 8) 已知某生产厂家的年利润 y(单位: 万元) 与年产量 x(单位: 万件) 的函数关系式为 $y=-\dfrac{1}{3}x^3+81x-234$, 则使该生产厂家获取最大年利润的年产量为 (　　).

A. 13 万件　　B. 11 万件

C. 9 万件　　D. 7 万件

9. (2014 新课标全国 Ⅱ 卷文 11) 若函数 $f(x)=kx-\ln x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 则 k 的取值范围是 (　　).

A. $(-\infty,-2]$　　B. $(-\infty,-1]$

C. $[2,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

10. (2008 福建卷文 11) 如果函数 $y=f(x)$ 的图像如图 3 -4 所示, 那么导函数 $y=f'(x)$ 的图像可能是 (　　).

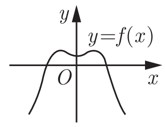
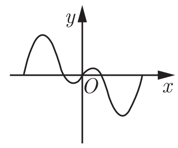
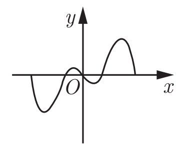


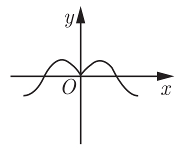
图 3-4



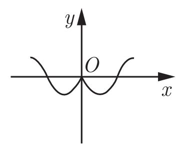
A.



B.

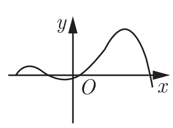


C.

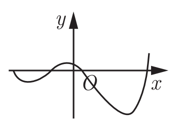


D.

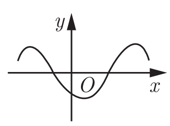
11. (2017 浙江卷 7) 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图像如图 3-5 所示, 则函数 $y=f(x)$ 的图像可能是 (　　).



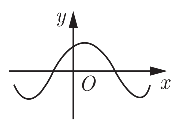
A.



B.



C.



D.

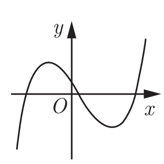


图 3-5

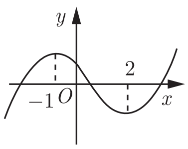
12. (人教 A 版选择性必修第二册 P86 例 2 改编) 函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 有下列信息:

①$f'(x)>0$ 时, $-1<x<2$;

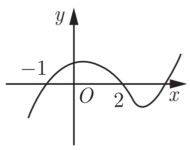
②$f'(x)<0$ 时, $x<-1$ 或 $x>2$;

③$f'(x)=0$ 时, $x=-1$ 或 $x=2$.

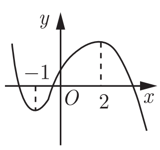
则函数 $f(x)$ 的大致图像是 (　　).



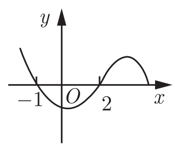
A.



B.



C.



D.

3.2.3　中档题

1. (人教 B 版选择性必修第三册 P108 复习题 B 组 T7 改编) 已知 $f(x)=e^x-ax$, 若 $x\in[0,+\infty)$, 不等式 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ______.

2. (2013 大纲卷理 9) 若函数 $f(x)=x^2+ax+\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 是增函数, 则 a 的取值范围是 (　　).

A. $[-1,0]$　　B. $[-1,+\infty)$

C. $[0,3]$　　D. $[3,+\infty)$

3. (2017 江苏卷 11) 已知函数 $f(x)=x^3-2x+e^x-\dfrac{1}{e^x}$, 其中 e 是自然对数的底数. 若 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$, 则实数 a 的取值范围是 ______.

4. (2011 辽宁卷理 11) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-1)=2$, 对任意 $x\in\mathbf{R}$, $f'(x)>2$, 则 $f(x)>2x+4$ 的解集为 (　　).

A. $(-1,1)$　　B. $(-1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

5. (2017 山东卷文 10) 若函数 $e^xf(x)$ 在 $f(x)$ 的定义域上单调递增, 则称函数 $f(x)$ 具有 M 性质, 下列函数中具有 M 性质的是 (　　).

A. $f(x)=2^{-x}$　　B. $f(x)=x^2$

C. $f(x)=3^{-x}$　　D. $f(x)=\cos x$

6. (2016 山东卷理 10) 若函数 $y=f(x)$ 的图像上存在两点, 使得函数的图像在这两点处的切线互相垂直, 则称 $y=f(x)$ 具有 T 性质, 下列函数中具有 T 性质的是 (　　).

A. $y=\sin x$　　B. $y=\ln x$

C. $y=e^x$　　D. $y=x^3$

7. (2015 安徽卷文 10) 函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图像如图 3-6所示, 则下列结论成立的是 ( ).

A. $a>0,b<0,c>0,d>0$

B. $a>0,b<0,c<0,d>0$

C. $a<0,b<0,c>0,d>0$

D. $a>0,b>0,c>0,d<0$

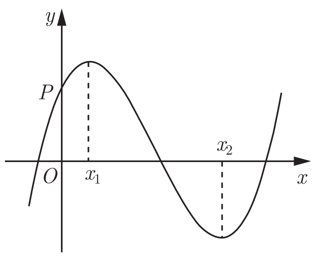


图 3-6

8. (2007 福建卷文 11) 已知对任意实数 x 有 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$, 且 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, $g'(x)>0$, 则 $x<0$ 时 ( ).

A. $f'(x)>0,g'(x)>0$

B. $f'(x)>0,g'(x)<0$

C. $f'(x)<0,g'(x)>0$

D. $f'(x)<0,g'(x)<0$

9. (人教 B 版选择性必修第三册 P109 复习题 C 组 T2 改编-多选题) 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 且满足 $f(x)-xf'(x)>0$, 则 ( ).

A. $3f(1)<f(3)$　B. $3f(1)>f(3)$

C. $3f(2)<2f(3)$　D. $3f(2)>2f(3)$

10. (2018 新课标全国 I 卷理 21(I)) 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

11. (2017 新课标全国 I 卷理 21(I)) 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^{x}-x$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

12. (2020 新课标全国 Ⅱ 卷文 21) 已知函数 $f(x)=2\ln x+1$.

(I) 若 $f(x)\leqslant 2x+c$, 求 c 的取值范围;

(Ⅱ) 设 $a>0$ 时, 讨论函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的单调性.

3.3 导数与函数的极值、最值

3.3.1 知识逐点夯实

1. 函数的极值

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处满足 $f'(x)=0$, 且

(1) 若在 x_0 的左侧______, 右侧______, 则 $f(x_0)$ 是极大值, x_0 是 $f(x)$ 的极大值点;

(2) 若在 x_0 的左侧______, 右侧______, 则 $f(x_0)$ 是极小值, x_0 是 $f(x)$ 的极小值点;

(3) 若 $f'(x)$ 在 x_0 两侧不变号, 则 $f(x_0)$ 不是极值, x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

2. 函数的最值

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值与最小值.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 则 $f(a)$ 为函数的______, $f(b)$ 为函数的______; 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, 则 $f(a)$ 为函数的______, $f(b)$ 为函数的______.

(3) 求可导函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值的步骤:

第一步: 先确定 $f(x)$ 在 (a,b) 上的所有可能的极值点, 即先求 $f'(x)=0$ 的所有变号零点, 不妨设为 $x_1, \cdots, x_n$;

第二步: 则 $f(x)_{\max}=\max\{f(a), f(x_1), \cdots, f(x_n), f(b)\}$; $f(x)_{\min}=\min\{f(a), f(x_1), \cdots, f(x_n), f(b)\}$.

3. 常用性质与结论

(1) 对于可导函数 $f(x)$, $f'(x_0)=0$ 是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极值的必要不充分条件.

(2) 若函数 $f(x)$ 的图像连续不断, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有最值.

(3) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数, 则 $f(x)$ 一定在区间端点处取得最值.

(4) 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内只有一个极值点, 则相应的极值点一定是函数的最值点.

3.3.2 基础题

1. (人教 B 版选择性必修第三册 P97 习题 6-2BT1 改编) 可导函数在闭区间内的最大值必然在 (　　) 取得.

A. 极值点

B. 导数为 0 的点

C. 极值点或区间端点

D. 区间端点

2. (2014 新课标全国 Ⅱ 卷文 3) 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数存在. 若 $p: f'(x_0)=0$; $q: x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 则 (　　).

A. p 是 q 的充分必要条件

B. p 是 q 的充分条件, 但不是 q 的必要条件

C. p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件

D. p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件

3. (2006 天津卷理 9) 函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a,b), 导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图像如图 3-7 所示, 则 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有极小值点 (　　).

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

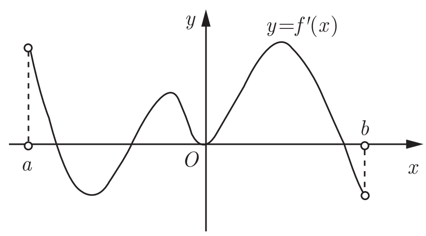


图 3-7

4. (2016 四川卷文 6) 已知 a 是函数 $f(x)=x^3-12x$ 的极小值点, 则 $a=$(　　).

A. -4　B. -2　C. 4　D. 2

5. (2012 陕西卷理 7) 设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$, 则 (　　).

A. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点

B. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

C. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点

D. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

6. (人教 B 版选择性必修第三册 P95 例 3 改编) 函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$ 在 $[-2,0]$ 上的最大值为 ______.

7. (2006 浙江卷文 6) $f(x)=x^3-3x^2+2$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 (　　).

A. -2　B. 0　C. 2　D. 4

8. (2004 江苏卷文 10) 函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 在闭区间 $[-3,0]$ 上的最大值、最小值分别是 (　　).

A. $1,-1$　B. $1,-17$

C. $3,-17$　D. $9,-19$

9. (2013 福建卷理 8) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $x_0(x_0\neq 0)$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 以下结论一定正确的是 (　　).

A. $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)\leqslant f(x_0)$

B. $-x_0$ 是 $f(-x)$ 的极小值点

C. $-x_0$ 是 $-f(x)$ 的极小值点

D. $-x_0$ 是 $-f(-x)$ 的极小值点

10. (2010 全国 I 卷理 20(I)) 已知 $f(x)=(x+1)\ln x-x+1$. 若 $xf'(x)\leqslant x^2+ax+1$, 则 a 的取值范围为 ______.

11. (2009 全国 Ⅱ 卷理 22(I)) 函数 $f(x)=x^2+a\ln(1+x)$ 有两个极值点 x_1,x_2, 则实数 a 的取值范围是 ______.

12. (2014 重庆卷文 19) 已知函数 $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{a}{x}-\ln x-\frac{3}{2}$, 其中 $a\in\mathbf{R}$, 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于直线 $y=\frac{1}{2}x$.

(I) 求 a 的值;

(Ⅱ) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

3.3.3 中档题

1. (2012 大纲卷理 10) 已知函数 $y=x^3-3x+c$ 的图像与 x 轴恰有两个公共点, 则 $c=$(　　).

A. -2 或 2　　B. -9 或 3

C. -1 或 1　　D. -3 或 1

2. (人教 B 版选择性必修第三册 P96 练习 BT6 改编) 已知函数 $f(x)=x^2-3x+a\ln x$ 有极值, 则实数 a 的取值范围是 ______.

3. (2008 广东卷文 9) 设 $a\in\mathbf{R}$, 若函数 $y=\mathrm{e}^x+ax$, $x\in\mathbf{R}$ 有大于零的极值点, 则 (　　).

A. $a<-1$　　B. $a>-1$

C. $a>-\frac{1}{\mathrm{e}}$　　D. $a<-\frac{1}{\mathrm{e}}$

4. (2011 湖南卷理 8) 设直线 $x=t$ 与函数 $f(x)=x^2$, $g(x)=\ln x$ 的图像分别交于点 M,N, 则当 $|MN|$ 达到最小时 t 的值为 (　　).

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. (2018 江苏卷 11) 若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点, 则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值之和为 ______.

6. (人教 A 版选择性必修第二册 P104 复习参考题 5T9 改编) 已知函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=2$ 处有极大值, 则 c 的值为 ______.

7. (2021 新高考全国 I 卷理 7) 若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线, 则 (　　).

A. $\mathrm{e}^b<a$　　B. $\mathrm{e}^a<b$

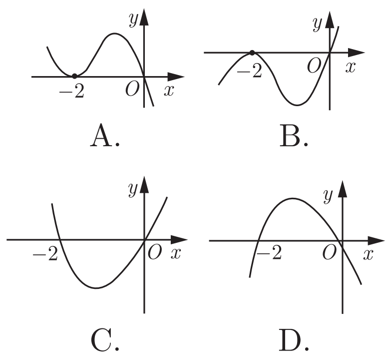
C. $0<a<\mathrm{e}^b$　　D. $0<b<\mathrm{e}^a$

8. (2021 新课标全国乙卷理 10) 设 $a \neq 0$, 若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则 (　　).

A. $a < b$　　　　B. $a > b$

C. $ab < a^2$　　　　D. $ab > a^2$

9. (2012 重庆卷文 8) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 其导函数为 $f'(x)$, 且函数在 $x = -2$ 处取得极小值, 则函数 $y = xf'(x)$ 的图可能是 (　　).



10. (2014 大纲卷理 16) 若函数 $f(x) = \cos 2x + a\sin x$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 是减函数, 则 a 的取值范围是 ______.

11. (2011 辽宁卷文 16) 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x + a$ 有零点, 则 a 的取值范围是 ______.

12. (2021 北京卷 19) 已知函数 $f(x) = \dfrac{3-2x}{x^2+a}$.

(Ⅰ) 若 $a = 0$, 求 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(Ⅱ) 若函数 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极值, 求 $f(x)$ 的单调区间, 以及最大值和最小值.

3.4　专题突破　导数应用问题

3.4.1　基础题

1. (2016 新课标全国 Ⅲ 卷文 21(Ⅱ)) 证明: 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $1 < \dfrac{x-1}{\ln x} < x$.

2. (2016 新课标全国 Ⅱ 卷理 21(Ⅰ)) 讨论 $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x$ 的单调性, 并证明当 $x > 0$ 时, $(x-2)\mathrm{e}^x + x + 2 > 0$.

3. (2015 重庆卷理 19) 设函数 $f(x) = \dfrac{3x^2+ax}{\mathrm{e}^x}(a \in \mathbf{R})$.

(Ⅰ) 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极值, 确定 a 的值, 并求出此时曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上为减函数, 求 a 的取值范围.

4. (2010 安徽卷理 17) 设 a 为实数, 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-2x+2a$, $x\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$ 的单调区间与极值;

(Ⅱ) 求证: 当 $a>\ln 2-1$ 且 $x>0$ 时, $\mathrm{e}^x>x^2-2ax+1$.

5. (2019 全国 Ⅰ 卷文 20(Ⅰ)) 已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 证明: $f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点.

6. (2019 新课标全国 Ⅱ 卷文 21(Ⅰ)) 已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$, 证明:$f(x)$ 存在唯一的极值点.

7. (2015 广东卷理 19) 设 $a>1$, 函数 $f(x)=(1+x^2)\mathrm{e}^x-a$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(Ⅱ) 证明:$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上仅有一个零点.

8. (2012 重庆卷文 17) 已知函数 $f(x)=ax^3+bx+c$ 在点 $x=2$ 处取得极值 $c-16$.

(Ⅰ) 求 a,b 的值;

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 有极大值 28, 求 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最小值.

3.4.2 中档题

1. (2017 新课标全国 Ⅲ 卷理 21(Ⅰ)) 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$, 若 $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的值.

2. (2018 新课标全国 Ⅲ 卷理改编) 已知 $f(x)=\dfrac{ax^2+x-1}{\mathrm{e}^x}$, 证明: 当 $a\geqslant 1$ 时, $f(x)+\mathrm{e}\geqslant 0$.

3. (2015 新课标全国Ⅱ卷文 21) 已知 $f(x)=\ln x+a(1-x)$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ) 当 $f(x)$ 有最大值, 且最大值大于 $2a-2$ 时, 求 a 的取值范围.

4. (2010 新课标全国卷文 21) 设函数 $f(x)=x(\mathrm{e}^x-1)-ax^2$.

(Ⅰ) 若 $a=\dfrac{1}{2}$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(Ⅱ) 若当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的取值范围.

5. (2021 新课标全国甲卷文 20) 设函数 $f(x)=a^2x^2+ax-3\ln x+1$, 其中 $a>0$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ) 若 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴没有公共点, 求 a 的取值范围.

6. (2021 新课标全国乙卷文 21) 已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ) 求曲线 $y=f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y=f(x)$ 的公共点的坐标.

7. (2020 新课标全国Ⅰ卷文 20) 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-a(x+2)$.

(Ⅰ) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

8. (2018 北京卷文 19) 设函数 $f(x)=[ax^2-(3a+1)x+3a+2]\mathrm{e}^x$.

(Ⅰ) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线斜率为 0, 求 a;

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 求 a 的取值范围.

第 4 章　三角函数、解三角形

4.1 任意角和弧度制及任意角的三角函数

4.1.1 知识逐点夯实

1. 角的概念

(1) 定义: 角可以看成平面内一条射线绕着它的端点旋转所成的图形.

(2) 分类 $\begin{cases} \text{按旋转方向不同分为\_\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_\_.} \\ \text{按终边位置不同分为\_\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_\_.} \end{cases}$

(3) 相反角: 我们把射线 OA 绕端点 O 按不同方向旋转相同的量所成的两个角叫作互为相反角. 角 α 的相反角为______.

(4) 终边相同的角: 所有与角 α 终边相同的角, 连同角 α 在内, 可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$.

2. 弧度制的定义和公式

(1) 定义: 把长度等于______的圆弧所对的圆心角叫作 1 弧度的角, 弧度单位用符号 rad 表示.

(2) 公式:

角 α 的弧度公式	$\lvert\alpha\rvert=\dfrac{l}{r}$($l$ 表示弧长)
角度与弧度的换算	①$1°=\dfrac{\pi}{180}$rad;　②$1\text{rad}=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$
弧长公式	$l=$______
扇形面积公式	$S=\dfrac{1}{2}lr=$______

3. 任意角的三角函数

设 α 是一个任意角, $\alpha\in\mathbf{R}$, 它的终边 OP 与单位圆相交于点 $P(x,y)$, 则 $\sin\alpha=$______, $\cos\alpha=$______, $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$.

4. 常用性质与结论

(1) 三角函数值在各象限的符号: 一全正、二正弦、三正切、四余弦.

(2) 设点 $P(x,y)$ 是角 α 终边上任意一点且不与原点重合, $r=|OP|$, 则 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$, $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$, $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$.

4.1.2 基础题

1. (人教 A 版必修第一册 P175 练习 T6 改编) 已知半径为 120mm 的圆上, 有一条弧的长为 144mm, 则该弧所对的圆心角正角 $\alpha=$______.

2. (2020 新课标全国 Ⅱ 卷理 2) 若 α 为第四象限, 则 (　　).

A. $\cos 2\alpha > 0$　　B. $\cos 2\alpha < 0$

C. $\sin 2\alpha < 0$　　D. $\sin 2\alpha > 0$

3. (人教 A 版必修第一册 P175 习题 5.1T1 改编) 在与 45° 终边相同的角 β 的集合中, 满足不等式 $-360^\circ \leqslant \beta \leqslant 0^\circ$ 的角 β 为______.

4. (2016 四川卷文 11) $\sin 750^\circ =$ ______.

5. (人教 A 版必修第一册 P176 习题 5.1T7(2) 改编) 已知 α 是第一象限角, 那么 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是 (　　).

A. 第一象限角

B. 第二象限角

C. 第一象限角或第二象限角

D. 第一象限角或第三象限角

6. (人教 B 版必修第三册 P18 练习 AT5 改编) 已知 α 为第三象限角, 点 $M(\tan\alpha, \cos\alpha)$ 在 (　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

7. (人教 B 版必修第三册 P67 复习题 A 组 T2 改编) 函数 $y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|} + \dfrac{\cos x}{|\cos x|} + \dfrac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域为______.

8. (2014 大纲卷文 2) 已知角 α 的终边经过点 $(-4,3)$, 则 $\cos\alpha =$(　　).

A. $\dfrac{4}{5}$　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $-\dfrac{3}{5}$　　D. $-\dfrac{4}{5}$

9. (2007 北京卷文 2) 已知 $\cos\alpha \cdot \tan\alpha < 0$, 那么角 α 是 (　　).

A. 第一象限角或第二象限角

B. 第二象限角或第三象限角

C. 第三象限角或第四象限角

D. 第一象限角或第四象限角

10. (2011 江西卷文 14) 已知角 θ 的顶点为坐标原点, 始边为 x 轴的正半轴, 若 $P(4, y)$ 是角 θ 终边上的点, 且 $\sin\theta = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $y =$ ______.

11. (2011 新课标全国卷理 5 改编) 已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边在直线 $y = 2x$, 则 $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ 的值为 (　　).

A. $-\dfrac{4}{5}$　　B. $-\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

12. (2017 浙江卷 11) 我国古代数学家刘徽创立的“割圆术”可以估算圆周率 π, 理论上能把 π 的值计算到任意精度. 祖冲之继承并发展了“割圆术”, 将 π 的值精确到小数点后七位, 其结果领先世界一千多年,“割圆术”的第一步是计算单位圆内接正六边形的面积 S_6, 则 $S_6 =$ ______.

4.1.3　中档题

1. (人教 B 版必修第三册 P7 练习 BT2 改编) 终边在直线 $y = x$ 上的角 α 的取值集合是 (　　).

A. $\{\alpha|\alpha = n\cdot 360^\circ + 135^\circ, n \in \mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha = n\cdot 360^\circ - 45^\circ, n \in \mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha = n\cdot 180^\circ + 45^\circ, n \in \mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha = n\cdot 180^\circ - 45^\circ, n \in \mathbf{Z}\}$

2. (人教 B 版必修第三册 P68 复习题 B 组 T1 改编) 一个扇形的弧长和面积的数值都是 5, 则这个扇形圆心角为 ______ 弧度.

3. (人教 B 版必修第三册 P18 练习 BT4 改编) 已知 $P(x, -1)$ 在角 α 的终边上, 且 $\cos\alpha = \dfrac{x}{2}$, 则 $\sin\alpha =$ ______.

4. (人教 B 版必修第三册 P66 复习题 A 组 T1 改编) 若角 α 的终边落在直线 $y = -3x$ 上, 则 $\cos\alpha =$ ______.

5. (人教 B 版必修第三册 P12 练习 BT6 改编) 若扇形的周长为 16, 则该扇形的面积的最大值为 ______.

6. (人教 A 版必修第一册 P176 习题 5.1T10 改编) 一扇形的圆心角为 60°, 则此扇形的面积与其内切圆的面积之比为 ______.

7. (人教 A 版必修第一册 P184 习题 5.2T2 改编-多选题) 已知角 α 的终边上有一点 P 的坐标是 $\left(\sin\dfrac{3\pi}{4}, \cos\dfrac{3\pi}{4}\right)$, 则 α 的可能值为 (　　).

A. $\dfrac{3\pi}{4}$　B. $\dfrac{7\pi}{4}$　C. $\dfrac{11\pi}{4}$　D. $\dfrac{15\pi}{4}$

8. (2014 新课标全国 I 卷理 6) 如图 4-1 所示, 圆 O 的半径为 1, A 是圆上的定点, P 是圆上的动点, 角 x 的始边为射线 OA, 终边为射线 OP, 过点 P 作直线 OA 的垂线, 垂足为 M, 将点 M 到直线 OP 的距离表示成 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 的图像大致为 (　　).

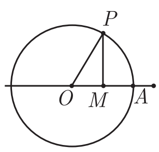
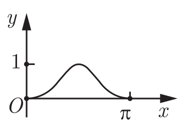
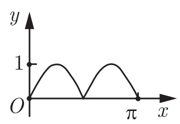


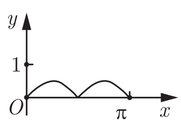
图 4-1



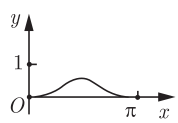
A.



B.



C.



D.

9. (2007 江苏卷理 16) 某时钟的秒针端点 A 到中心点 O 的距离为 5cm, 秒针均匀地绕点 O 旋转, 当时间 $t=0$ 时, 点 A 与钟面上标 12 的点 B 重合. 将 A,B 两点的距离 d(单位：cm) 表示成 t(单位：s) 的函数, 则 $d=$ ______, 其中 $t\in[0,60]$.

10. (2019 北京卷文 8) 如图 4-2 所示, A,B 是半径为 2 的圆周上的定点, P 为圆周上的动点, $\angle APB$ 是锐角, 大小为 β. 图中阴影区域的面积的最大值为 (　　).

A. $4\beta+4\cos\beta$　　B. $4\beta+4\sin\beta$

C. $2\beta+2\cos\beta$　　D. $2\beta+2\sin\beta$

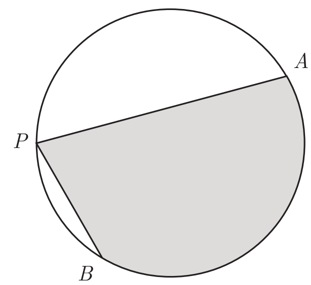


图 4-2

4.2 同角三角函数基本关系式与诱导公式

4.2.1 知识逐点夯实

1. 同角三角函数的基本关系

(1) 平方关系:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=$ ______;

(2) 商数关系:$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

2. 三角函数的诱导公式

公式	一	二	三	四	五	六
角	$2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$	$\pi+\alpha$	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$
正弦	$\sin\alpha$	______	______	______	______	______
余弦	$\cos\alpha$	______	______	______	$\sin\alpha$	______
正切	$\tan\alpha$	______	______	______		
口诀	奇变偶不变, 符号看象限					

3. 常用性质与结论

(1) “1” 的变换.

① $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=\tan\frac{\pi}{4}$.

② $\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}$;$\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1}{\tan^2\alpha+1}$.

(2) 和积转换: $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm 2\sin\alpha\cos\alpha$.

4.2.2 基础题

1. (2013 广东卷文 4) 已知 $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{5}$, 那么 $\cos\alpha=$(　　).

A. $-\frac{2}{5}$　B. $-\frac{1}{5}$　C. $\frac{1}{5}$　D. $\frac{2}{5}$

2. (人教 A 版必修第一册 P195 习题 5.3T6 改编) 已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$, 则 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$______.

3. (2009 新课标全国 I 卷文 1) $\sin 585^\circ=$(　　).

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. (人教 A 版必修第一册 P195 习题 5.3T7 改编-多选题) 在 $\triangle ABC$ 中, 下列关系成立的是 (　　).

A. $\cos(A+B)=\cos C$

B. $\sin(A+B)=\sin C$

C. $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$

D. $\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$

5. (2010 全国 Ⅱ 卷文 13) 已知 α 是第二象限的角,$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$, 则 $\cos\alpha=$______.

6. (2017 北京卷文 9) 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称. 若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, 则 $\sin\beta=$______.

7. (2009 陕西卷文 2) 若 $\tan\alpha=2$, 则 $\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}$ 的值为 (　　).

A. 0　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. 1　　D. $\dfrac{5}{4}$

8. (2009 全国 Ⅱ 卷理 3) 已知 $\triangle ABC$ 中, $\tan A=-\dfrac{5}{12}$, 则 $\cos A=$(　　).

A. $\dfrac{12}{13}$　　B. $\dfrac{5}{13}$

C. $-\dfrac{5}{13}$　　D. $-\dfrac{12}{13}$

9. (人教 A 版第一册 P185 习题 5.2T12 改编) 已知 $\tan\alpha=\sqrt{3}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, 则 $\cos\alpha-\sin\alpha=$ ______.

10. (2009 辽宁卷文 8) 若 $\tan\theta=2$, 则 $\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta=$(　　).

A. $-\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{5}{4}$　　C. $-\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

11. (人教 B 版必修第三册 P35 习题 7-2BT3 改编) 已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{8}$, 且 $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\cos\alpha-\sin\alpha=$ ______.

12. (2017 新课标全国 Ⅱ 卷理 14) 函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}\left(x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是 ______.

4.2.3 中档题

1. (2017 新课标全国 Ⅲ 卷文 6) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{5}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为 (　　).

A. $\dfrac{6}{5}$　　B. 1　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

2. (人教 A 版必修第一册 P183 例 7 改编) 已知 $\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{1}{2}$, 则 $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$ 的值是 (　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. -2

3. (人教 B 版必修第三册 P23 例 3 改编) 已知 α 是三角形的内角, 且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$, 则 $\tan\alpha$ 的值为 (　　).

A. $-\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. $-\dfrac{4}{3}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

4. (人教 A 版必修第一册 P195 习题 5.3T8) 已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)=\dfrac{1}{3}$, 且 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)=$ ______.

5. (人教 A 版必修第一册 P255 复习参考题 5T14 改编) 已知 θ 是第三象限角, 且 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\frac{5}{9}$, 那么 $\sin\theta\cos\theta$ 等于 (　　).

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

6. (人教 B 版必修第三册 P35 习题 7-2BT2 改编) 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha\in(0,\pi)$, 则 $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=$(　　).

A. $-\sqrt{7}$　　B. $-\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{7}$

7. (2008 浙江卷理 8) 若 $\cos\alpha+2\sin\alpha=\sqrt{5}$, 则 $\tan\alpha=$ (　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -2

8. (2016 全国 I 卷文 14) 已知 θ 是第四象限角, 且 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$ ______.

9. (2004 广东卷文 9) 当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时, 函数 $f(x)=\frac{\cos^2 x}{\cos x\sin x-\sin^2 x}$ 的最小值是 (　　).

A. 1　　B. 4　　C. 6　　D. 8

10. (2018 新课标全国 I 卷文 11) 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边上有两点 $A(1,a)$, $B(2,b)$, 且 $\cos 2\alpha=\frac{2}{3}$, 则 $|a-b|=$(　　).

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. 1

11. (2012 重庆卷理 5 改编) 设 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 是方程 $4x^2+2mx+m=0$ 的两根, 则 m 的值为 (　　).

A. $1+\sqrt{5}$　　B. $1-\sqrt{5}$

C. $1\pm\sqrt{5}$　　D. $-1-\sqrt{5}$

12. (2009 湖南卷理 11) 若 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $2\tan x+\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 的最小值为 ______.

4.3 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

4.3.1 知识逐点夯实

1. 两角和与差的余弦、正弦、正切公式

(1) $\cos(\alpha-\beta)=$ ______;

(2) $\cos(\alpha+\beta)=$ ______;

(3) $\sin(\alpha-\beta)=$ ______;

(4) $\sin(\alpha+\beta)=$ ______;

(5) $\tan(\alpha+\beta)=$ ______;

(6) $\tan(\alpha-\beta)=$ ______.

2. 二倍角的余弦、正弦、正切公式

(1) $\sin 2\alpha=$ ______;

(2) $\cos 2\alpha=$ ______ $=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$;

(3) $\tan 2\alpha=$ ______.

3. 常用性质与结论

(1) 常用拆角、拼角

①$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$;$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta=(\alpha-\beta)+\beta$;

②$\beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;$\alpha-\beta=(\alpha-\theta)+(\theta-\beta)$.

(2) 和、差角公式变形

①$\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta$;$\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta$;

②$\tan\alpha\pm\tan\beta=\tan(\alpha\pm\beta)\cdot(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$.

4.3.2 基础题

1. (2015 新课标全国 I 卷理 2)

$\sin 20^\circ\cos 10^\circ-\cos 160^\circ\sin 10^\circ=($　　$)$.

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

2. (人教 A 版必修第一册 P219 例 4 改编) $\dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$ 的值为 ______.

3. (2020 新课标全国 Ⅱ 卷文 13) 若 $\sin x=-\dfrac{2}{3}$, 则 $\cos 2x=$ ______.

4. (2010 全国 Ⅱ 卷理 13) 已知 α 是第二象限角,$\tan(\pi+2\alpha)=-\dfrac{4}{3}$, 则 $\tan\alpha=$ ______.

5. (2020 浙江卷 13) 已知 $\tan\theta = 2$, 则 $\cos 2\theta =$ ______;$\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) =$ ______.

6. (2011 江苏卷 7) 已知 $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2$, 则 $\dfrac{\tan x}{\tan 2x}$ 的值为 ______.

7. (2015 江苏卷 8) 已知 $\tan\alpha = -2$, $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{1}{7}$, 则 $\tan\beta$ 的值为 ______.

8. (2004 全国 I 卷文 6) 设 $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 若 $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, 则 $\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) =$ (　　).

A. $\dfrac{7}{5}$　B. $\dfrac{1}{5}$　C. $-\dfrac{7}{5}$　D. $-\dfrac{1}{5}$

9. (2020 新课标全国 Ⅲ 卷理 9) 已知 $2\tan\theta - \tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 7$, 则 $\tan\theta =$(　　).

A. -2　B. -1　C. 1　D. 2

10. (2014 新课标全国 Ⅱ 卷文 14) 函数 $f(x) = \sin(x+\varphi) - 2\sin\varphi\cos x$ 的最大值为 ____.

11. (2021 全国乙卷文 6) $\cos^2\dfrac{\pi}{12} - \cos^2\dfrac{5\pi}{12} =$ (　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

12. (2011 辽宁卷理 7) 设 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right) = \dfrac{1}{3}$, 则 $\sin 2\theta =$(　　).

A. $-\dfrac{7}{9}$　B. $-\dfrac{1}{9}$　C. $\dfrac{1}{9}$　D. $\dfrac{7}{9}$

4.3.3　中档题

1. (2020 新课标全国 I 卷理 10) 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $3\cos 2\alpha - 8\cos\alpha = 5$, 则 $\sin\alpha =$ (　　).

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　B. $\dfrac{2}{3}$　C. $\dfrac{1}{3}$　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{9}$

2. (人教 A 版必修第一册 P228 习题 5.5T2 改编) 已知 α, β 都是锐角, $\cos\alpha = \dfrac{1}{7}$, $\cos(\alpha+\beta) = -\dfrac{11}{14}$, 则 $\cos\beta$ 的值为 ______.

3. (2019 新课标全国 Ⅱ 卷理 10) 已知 $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$, 则 $\sin\alpha =$ (　　).

A. $\dfrac{1}{5}$　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

4. (人教 A 版必修第一册 P229 习题 5.5T9 改编) 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$, $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$, 则 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ 的值为 ______.

5. (2004 全国 Ⅱ 卷文 11) 函数 $y=\sin^4 x+\cos^2 x$ 的最小周期为 (　　).

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

6. (2018 新课标全国 Ⅱ 卷理 15) 已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$, $\cos\alpha+\sin\beta=0$, 则 $\sin(\alpha+\beta)=$ ______.

7. (2005 全国 I 卷文 7) 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$ 的最小值为 (　　).

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$

C. 4　　D. $4\sqrt{3}$

8. (2010 新课标全国卷理 9) 若 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$, α 是第三象限的角, 则 $\dfrac{1+\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}}=$ (　　).

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. -2

9. (2021 新高考全国 I 卷 6) 若 $\tan\theta=-2$, 则 $\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$(　　).

A. $-\dfrac{6}{5}$　　B. $-\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{2}{5}$　　D. $\dfrac{6}{5}$

10. (2011 天津理卷 15 改编) 已知函数 $f(x)=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, 设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$, 若 $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=2\cos 2\alpha$, 则 α 的值为 ______.

11. (2010 天津卷理 17 改编) 已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, 若 $f(x_0)=\dfrac{6}{5}$, $x_0\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$, 则 $\cos 2x_0$ 的值为 ______.

12. (人教 A 版必修第一册 P229 习题 5.5T13 改编) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan A,\tan B$ 是关于 x 的方程 $x^2+px+p+1=0$ 的两个实根, 则 $C=$ ______.

4.4 简单的恒等变换

4.4.1 知识逐点夯实

1. 常用的部分三角公式

(1) 升幂公式:$1-\cos\alpha=$ ______, $1+\cos\alpha=$ ______.

(2) 降幂公式:$\sin^2\alpha=$ ______, $\cos^2\alpha=$ ______, $\tan^2\alpha=$ ______.

2. 辅助角公式

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, 其中 $\sin\varphi=$ ______, $\cos\varphi=$ ______.

3. 常用性质与结论

> (1) 三角函数式的化简原则
>
> ①一看角: 通过看角之间的差别与联系, 把角进行合理的拆分, 从而正确使用公式;
>
> ②二看函数名称: 看函数名称之间的差异, 从而确定使用公式, 常见有“切化弦”;
>
> ③三看结构特征: 分析结构特征, 找到变形方向, 常见的有遇到分式要通分, 整式因式分解, 二次式配方等.
>
> (2) 万能公式: $\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$.

4.4.2　基础题

1. (2018 新课标全国 Ⅲ 卷理 4) 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha=$(　　).

A. $\dfrac{8}{9}$　　B. $\dfrac{7}{9}$　　C. $-\dfrac{7}{9}$　　D. $-\dfrac{8}{9}$

2. (人教 B 版必修第三册 P98 练习 AT5 改编) 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, 则 $\sin 2\alpha=$ ______.

3. (2010 全国 I 卷理 14) 已知 α 为第三象限的角, $\cos 2\alpha=-\dfrac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)=$ ______.

4. (人教 B 版必修第三册 P109 复习题 B 组 T15 改编) $\tan 20^\circ+\tan 25^\circ+\tan 20^\circ\tan 25^\circ$ 的值为 ______.

5. (2008 海南卷理 7) $\dfrac{3-\sin 70^\circ}{2-\cos^2 10^\circ}=$(　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 2　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. (2021 新课标全国乙卷文 4) 函数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}+\cos\dfrac{x}{3}$ 的最小正周期和最大值分别是 (　　).

A. 3π 和 $\sqrt{2}$　　B. 3π 和 2

C. 6π 和 $\sqrt{2}$　　D. 6π 和 2

7. (2012 大纲卷理 14) 当函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x(0\leqslant x<2\pi)$ 取得最大值时,$x=$ ______.

8. (2020 新课标全国 Ⅲ 卷文 5) 已知 $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$, 则 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=$ ( ).

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. (2009 广东卷文 9) 函数 $y=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 是 ( ).

A. 最小正周期为 π 的奇函数

B. 最小正周期为 π 的偶函数

C. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数

D. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

10. (2020 江苏卷 8) 已知 $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2}{3}$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值是 ______.

11. (2009 江西卷理 4) 函数 $f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos x$, $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$, 则 $f(x)$ 的最大值为 ( ).

A. 1 B. 2

C. $\sqrt{3}+1$ D. $\sqrt{3}+2$

12. (2009 上海卷理 6) 函数 $y=2\cos^2 x+\sin 2x$ 的最小值是 ______.

4.4.3 中档题

1. (2004 全国 I 卷理 17 改编) 函数 $f(x)=\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x}{2-\sin 2x}$, 则 $f(x)$ 的最大值为 ______.

2. (人教 A 版必修第一册 P255 复习参考题 5T20 改编) 已知函数 $f(x)=\cos^4 x-2\sin x\cos x-\sin^4 x$, 则 $f(x)$ 的值域为 ______.

3. (人教 B 版必修第三册 P109 复习题 B 组 T11 改编) 设 α 为第四象限的角, 若 $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{13}{5}$, 则 $\tan 2\alpha=$ ______.

4. (1994 全国卷文 14) 如果函数 $y=\sin 2x+a\cos 2x$ 的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称, 那么 $a=$( ).

A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$

C. 1 D. -1

5. (人教 B 版必修第三册 P109 复习题 B 组 T12 改编) $\dfrac{\cos 10^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)}{\cos 50^\circ}=$ ____.

6. (2013 新课标全国 I 卷文 16) 设当 $x=\theta$ 时, 函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos\theta=$ ______.

7. (2014 新课标全国 I 卷理 8) 设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $\tan\alpha=\dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$, 则 (　　).

A. $3\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$　　B. $2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$

C. $3\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$　　D. $2\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

8. (2021 新课标全国甲卷理 9) 若 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\tan 2\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$, 则 $\tan\alpha=$ (　　).

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

9. (人教 B 版必修第三册 P108 复习题 B 组 T9 改编-多选题) 下列等式正确的是 (　　).

A. $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\tan\dfrac{\alpha}{2}$

B. $\sin 20^\circ+\sin 40^\circ-\sin 80^\circ=0$

C. $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\cos 2\alpha$

D. $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\dfrac{1}{4}$

10. (2008 四川卷理 17 改编) 求函数 $y=7-4\sin x\cos x+4\cos^2 x-4\cos^4 x$ 的最大值为 ______.

11. (2012 江苏卷 11) 设 α 为锐角, 若 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$, 则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的值为 ______.

12. (2015 重庆卷理 9) 若 $\tan\alpha=2\tan\dfrac{\pi}{5}$, 则 $\dfrac{\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{5}\right)}=$ (　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4.5 三角函数的图像与性质

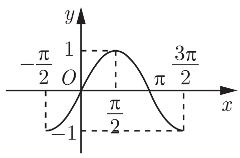
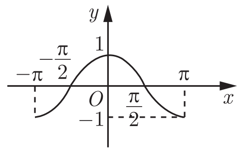
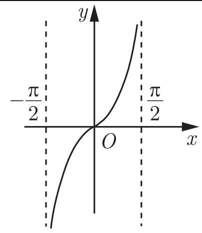
4.5.1 知识逐点夯实

1. 用五点法作正弦函数和余弦函数的简图

(1) 在正弦函数 $y=\sin x$, $x\in[0,2\pi]$ 的图像上, 五个关键点是 $(0,0)$, ______, $(\pi,0)$, ______, $(2\pi,0)$.

(2) 在余弦函数 $y=\cos x$, $x\in[0,2\pi]$ 的图像上, 五个关键点是 $(0,1)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$, ______, $\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$, ______.

2. 正弦、余弦、正切函数的图像与性质

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图像			
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\left\{x \middle\vert x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$
值域	______	______	$\mathbf{R}$
周期性	2π	______	π
______	______	偶函数	奇函数
递增区间	$\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$	______	$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$
递减区间	$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]$	______	无
对称中心	______	$\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2},0\right)$	______
对称轴	$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$	______	无

3. 常用性质与结论

(1) 对称与周期的关系

正弦曲线、余弦曲线相邻的两个对称中心、相邻的两条对称轴之间的距离是半个周期, 相邻的对称中心与对称轴之间的距离是四分之一个周期; 正切曲线相邻两个对称中心之间的距离是半个周期.

(2) 与三角函数的奇偶性相关的结论

①若 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 为偶函数, 则有 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$; 若为奇函数, 则有 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

②若 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 为偶函数, 则有 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$; 若为奇函数, 则有 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

③若 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 为奇函数, 则有 $\varphi=\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

4.5.2 基础题

1. (人教 B 版必修第三册 P42 练习 AT1 改编) 已知 $\sin x+2a+5=0$, $x\in\mathbf{R}$, 则 a 的取值范围为 ______.

2. (人教 A 版必修第一册 P213 习题 5.4T8 改编) 函数 $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的周期为 ______; 对称中心为 ______.

3. (人教 B 版必修第三册 P58 例 1 改编) 已知 $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$, $x\in[0,2\pi]$, 则 x 的取值集合为 ______.

4. (人教 A 版必修第一册 P214 习题 5.4T10 改编) 函数 $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的值域 ______.

5. (2021 新高考全国 I 卷 4) 下列区间中, 函数 $f(x)=7\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 单调递增的区间是 (　　).

A. $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$

C. $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{\pi}{2},2\pi\right)$

6. (2004 全国 Ⅱ 卷文 5) 已知函数 $y=\tan(2x+\varphi)$ 的图像过点 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$, 则 φ 可以是 (　　).

A. $-\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$

C. $-\dfrac{\pi}{12}$　　D. $\dfrac{\pi}{12}$

7. (2018 新课标全国 Ⅲ 卷文 6) 函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ 的最小正周期为 (　　).

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

8. (人教 A 版必修第一册 P201 例 2 改编) 已知函数 $y=\cos 2\omega x(\omega>0)$ 的周期为 4π, 则 $\omega=$ ______.

9. (2013 天津卷文 6) 函数 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 (　　).

A. -1　　B. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 0

10. (2018 江苏卷 7) 已知函数 $y=\sin(2x+\varphi)\left(-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称, 则 φ 的值是 ____.

11. (2019 新课标全国 Ⅱ 卷文 8) 若 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 两个相邻的极值点, 则 $\omega=$(　　).

A. 2　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

12. (2019 新课标全国 Ⅲ 卷文 5) 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在 $[0,2\pi]$ 的零点个数为 (　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4.5.3 中档题

1. (人教 A 版必修第一册 P200 练习 T4-多选题) 函数 $y=1+\cos x, x\in\left(\frac{\pi}{3},2\pi\right)$ 的图像与直线 $y=t$ 的交点可能有 (　　).

A. 3 个　B. 2 个　C. 1 个　D. 0 个

2. (人教 B 版必修第三册 P68 复习题 B 组 T5 改编-多选题) 下列区间中, 函数 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$ 的单调递减区间是 (　　).

A. $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$　B. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$

C. $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right)$　D. $\left(\frac{4\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right)$

3. (2021 北京卷 7) 已知函数 $f(x)=\cos x-\cos 2x$, 则该函数 (　　).

A. 奇函数, 最大值为 2

B. 偶函数, 最大值为 2

C. 奇函数, 最大值为 $\frac{9}{8}$

D. 偶函数, 最大值为 $\frac{9}{8}$

4. (2018 北京卷理 11) 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$, 若 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 对任意的实数 x 都成立, 则 ω 的最小值为 ______.

5. (2011 山东卷理 6) 若函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 则 $\omega=$ (　　).

A. $\frac{2}{3}$　B. $\frac{3}{2}$　C. 2　D. 3

6. (2009 全国 I 卷文 10) 如果函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的图像关于点 $\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$ 中心对称, 那么 $|\varphi|$ 的最小值为 (　　).

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{4}$　C. $\frac{\pi}{3}$　D. $\frac{\pi}{2}$

7. (2018 新课标全国 Ⅱ 卷文 10) 若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[0,a]$ 是减函数, 则 a 的最大值为 (　　).

A. $\frac{\pi}{4}$　B. $\frac{\pi}{2}$　C. $\frac{3\pi}{4}$　D. π

8. (2018 新课标全国 Ⅲ 卷理 15) 函数 $f(x)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 的零点个数为 ______.

9. (2010 江苏卷 10) 定义在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的函数 $y=6\cos x$ 的图像与 $y=5\tan x$ 的图像的交点为 P, 过点 P 作 $PP_1\perp x$ 轴于点 P_1, 直线 PP_1 与 $y=\sin x$ 的图像交于点 P_2, 则线段 P_1P_2 的长为 ______.

10. (2019 新课标全国 Ⅱ 卷理 9) 下列函数中, 以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期且在区间 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增的是 ( ).

A. $f(x)=|\cos 2x|$

B. $f(x)=|\sin 2x|$

C. $f(x)=\cos|x|$

D. $f(x)=\sin|x|$

11. (2012 新课标全国卷理 9) 已知 $\omega>0$, 函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围 ( ).

A. $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$

C. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ D. $(0,2]$

12. (2020 新课标全国 Ⅲ 卷文 12) 已知函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$, 则 ( ).

A. $f(x)$ 的最小值为 2

B. $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\pi$ 轴对称

D. $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 轴对称

4.6 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像及应用

4.6.1 知识逐点夯实

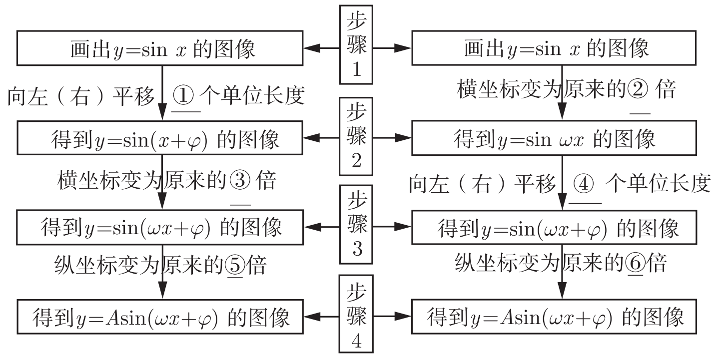
1. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的有关概念

$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0)$	振幅	周期	频率	相位	初相
	A	$T=$ ______	$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$	______	φ

2. 用五点法画 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 一个周期内的简图时, 要找的五个特征点.

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	______	$\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$	______	$\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}$	______
$y=A\sin(\omega x+\varphi)$	0	______	0	______	0

3. 函数 $y=\sin x$ 的图像经变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图像的两种途径.



4. 常用性质与结论

> (1) 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 图像平移的规律:“左加右减, 上加下减”.
>
> (2) 由 $y=\sin\omega x$ 到 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\varphi>0,\omega>0)$ 的变换: 向左平移 $\dfrac{\varphi}{\omega}$ 个单位长度而非 φ 个单位长度.

4.6.2 基础题

1. (人教 A 版必修第一册 P240 习题 5.6T1 改编) 为了得到函数 $y=\cos\dfrac{x}{5}$ 的图像, 只需把余弦曲线上所有的点 (　　).

A. 横坐标伸长到原来的 5 倍, 纵坐标不变

B. 横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{5}$, 纵坐标不变

C. 纵坐标伸长到原来的 5 倍, 横坐标不变

D. 纵坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{5}$, 横坐标不变

2. (2020 天津卷 8) 已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, 给出下列结论:

①$f(x)$ 的最小正周期为 2π;

②$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值;

③把函数 $y=\sin x$ 的图像上所有点向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度, 可得到函数 $y=f(x)$ 的图像.

其中所有正确结论的序号是 (　　).

A. ①　　B. ①③

C. ②③　　D. ①②③

3. (人教 A 版必修第一册 P241 习题 5.6T4 改编) 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,0<\varphi<\pi)$ 在一个周期内的图像如图 4-3所示, 此函数的解析式为 ______.

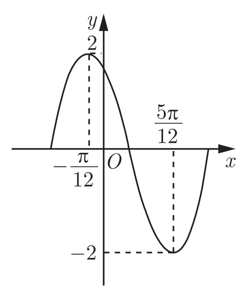


图 4-3

4. (2013 大纲卷文 9) 若函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的部分图像如图 4-4所示, 则 $\omega=($　　$)$.

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

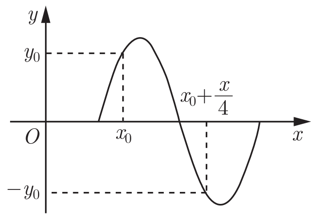


图 4-4

5. (2011 江苏卷 9) 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A,\omega,\varphi$ 为常数, $A>0,\omega>0)$ 的部分图像如图 4-5所示, 则 $f(0)$ 的值是 ______.

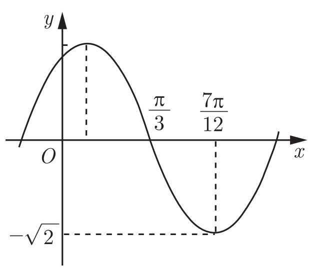


图 4-5

6. (2021 新课标全国乙卷理 7) 把函数 $y=f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图像, 则 $f(x)=($　　$)$.

A. $\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{7\pi}{12}\right)$

B. $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)$

C. $\sin\left(2x-\dfrac{7\pi}{12}\right)$

D. $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$

7. (2015 湖北卷文 17 改编) 某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 在某一个周期内的图像, 部分数据如下表:

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5		-5	0

则函数 $f(x)$ 的解析式为 ______.

8. (2020 新高考全国 I 卷 10-多选题) 函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图 4-6所示, 则 $\sin(\omega x+\varphi)=($　　$)$.

A. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

B. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$

C. $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

D. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-2x\right)$

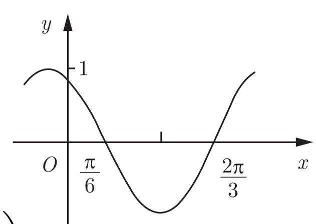


图 4-6

9. (2015 陕西卷理 3) 如图 4-7 所示, 某港口一天 6 时到 18 时的水深变化曲线近似满足函数 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)+k$. 据此函数可知, 这段时间水深 (单位:m) 的最大值为 ( ).

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 10

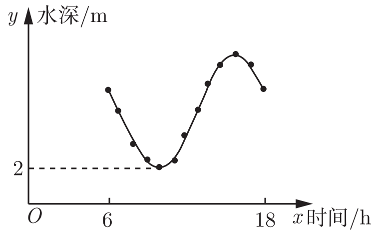


图 4-7

10. (2020 江苏卷 10) 将函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 则平移后的图像中与 y 轴最近的对称轴的方程是 ______.

11. (2016 新课标全国 Ⅱ 卷理 7) 若将函数 $y=2\sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 则平移后图像的对称轴为 ( ).

A. $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$

B. $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$

C. $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$

D. $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$

12. (2011 大纲卷理 5) 设函数 $f(x)=\cos\omega x$ $(\omega>0)$, 将 $y=f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 所得的图像与原图像重合, 则 ω 的最小值等于 ( ).

A. $\frac{1}{3}$　　B. 3　　C. 6　　D. 9

4.6.3 中档题

1. (2004 全国 Ⅰ 卷文 9) 为了得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像, 可以将函数 $y=\cos 2x$ 的图像 ( ).

A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

2. (2015 新课标全国 Ⅰ 卷文 8) 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图 4-8所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 ( ).

A. $\left[k\pi-\frac{1}{4},k\pi+\frac{3}{4}\right],k\in\mathbf{Z}$

B. $\left[2k\pi-\frac{1}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\right],k\in\mathbf{Z}$

C. $\left[k-\frac{1}{4},k+\frac{3}{4}\right],k\in\mathbf{Z}$

D. $\left[2k-\frac{1}{4},2k+\frac{3}{4}\right],k\in\mathbf{Z}$

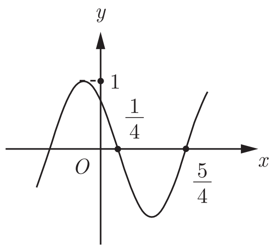


图 4-8

3. (2008 辽宁卷理 16) 已知 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 且在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上有最小值, 无最大值, 则 $\omega=$____.

4. (2019 天津卷理 7) 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 是奇函数, 将 $f(x)$ 的图像上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图像对应的函数为 $g(x)$. 若 $g(x)$ 的最小正周期为 2π 且 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, 则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=$ (　　).

A. -2　　B. $-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$　　D. 2

5. (2020 新课标全国 I 卷理 7) 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致如图 4-9 所示, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 (　　).

A. $\frac{10\pi}{9}$　B. $\frac{7\pi}{6}$　C. $\frac{4\pi}{3}$　D. $\frac{3\pi}{2}$

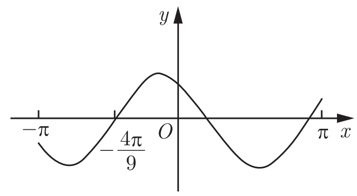


图 4-9

6. (2017 天津卷理 7) 设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $\omega>0$, $|\varphi|<\pi$. 若 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right)=2$, $f\left(\frac{11\pi}{8}\right)=0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π, 则 (　　).

A. $\omega=\frac{2}{3}$, $\varphi=\frac{\pi}{12}$

B. $\omega=\frac{2}{3}$, $\varphi=-\frac{11\pi}{12}$

C. $\omega=\frac{1}{3}$, $\varphi=-\frac{11\pi}{24}$

D. $\omega=\frac{1}{3}$, $\varphi=\frac{7\pi}{24}$

7. (2013 新课标全国 Ⅱ 卷文 16) 函数 $y=\cos(2x+\varphi)(-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后, 与函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像重合, 则 $\varphi=$____.

8. (2015 湖南卷理 9) 将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图像向右平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图像, 若对满足 $|f(x_1)-g(x_2)|=2$ 的 x_1,x_2, 有 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{3}$, 则 $\varphi=$(　　).

A. $\frac{5\pi}{12}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{\pi}{4}$　D. $\frac{\pi}{6}$

9. (2011 辽宁卷文 12) 已知函数 $f(x) = A\tan(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y = f(x)$ 的部分图像如图 4-10 所示, 则 $f\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=$(　　).

A. $2+\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $2-\sqrt{3}$

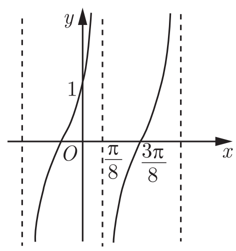


图 4-10

10. (2014 天津卷文 8) 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$, 在曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 的交点中, 若相邻交点距离的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为(　　).

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{2\pi}{3}$　　C. π　　D. 2π

11. (2012 安徽卷理 16 改编) 设函数 $g(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有 $g\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=g(x)$, 且当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时, $g(x)=\sin x$, 则函数 $g(x)$ 在 $[-\pi,0]$ 上的解析式为 ______.

12. (2011 安徽卷理 9) 已知函数 $f(x) = \sin(2x+\varphi)$, 其中 φ 为实数. 若 $f(x)\leqslant\left|f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right|$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间是(　　).

A. $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$

B. $\left[k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

4.7 正弦定理和余弦定理

4.7.1 知识逐点夯实

1. 正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=$ ______ $=$ ______ $=2R$, 其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径.

2. 余弦定理

$$\begin{cases} a^2=\_\_\_\_\_\_ \\ b^2=\_\_\_\_\_\_ \\ c^2=\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}.$$

3. 三角形的面积公式

(1) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ah$, 其中 h 为边 a 上的高;

(2) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=$ ______ $=$ ______;

(3) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$, 其中 r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径.

4. 常用性质与结论

(1) 三角形中的三角函数关系

①在 $\triangle ABC$ 中, $A+B+C=\pi$;

②$\sin(A+B)=\sin C$, $\cos(A+B)=-\cos C$, $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$, $\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$;

③在 $\triangle ABC$ 中, 两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边, $A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow \sin A>\sin B\Leftrightarrow \cos A<\cos B$.

(2) 三角形中的射影定理

在 $\triangle ABC$ 中, $a=b\cos C+c\cos B$, $b=a\cos C+c\cos A$, $c=b\cos A+a\cos B$.

4.7.2　基础题

1. (人教 A 版必修第二册 P48 练习 T3 改编) 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $B=\dfrac{\pi}{3}$, $b=\sqrt{3}$, 则 $a=$______.

2. (2013 北京卷文 5) 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3$, $b=5$, $\sin A=\dfrac{1}{3}$, 则 $\sin B=$(　　).

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{5}{9}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　D. 1

3. (人教 A 版必修第二册 P44 练习 T1(2) 改编) 在 $\triangle ABC$ 中, $a=5$, $b=2$, $C=\dfrac{\pi}{3}$, 则 $c=$______.

4. (2021 新课标全国甲卷文 8) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $B=120^\circ$, $AC=\sqrt{19}$, $AB=2$, 则 $BC=$(　　).

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 3

5. (2016 新课标全国 I 卷文 4) $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $a=\sqrt{5}$, $c=2$, $\cos A=\dfrac{2}{3}$, 则 $b=$(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

6. (2011 重庆卷理 6) 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 满足 $(a+b)^2-c^2=4$, 且 $C=60^\circ$, 则 ab 的值为 (　　).

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $8-4\sqrt{3}$

C. 1　　D. $\dfrac{2}{3}$

7. (2021 全国乙卷理 15) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 面积为 $\sqrt{3}$, $B=60^\circ$, $a^2+c^2=3ac$, 则 $b=$______.

8. (2019 新课标全国 Ⅱ 卷文 15) $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 已知 $b\sin A+a\cos B=0$, 则 $B=$______.

9. (2011 浙江卷文 5) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c. 若 $a\cos A = b\sin B$, 则 $\sin A\cos A+\cos^2 B =$(　　).

A. $-\dfrac{1}{2}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. -1　D. 1

10. (2018 浙江卷 13) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 若 $a=\sqrt{7}$, $b=2$, $A=60°$, 则 $\sin B=$ ______, $c=$ ______.

11. (2015 北京卷理 12) 在 $\triangle ABC$ 中, $a=4$, $b=5$, $c=6$, 则 $\dfrac{\sin 2A}{\sin C}=$ ______.

12. (2018 新课标全国 Ⅲ 卷文 11) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$, 则 $C=$ (　　).

A. $\dfrac{\pi}{2}$　B. $\dfrac{\pi}{3}$　C. $\dfrac{\pi}{4}$　D. $\dfrac{\pi}{6}$

4.7.3 中档题

1. (2020 新课标全国 Ⅲ 卷文 11) 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C=\dfrac{2}{3}$, $AC=4$, $BC=3$, 则 $\tan B=$(　　).

A. $\sqrt{5}$　B. $2\sqrt{5}$　C. $4\sqrt{5}$　D. $8\sqrt{5}$

2. (人教 B 版必修第四册 P21 复习题 C 组 T2 改编) 已知在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍. 则 $\dfrac{\sin B}{\sin C}=$ ______.

3. (2009 全国 I 卷文 17 改编) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c. 已知 $a^2-c^2=2b$, 且 $\sin B=4\cos A\sin C$, 则 $b=$ ______.

4. (人教 B 版必修第四册 P21 复习题 B 组 T9) 已知 D 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边上一点, $AB=AD$, 如图 4-11 所示, 记 $\angle CAD=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, 则 $\sin\alpha+\cos 2\beta=$ ______.

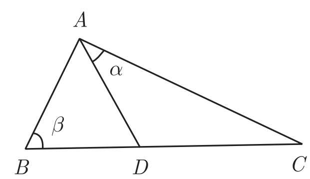


图 4-11

5. (2017 新课标全国 Ⅱ 卷文 16) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$, 则 $B=$ ______.

6. (2016 新课标全国 Ⅱ 卷理 13) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 对边分别为 a, b, c, 若 $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $\cos C=\dfrac{5}{13}$, $a=1$, 则 $b=$ ______.

7. (人教 B 版必修第四册 P21 复习题 C 组 T1 改编) 如图 4-12 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=\sqrt{3}$, $BC=1$, P 为 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle BPC=90^\circ$. 若 $\angle APB=150^\circ$, 则 $\tan\angle PBA=$ ______.

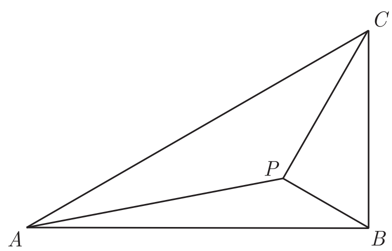


图 4-12

8. (2013 新课标全国 Ⅰ 卷文 10) 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c, $23\cos^2 A+\cos 2A=0$, $a=7$, $c=6$, 则 $b=$ (　　).

A. 10　　B. 9　　C. 8　　D. 5

9. (2004 全国 Ⅲ 卷文 11) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $BC=\sqrt{13}$, $AC=4$, 则 AC 边上的高为 (　　).

A. $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

10. (2017 新课标全国 Ⅰ 卷文 11) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$, $a=2$, $c=\sqrt{2}$, 则 $C=$(　　).

A. $\dfrac{\pi}{12}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

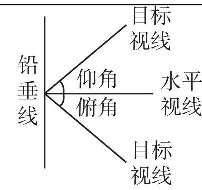
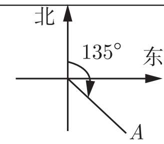
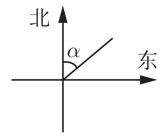
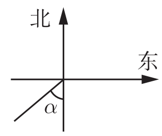
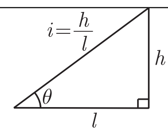
11. (2016 上海卷理 9) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $3,5,7$, 则该三角形的外接圆半径等于 ______.

12. (2018 北京卷文 14) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$ 且 $\angle C$ 为钝角, 则 $\angle B=$ ____, $\dfrac{c}{a}$ 的取值范围是 ______.

4.8 解三角形的应用

4.8.1 知识逐点夯实

测量中的几个有关术语

术语名称	术语意义	图形表示
仰角和俯角	在目标视线与水平视线 (两者在同一铅垂平面内) 所成的角中, 目标视线在水平视线上方的叫作仰角, 目标视线在水平视线下方的叫作俯角	
方位角	从某点的指北方向线起按顺时针方向到目标方向线之间的夹角叫作方位角. 方位角 θ 的范围是 $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$	
方向角	正北或正南方向线与目标方向线所成的锐角, 通常表达为北 (南) 偏东 (西) α	(1) 北偏东 α:  (2) 南偏西 α: 
坡角与坡比	坡面与水平面所成的锐二面角叫坡角 (θ 为坡角); 坡面的垂直高度与水平长度之比叫坡比 (坡度), 即 $i=\dfrac{h}{l}=\tan\theta$	

4.8.2 基础题

1. (人教 B 版必修第四册 P15 习题 9-2AT1 改编) 如图 4-13 所示, 设 A,B 两点在河的两岸, 测量者在与 A 同侧的河岸选取点 C, 测得 AC 的距离是 54m, $\angle BAC=45°$, $\angle ACB=75°$, 则 $AB=$ ______m.

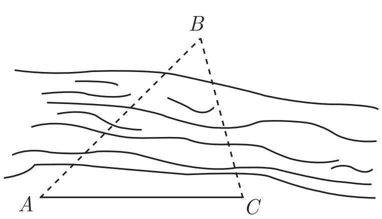


图 4-13

2. (2011 上海卷理 6) 在相距 2km 的 A,B 两点处测量目标点 C, 若 $\angle CAB=75°$, $\angle CBA=60°$, 则 A,C 两点之间的距离为 ______km.

3. (人教 B 版必修第四册 P15 习题 9-2AT3 改编) 在倾斜角等于 30° 的山坡上竖立一根旗杆, 当太阳在山顶上方时, 从山脚看太阳的仰角是 60°, 旗杆此时在山坡上的影子长是 25 米, 则旗杆高为 (　　)m.

A. 25　　B. 12.5　　C. 22　　D. 30

4. (人教 B 版必修第四册 P15 习题 9-2AT2 改编) 如图 4-14所示, 勘探人员朝一座山行进时, 前后两次测得山顶的仰角分别为 $30°$ 和 $45°$, 两个观测点 C, D 之间的距离为 200m, 则 $AB =$ ______m.

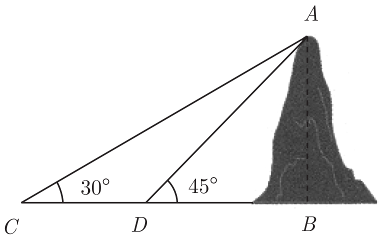


图 4-14

5. (2011 安徽卷理 14) 已知 $\triangle ABC$ 的一个内角为 $120°$, 并且三边长构成公差为 4 的等差数列, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ______.

6. (2012 上海卷理 16) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 (　　).

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 不能确定

7. (2012 福建卷理 13) 已知 $\triangle ABC$ 的三边成公比为 $\sqrt{2}$ 的等比数列, 则其最大角的余弦值为 ______.

8. (2013 陕西卷理 7) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 若 $b\cos C + c\cos B = a\sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 (　　).

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 不确定

9. (2013 福建卷理 13) 如图 4-15所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知点 D 在 BC 边上, $AD \perp AC$, $\sin\angle BAC = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 3$, 则 BD 的长为 ______.

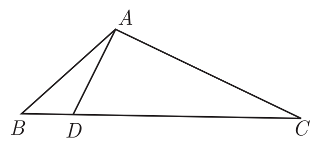


图 4-15

10. (2012 四川卷理 4) 如图 4-16所示, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 延长 BA 至 E, 使 $AE = 1$, 连接 EC, ED, 则 $\sin\angle CED =$ (　　).

A. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

C. $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{15}$

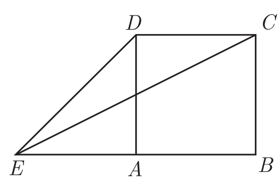


图 4-16

11. (2011 天津卷理 6) 如图 4-17 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AC 上的点, 且 $AB=AD$, $2AB=\sqrt{3}BD$, $BC=2BD$, 则 $\sin C$ 的值为 (　　).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

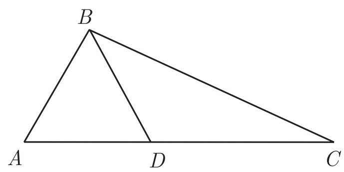


图 4-17

12. (2011 福建卷理 14) 如图 4-18所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2$, $BC=2\sqrt{3}$, 点 D 在 BC 边上, $\angle ADC=45°$, 则 AD 的长度等于 ______.

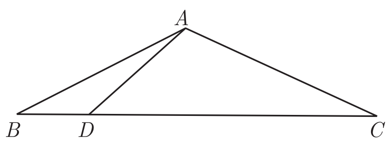


图 4-18

4.8.3 中档题

1. (2013 陕西卷理 7) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 若 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 (　　).

A. 锐角三角形　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　D. 不确定

2. (人教 B 版必修第四册 P20 复习题 A 组 T10 改编) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3,4)$, $B(8,6)$, $C(2,k)$, 其中 k 为常数, 若 $\angle A=\angle B$, 则 $k=$ ______.

3. (2010 上海卷理 18) 某人要制作一个三角形, 要求它的三条高的长度分别为 $\dfrac{1}{13}$, $\dfrac{1}{11}$, $\dfrac{1}{5}$, 则此人 (　　).

A. 不能作出这样的三角形

B. 能作出一个锐角三角形

C. 能作出一个直角三角形

D. 能作出一个钝角三角形

4. (人教 B 版必修第四册 P10 例 4 改编) 在平面四边形 $ABCD$ 中, 已知 $B+D=180°$, $AB=2$, $BC=4\sqrt{2}$, $CD=4$, $AD=2\sqrt{5}$, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 ______.

5. (人教 B 版必修第四册 P22 复习题 C 组 T3 改编) 如图 4-19 所示, 公园里有一块边长为 2 的等边三角形草坪 (记为 $\triangle ABC$), 图中把草坪分成面积相等的两部分, D 在 AB 上, E 在 AC 上, 设 $AD=x$, $DE=y$, 则 y 关于 x 的函数关系式为 ______.

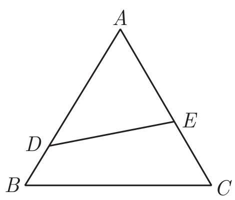


图 4-19

6. (2010 北京卷文 7) 某班设计了一个八边形的班徽 (如图 4-20所示), 它由腰长为 1, 顶角为 α 的四个等腰三角形, 及其底边构成的正方形所组成. 该八边形的面积为 (　　).

A. $2\sin\alpha-2\cos\alpha+2$

B. $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+3$

C. $3\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+1$

D. $2\sin\alpha-\cos\alpha+1$

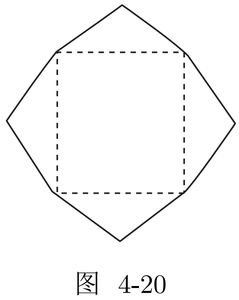


图 4-20

7. (2015 湖北卷文 15) 如图 4-21 所示, 一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶, 到 A 处测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30° 的方向上, 行驶 600m 后到达 B 处, 测得此山顶在西偏北 75° 的方向上, 仰角为 30°, 则此山的高度 $CD=$ ______m.

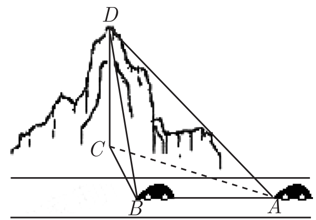


图 4-21

8. (2014 四川卷文 8) 如图 4-22所示, 从气球 A 上测得正前方的河流的两岸 B,C 的俯角分别为 75°, 30°, 此时气球的高是 60m, 则河流的宽 BC 等于 (　　).

A. $240(\sqrt{3}-1)$m　B. $180(\sqrt{2}-1)$m

C. $120(\sqrt{3}-1)$m　D. $30(\sqrt{3}+1)$m

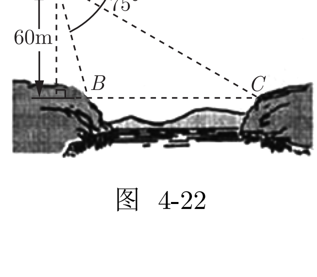


图 4-22

9. (2014 新课标全国 I 卷文 16) 如图 4-23所示, 为测量山高 MN, 选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点. 从 A 点测得 M 点的仰角 $\angle MAN = 60°$, C 点的仰角 $\angle CAB = 45°$ 以及 $\angle MAC = 75°$; 从 C 点测得 $\angle MCA = 60°$. 已知山高 $BC = 100\text{m}$, 则山高 $MN =$ ______m.

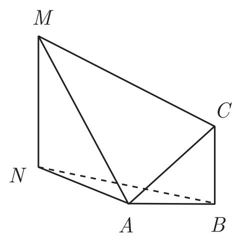


图 4-23

10. (2021 浙江卷 14) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 60°$, $AB = 2$, M 是 BC 的中点, $AM = 2\sqrt{3}$, 则 $AC =$ ______, $\cos\angle MAC =$ ______.

11. (2014 新课标全国 Ⅱ 卷文 17) 四边形 $ABCD$ 的内角 A 与 C 互补,$AB = 1$, $BC = 3$, $CD = DA = 2$.

(Ⅰ) 求 C 和 BD;

(Ⅱ) 求四边形 $ABCD$ 的面积.

12. (2018 新课标全国 I 卷理 17) 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = 90°$, $\angle A = 45°$, $|AB| = 2$, $|BD| = 5$.

(Ⅰ) 求 $\cos\angle ADB$;

(Ⅱ) 若 $|DC| = 2\sqrt{2}$, 求 $|BC|$.

4.9 专题突破　三角函数与解三角形问题

4.9.1 基础题

1. (2016 山东卷文 17) 设 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\pi - x)\sin x - (\sin x - \cos x)^2$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(Ⅱ) 把 $y = f(x)$ 的图像上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再把得到的图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 得到函数 $y = g(x)$ 的图像, 求 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

2. (2015 重庆卷文 18) 已知函数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin x - \sqrt{3}\cos^2 x$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;

(Ⅱ) 讨论 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的单调性.

3. (2018 北京卷文 16) 已知函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$, 求 m 的最小值.

4. (2021 浙江卷 18) 设函数 $f(x)=\sin x+\cos x(x\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ) 求函数 $y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2$ 的最小正周期;

(Ⅱ) 求函数 $y=f(x)f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值.

5. (2009 山东卷理 17) 已知函数 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2 x$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小正周期;

(Ⅱ) 设 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的内角. 若 $\cos B=\frac{1}{3}$, $f\left(\frac{C}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, 且 C 为锐角, 求 $\sin A$.

6. (2015 新课标全国 I 卷文 17) 设 a,b,c 分别是 $\triangle ABC$ 内角 A,B,C 的对边, $\sin^2 B=2\sin A\sin C$.

(Ⅰ) 若 $a=b$, 求 $\cos B$;

(Ⅱ) 若 $B=90^\circ$, 且 $a=\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

7. (2021 新高考全国 Ⅱ 卷 18) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边长分别为 a,b,c, $b=a+1$, $c=a+2$.

(Ⅰ) 若 $2\sin C=3\sin A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(Ⅱ) 是否存在正整数 a, 使得 $\triangle ABC$ 为钝角三角形? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由.

8. (2021 北京卷 16) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $c=2b\cos B$, $C=\frac{2\pi}{3}$.

(Ⅰ) 求 B 的大小;

(Ⅱ) 在三个条件中选择一个作为已知, 使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定, 并求 BC 边上的中线的长度.

① $c=\sqrt{2}b$;　② 周长为 $4+2\sqrt{3}$; ③ 面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

4.9.2 中档题

1. (2020 新课标全国 Ⅱ 卷理 17) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C=\sin B\sin C$.

(Ⅰ) 求 A;

(Ⅱ) 若 $BC=3$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

2. (2014 四川卷文理 16) 已知函数 $f(x)=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(Ⅱ) 若 α 是第二象限角, $f\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)=\dfrac{4}{5}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos 2\alpha$, 求 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值.

3. (2017 新课标全国 Ⅱ 卷理 17) 在 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\dfrac{B}{2}$.

(Ⅰ) 求 $\cos B$;

(Ⅱ) 若 $a+c=6$, $\triangle ABC$ 面积为 2, 求 b.

4. (2011 江西卷文 17) 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 的对边分别是 a, b, c, 已知 $3a\cos A=c\cos B+b\cos C$.

(Ⅰ) 求 $\cos A$ 的值;

(Ⅱ) 若 $a=1$, $\cos B+\cos C=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, 求边 c 的值.

5. (2019 新课标全国 Ⅰ 卷理 17) $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 记 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

(Ⅰ) 求 A;

(Ⅱ) 若 $\sqrt{2}a+b=2c$, 求 $\sin C$.

6. (2010 四川卷文 19)(I)① 证明两角和的余弦公式 $C_{(\alpha+\beta)}$:$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;

② 由 $C_{(\alpha+\beta)}$ 推导两角和的正弦公式 $S_{(\alpha+\beta)}$: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

(Ⅱ) 已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, $\tan\beta=-\frac{1}{3}$, $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 求 $\cos(\alpha+\beta)$.

7. (2019 新课标全国 Ⅲ 卷理 18) $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 已知 $a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$.

(I) 求 B;

(Ⅱ) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $c=1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

8. (2021 新高考全国 I 卷理 19)记 $\triangle ABC$ 的内角为 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $b^2=ac$, 点 D 在边 AC 上, $BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

(I) 证明:$BD=b$;

(Ⅱ) 若 $AD=2DC$, 求 $\cos\angle ABC$.

第 5 章　平面向量、复数

5.1　平面向量的概念及线性运算

5.1.1　知识逐点夯实

1. 向量的有关概念

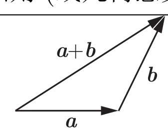
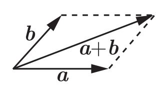
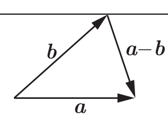
(1) 向量的定义及表示: 既有______又有______的量叫作向量. 以 A 为起点、B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$, 也可以用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 来表示.

(2) 向量的长度 (模): 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小即向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度 (模), 记作 $|\overrightarrow{AB}|$.

2. 几种特殊的向量

名称	定义	备注
零向量	长度为 0 的向量	零向量记作 $\mathbf{0}$, 其方向是任意的
单位向量	长度等于 1 的向量	单位向量记作 $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}$
平行向量	方向相同或______的非零向量	$\mathbf{0}$ 与任意向量共线
相等向量	长度相等且方向______的向量	相等向量一定是平行向量, 平行向量不一定是相等向量
相反向量	长度相等且方向______的向量	若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为相反向量, 则 $\boldsymbol{a}=$______

3. 向量的线性运算

向量运算	定义	法则 (或几何意义)	运算律
加法	求两个向量和的运算	 三角形法则  平行四边形法则	(1) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (2) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$
减法	求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量 $-\boldsymbol{b}$ 的和的运算叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差	 几何意义	$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+$______
数乘	求实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积的运算	$\lvert\lambda\boldsymbol{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\boldsymbol{a}\rvert$; 当 $\lambda>0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同; 当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向______; 当 $\lambda=0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$	$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=$______ $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$______

4. 向量共线定理

向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线, 当且仅当有唯一一个实数 λ, 使得 $\boldsymbol{b}=$ ______.

5. 常用性质与结论

(1) 若 P 为线段 AB 的中点, O 为平面内任一点, 则 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

(2) $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu$ 为实数), 若 A,P,B 三点共线, 则 $\lambda+\mu=1$.

5.1.2 基础题

1. (人教 A 版必修第二册 P15 练习 T2 改编) 点 C 在线段 AB 上, 且 $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{5}{2}$, 则 $\overrightarrow{AC}=$ ______$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}=$ ______$\overrightarrow{AB}$.

2. (人教 A 版必修第二册 P60 复习参考题 6T2(3) 改编) 在四边形 $ABCD$ 中, 若 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, 则 (　　).

A. 四边形 $ABCD$ 是矩形

B. 四边形 $ABCD$ 是菱形

C. 四边形 $ABCD$ 是正方形

D. 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

3. (2009 湖南卷理 2) 对于非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, “$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$”是“$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$”的 (　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. (2017 新课标全国 Ⅱ 卷文 3) 设非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 则 (　　).

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　B. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

C. $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$　　D. $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$

5. (2010 四川卷理 5) 设点 M 是线段 BC 的中点, 点 A 在直线 BC 外, $\overrightarrow{BC}^2=16$, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$, 则 $|\overrightarrow{AM}|=$ (　　).

A. 8　　B. 4　　C. 2　　D. 1

6. (2014 新课标全国 I 卷理 15) 已知 A,B,C 为圆 O 上的三点, 若 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, 则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 ______.

7. (2020 新高考全国 Ⅱ 卷 3) 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 边上的中点, 则 $\overrightarrow{CB}=$(　　).

A. $2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}$　　B. $\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}$

C. $2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$　　D. $\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CA}$

8. (2011 四川卷理 4) 如图 5-1所示, 在正六边形 $ABCDEF$ 中,$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=$ (　　).

A. $\overrightarrow{0}$　B. $\overrightarrow{BE}$　C. $\overrightarrow{AD}$　D. $\overrightarrow{CF}$

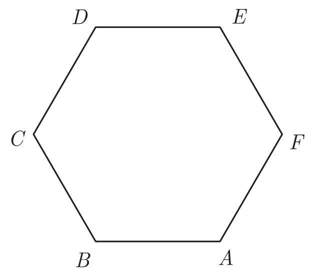


图 5-1

9. (2009 湖南卷文 4) 如图 5-2所示, D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB,BC,CA 的中点, 则 (　　).

A. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$

B. $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DF}=\mathbf{0}$

C. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$

D. $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$

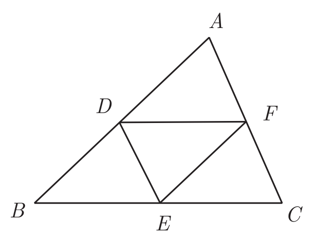


图 5-2

10. (2015 新课标全国 Ⅱ 卷文 13) 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不平行, 向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 平行, 则实数 $\lambda=$______.

11. (2013 四川卷理 12) 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AO}$, 则 $\lambda=$______.

12. (2007 全国 Ⅱ 卷理 5) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 若 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda=$(　　).

A. $\dfrac{2}{3}$　B. $\dfrac{1}{3}$　C. $-\dfrac{1}{3}$　D. $-\dfrac{2}{3}$

5.1.3　中档题

1. (2009 山东卷文 8) 设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点,$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$, 则 (　　).

A. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\mathbf{0}$

B. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$

C. $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\mathbf{0}$

D. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$

2. (人教 A 版必修第二册 P60 复习参考题 6T2(4) 改编) 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量, λ 是非零常数, 下列结论中正确的是 (　　).

A. $\boldsymbol{a}$ 与 $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相反

B. $|-\lambda\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{a}|$

C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda^2\boldsymbol{a}$ 的方向相同

D. $|-\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\boldsymbol{a}$

3. (2012 四川卷理 7) 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都是非零向量, 下列四个条件中, 使 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 成立的充分条件是 (　　).

A. $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$

B. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$

D. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

4. (人教 A 版必修第二册 P16 练习 T3 改编) 已知 $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ 是不共线的向量,$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e_1}-2\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e_1}+k\boldsymbol{e_2}$, 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线向量, 则实数 k 的值为 ______.

5. (2015 新课标全国 I 卷文 7) 已知点 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$, 则 (　　).

A. $\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

6. (人教 A 版必修第二册 P61 复习参考题 6T13(3) 改编) 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$, 且四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 则 (　　).

A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$

B. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$

C. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$

D. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$

7. (人教 B 版必修第二册 P174 复习题 B 组 T5 改编) 已知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, $\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, 其中 $\lambda, \mu\in\mathbf{R}$, 那么 A, B, C 三点共线的充要条件为 (　　).

A. $\lambda+\mu=2$　　B. $\lambda-\mu=1$

C. $\lambda\mu=-1$　　D. $\lambda\mu=1$

8. (2014 福建卷文 10) 设 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点, O 为平行四边形 $ABCD$ 所在平面内任意一点, 则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ 等于 (　　).

A. $\overrightarrow{OM}$　　B. $2\overrightarrow{OM}$

C. $3\overrightarrow{OM}$　　D. $4\overrightarrow{OM}$

9. (人教 B 版必修第二册 P143 例 2 改编) 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的取值范围为 ______.

10. (2007 江西卷理 15) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 BC 的中点, 过点 O 的直线分别交直线 AB, AC 于不同的两点 M, N, 如图 5-3 所示, 若 $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AN}$, 则 $m+n$ 的值为 ______.

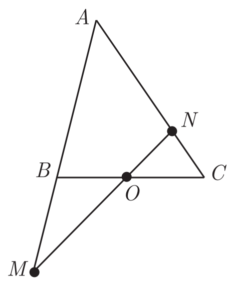


图 5-3

5.2　平面向量基本定理及坐标表示

5.2.1　知识逐点夯实

1．平面向量基本定理

如果 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于这一平面内的任意向量 $\boldsymbol{a}$, 有且只有一对实数 λ, μ, 使 $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{e}_1 + \mu\boldsymbol{e}_2$, 其中, 不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 叫作表示这一平面内所有向量的一组基底.

2．平面向量的坐标运算

(1) 向量加法、减法、数乘向量及向量的模

设 $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} =$ ______, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} =$ ______, $\lambda\boldsymbol{a} =$ ______, $|\boldsymbol{a}| =$ ______.

(2) 向量坐标的求法

① 若向量的起点是坐标原点, 则终点坐标即为向量的坐标.

② 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} =$ ______, $|\overrightarrow{AB}| =$ ______.

3. 平面向量共线的坐标表示

设 $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$, 其中 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b} \Leftrightarrow$ ______.

4. 常用性质与结论

(1) 已知 P 为线段 AB 的中点, 若 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则点 P 坐标为 $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 则 $\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标为 $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

5.2.2　基础题

1. (2019 新课标全国 Ⅱ 卷文 3) 已知向量 $\boldsymbol{a} = (2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (3, 2)$, 则 $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| =$(　　).

A. $\sqrt{2}$　B. 2　C. $5\sqrt{2}$　D. 50

2. (2016 新课标全国 Ⅰ 卷理 13) 设向量 $\boldsymbol{a} = (m, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2)$, 且 $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2$, 则 $m =$ ______.

3. (人教 A 版必修第二册 P33 练习 T4(1) 改编) 已知 $A(2,1)$, $B(4,3)$, 则线段 AB 的中点 M 的坐标为 ______.

4. (人教 A 版必修第二册 P36 习题 6.3T2 改编) 已知作用在坐标原点的三个力分别为 $\boldsymbol{F}_1=(3,4)$, $\boldsymbol{F}_2=(2,-5)$, $\boldsymbol{F}_3=(3,1)$, 则作用在原点的合力 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$ 的坐标为 ______.

5. (2012 广东卷理 3) 若向量 $\overrightarrow{BA}=(2,3)$, $\overrightarrow{CA}=(4,7)$, 则 $\overrightarrow{BC}=$(　　).

A. $(-2,-4)$　　B. $(2,4)$

C. $(6,10)$　　D. $(-6,-10)$

6. (2015 江苏卷 6) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-2)$, 若 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(9,-8)(m,n\in\mathbf{R})$, 则 $m-n$ 的值为 ________.

7. (2014 福建卷理 8) 在下列向量组中, 可以把向量 $\boldsymbol{a}=(3,2)$ 表示出来的是 (　　).

A. $\boldsymbol{e_1}=(0,0),\boldsymbol{e_2}=(1,2)$

B. $\boldsymbol{e_1}=(-1,2),\boldsymbol{e_2}=(5,-2)$

C. $\boldsymbol{e_1}=(3,5),\boldsymbol{e_2}=(6,10)$

D. $\boldsymbol{e_1}=(2,-3),\boldsymbol{e_2}=(-2,3)$

8. (2005 全国 Ⅲ 卷文 14) 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(k,12)$, $\overrightarrow{OB}=(4,5)$, $\overrightarrow{OC}=(-k,10)$, 且 A,B,C 三点共线, 则 $k=$ ______.

9. (2014 陕西卷理 13) 设 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, 向量 $\boldsymbol{a}=(\sin 2\theta,\cos\theta)$, $\boldsymbol{b}=(\cos\theta,1)$, 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$, 则 $\tan\theta=$ ______.

10. (2013 辽宁卷理 3) 已知点 $A(1,3)$, $B(4,-1)$, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 (　　).

A. $\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$　　B. $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$

C. $\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$　　D. $\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$

11. (2011 湖南卷文 13) 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{5}$, $\boldsymbol{b}=(2,1)$, 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反, 则 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 ______.

12. (2009 辽宁卷文 13) 在平面直角坐标系 xOy 中, 四边形 $ABCD$ 的边 $AB/\!/CD$, $AD/\!/BC$, 已知 $A(-2,0)$, $B(6,8)$, $C(8,6)$, 则点 D 的坐标为 ______.

5.2.3 中档题

1. (2018 新课标全国 I 卷理 6) 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB}=($ $)$.

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

2. (人教 A 版必修第二册 P37 习题 6.3T13 改编) 已知 $A(2,3)$, $B(4,-3)$, 点 P 在线段 AB 的延长线上, 且 $|\overrightarrow{AP}|=\frac{3}{2}|\overrightarrow{PB}|$, 则点 P 的坐标为 ______.

3. (2010 湖北卷理 5) 已知 $\triangle ABC$ 和点 M 满足 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$. 若存在实数 m 使得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}$ 成立, 则 $m=$ ( ).

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

4. (人教 A 版必修第二册 P33 练习 T5 改编) 已知点 $O(0,0)$, 向量 $\overrightarrow{OA}=(2,3)$, $\overrightarrow{OB}=(6,-3)$, 点 P 是线段 AB 的三等分点, 则点 P 的坐标为 ______.

5. (人教 B 版必修第二册 P174 复习题 B 组 T9 改编) 已知 $A(-1,1)$, $B(3,2)$, $D(0,5)$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, AC 与 BD 相交于点 M, 则点 C 的坐标为 ______, 点 M 的坐标为 ______.

6. (2013 北京卷理 13) 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图 5-4 所示, 若 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$, 则 $\frac{\lambda}{\mu}=$ ______.

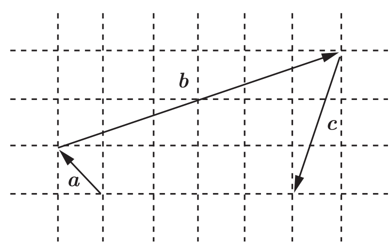


图 5-4

7. (2015 北京卷理 13) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 满足 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$. 若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, 则 $x=$ ________; $y=$ ________.

8. (2010 全国 Ⅱ 卷理 8) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, CD 平分 $\angle ACB$, 若 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, 则 $\overrightarrow{CD}=$(　　).

A. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{3}{5}\boldsymbol{a}+\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{4}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$

9. (2013 江苏卷 10) 设 D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC 上的点, $AD=\frac{1}{2}AB$, $BE=\frac{2}{3}BC$, 若 $\overrightarrow{DE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}$($\lambda_1,\lambda_2$ 为实数), 则 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值为 ________.

10. (2017 北京卷理 6) 设 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 为非零向量, 则 “存在负数 λ, 使得 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$” 是 “$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}<0$” 的 (　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

11. (2015 上海卷文 18) 已知点 A 的坐标为 $(4\sqrt{3},1)$, 将 OA 绕着坐标原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 到 OB, 则点 B 的纵坐标为 (　　).

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{11}{2}$　　D. $\frac{13}{2}$

12. (2004 湖南卷文 8) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$, $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},-1)$, 则 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值、最小值分别是 (　　).

A. $4\sqrt{2},0$　　B. $4,2\sqrt{2}$

C. $16,0$　　D. $4,0$

5.3 平面向量的数量积及其应用

5.3.1 知识逐点夯实

1. 向量的夹角

(1) 定义: 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 则 ______ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

(2) 范围: 设 θ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 则 $0^\circ\leqslant\theta\leqslant180^\circ$.

(3) 共线与垂直: 若 $\theta=0^\circ$, 则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ ______; 若 $\theta=180^\circ$, 则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ ______; 若 $\theta=90^\circ$, 则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ ______.

2．平面向量的数量积

(1) 定义: 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 他们的夹角为 θ, 则数量______叫作 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积 (或内积), 记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$______, 规定零向量与任一向量的数量积为 0, 即 $\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

(2) 几何意义: 数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影______的乘积.

3. 向量数量积的运算律

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$;

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

4. 平面向量数量积的有关结论

已知非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$, $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

结论	符号表示	坐标表示
向量的模	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$
夹角的余弦值	$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$	$\cos\theta=$______
$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件	______	$x_1x_2+y_1y_2=0$
$\lvert\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rvert$ 与 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert$ 的关系	$\lvert\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rvert\leqslant\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert$	$\lvert x_1x_2+y_1y_2\rvert\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

4. 常用性质与结论

(1) 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角, 则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$, 反之不成立 (因为夹角为 0° 时不成立).

(2) 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角, 则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$, 反之不成立 (因为夹角为 180° 时不成立).

(3) 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为平面的非零向量, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{4}\left[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2\right]$.

(4) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 M 是 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AM}\right|^2-\dfrac{1}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$.

5.3.2　基础题

1. (2019 新课标全国 I 卷理 7) 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$, 且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 (　　).

   A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

2. (人教 A 版必修第二册 P24 习题 6.2T18 改编) 已知 $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=3$, $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=61$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=$(　　).

   A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

3. (2019 新课标全国 Ⅲ 卷理 13) 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为单位向量, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 若 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\sqrt{5}\boldsymbol{b}$, 则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=$ ______.

4. (2014 山东卷文 7) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{b}=(3,m)$. 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$, 则实数 $m=$ ( ).

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$

C. 0　　D. $-\sqrt{3}$

5. (人教 A 版必修第二册 P20 习题 6.2T3 改编) 已知 $|\boldsymbol{a}|=6$, $\boldsymbol{e}$ 为单位向量, 若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}$ 的夹角 θ 等于 45°, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{e}$ 上的投影向量为 ______.

6. (2021 北京卷 13) 已知 $\boldsymbol{a}=(2,1)$, $\boldsymbol{b}=(2,-1)$, $\boldsymbol{c}=(0,1)$, 则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$ ______; $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ______.

7. (2011 新课标全国卷理 10) 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为单位向量, 其夹角为 θ, 有下列四个命题

p_1: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$

p_2: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]$

p_3: $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$

p_4: $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>1\Leftrightarrow\theta\in\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$

其中的真命题是 ( ).

A. p_1,p_4　　B. p_1,p_3

C. p_2,p_3　　D. p_2,p_4

8. (2021 浙江卷 3) 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 则 “$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$” 是 “$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$” 的 ( ).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. (2017 新课标全国 Ⅰ 卷理 13) 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$, 则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$ ______.

10. (2020 新课标全国 Ⅱ 卷理 13) 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°, $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直, 则 $k=$ ______.

11. (2021 新课标全国甲卷理 14) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,0)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$, 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, 则 $k=$ ______.

12. (2012 浙江卷理 15) 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM=3$, $BC=10$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ________.

5.3.3　中档题

1. (2021 新高考全国 Ⅱ 卷 15) 已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$ ______.

2. (人教 A 版必修第二册 P61 复习参考题 6T13(5) 改编) 等边三角形 ABC 的边长为 1, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, 那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ 等于 (　　).

A. 3　　B. -3　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $-\dfrac{3}{2}$

3. (2020 新课标全国 Ⅲ 卷理 6) 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=6$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$, 则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=$(　　).

A. $-\dfrac{31}{35}$　　B.$-\dfrac{19}{35}$

C.$\dfrac{17}{35}$　　D.$\dfrac{19}{35}$

4. (人教 A 版必修第二册 P37 习题 6.3T15 改编) 在平面斜坐标系 xOy 中, $\angle xOy=60°$, 平面上任一点 P 关于斜坐标系的斜坐标是这样定义的: 若 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$, 其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 分别为与 x 轴、y 轴同方向的单位向量, 则 P 点斜坐标为 (x,y). 若点 P 的斜坐标为 $(2,-2)$, 点 Q 的坐标为 $(1,4)$, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的值为 ______.

5. (2017 山东卷理 12) 已知 $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ 是互相垂直的单位向量, 若 $\sqrt{3}\boldsymbol{e_1}-\boldsymbol{e_2}$ 与 $\boldsymbol{e_1}+\lambda\boldsymbol{e_2}$ 的夹角为 $60°$, 则实数 λ 的值是 ______.

6. (2003 天津卷理 4) 已知 O 是平面上一定点, A,B,C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right),\lambda\in[0,+\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 (　　).

A. 外心　　B. 内心

C. 重心　　D. 垂心

7. (2016 天津卷理 7) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, 连接 DE 并延长到点 F, 使得 $DE=2EF$, 则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为 (　　).

A. $-\dfrac{5}{8}$　　B. $\dfrac{1}{8}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{11}{8}$

8. (2020 新高考全国 I 卷 6) 已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内一点, 则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围为 (　　).

A. $(-2,6)$　　B. $(-6,2)$

C. $(-2,4)$　　D. $(-4,6)$

9. (2017 新课标全国 Ⅱ 卷理 12) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是 (　　).

A. -2　B. $-\dfrac{3}{2}$　C. $-\dfrac{4}{3}$　D. -1

10. (2020 浙江卷 17) 设 $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ 为单位向量, 满足 $|2\boldsymbol{e_1}-\boldsymbol{e_2}|\leqslant\sqrt{2}$, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}$, 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ, 则 $\cos^2\theta$ 的最小值为 ______.

11. (2021 新高考全国 I 卷 10-多选题) 已知 O 为坐标原点, 点 $P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$, $P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$, $A(1,0)$, 则 (　　).

A. $|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|$

B. $|\overrightarrow{AP_1}|=|\overrightarrow{AP_2}|$

C. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$

D. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

12. (2018 浙江卷 9) 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{e}$ 是平面向量, $\boldsymbol{e}$ 是单位向量. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{b}+3=0$, 则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值是 (　　).

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\sqrt{3}+1$

C. 2　　D. $2-\sqrt{3}$

5.4 复数

5.4.1 知识逐点夯实

1. 复数的有关概念

(1) 定义: 形如 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的数叫作复数, 其中 a 叫作复数的______, b 叫作复数的______(i 为虚数单位). 若 $b=0$, 则 $a+b\mathrm{i}$ 为实数; 若 $b\neq0$, 则 $a+b\mathrm{i}$ 为虚数; 若 $a=0$ 且 $b\neq0$, 则 $a+b\mathrm{i}$ 为纯虚数.

(2) 复数相等:$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow$ ______ 且 ______$(a,b,c,d\in\mathbf{R})$.

(3) 共轭复数:$a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 共轭 $\Leftrightarrow$ ______且______$(a,b,c,d\in\mathbf{R})$.

(4) 复数的模: 给定复平面内的点 $z(a,b)$,

向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模叫作复数 $z=a+b\text{i}$ 的模, 记作 $|a+b\text{i}|$ 或 $|z|$, 即 $|z|=|a+b\text{i}|=$______$(a,b\in\mathbf{R})$.

2. 复数的几何意义

复数 $z=a+b\text{i}$ 与复平面内的点 $Z(a,b)$ 及平面向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)(a,b\in\mathbf{R})$ 是一一对应.

3. 复数的运算

(1) 运算法则: 设 $z_1=a+b\text{i}$, $z_2=c+d\text{i}$, $(a,b,c,d\in\mathbf{R})$.

① 加法:$z_1+z_2=(a+b\text{i})+(c+d\text{i})=$______;

② 减法:$z_1-z_2=(a+b\text{i})-(c+d\text{i})=$______;

③ 乘法:$z_1z_2=(a+b\text{i})(c+d\text{i})=$______;

④ 除法:$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+b\text{i}}{c+d\text{i}}=\dfrac{(a+b\text{i})(c-d\text{i})}{(c+d\text{i})(c-d\text{i})}=$______.

(2) 复数加法的运算定律

设 $z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}$, 则复数加法满足以下运算律:

① 交换律:$z_1+z_2=z_2+z_1$;

② 结合律:$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

4. 常用性质与结论

(1) $\text{i}^2=-1$;　$\text{i}^{4n}=1$;　$\text{i}^{4n+1}=\text{i}$;　$\text{i}^{4n+2}=-1$;　$\text{i}^{4n+3}=-\text{i}$.

(2) $z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$;　$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

5.4.2　基础题

1. (2021 新课标全国乙卷文 2) 设 $\text{i}z=4+3\text{i}$, 则 $z=$(　　).

A. $-3-4\text{i}$　　B. $-3+4\text{i}$

C. $3-4\text{i}$　　D. $3+4\text{i}$

2. (人教 A 版必修第二册 P94 复习参考题 7T1(2)) 复数 $\dfrac{5}{2-\text{i}}$ 的共轭复数是(　　).

A. $\text{i}+2$　　B. $\text{i}-2$

C. $-2-\text{i}$　　D. $2-\text{i}$

3. (2009 重庆卷理 2) 已知复数 z 的实部为 -1, 虚部为 2, 则 $\dfrac{5\text{i}}{z}=$(　　).

A. $2-\text{i}$　　B. $2+\text{i}$

C. $-2-\text{i}$　　D. $-2+\text{i}$

4. (2013 新课标全国 I 卷理 2) 若复数 z 满足 $(3-4\text{i})z=|4+3\text{i}|$, 则 z 的虚部为(　　).

A. -4　　B. $-\dfrac{4}{5}$　　C. 4　　D. $\dfrac{4}{5}$

5. (2013 安徽卷文 1) 设 i 为虚数单位, 若复数 $a-\dfrac{10}{3-\mathrm{i}}(a\in\mathbf{R})$ 是纯虚数, 则 a 的值是 (　　).

A. -3　B. -1　C. 1　D. 3

6. (2020 新课标全国 Ⅱ 卷文 2) $(1-\mathrm{i})^4=$ (　　).

A. -4　B. 4　C. $-4\mathrm{i}$　D. $4\mathrm{i}$

7. (2021 新课标全国甲卷理 3) 已知 $(1-\mathrm{i})^2z=3+2\mathrm{i}$, 则 $z=$(　　).

A. $-1-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$　B. $-1+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

C. $-\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}$　D. $-\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}$

8. (2021 新课标全国乙卷理 1) 设 $2(z+\overline{z})+3(z-\overline{z})=4+6\mathrm{i}$, 则 $z=$(　　).

A. $1-2\mathrm{i}$　B. $1+2\mathrm{i}$

C. $1+\mathrm{i}$　D. $1-\mathrm{i}$

9. (2013 四川卷理 2) 如图 5-5所示, 在复平面内, 点 A 表示复数 z, 则图中表示 z 的共轭复数的点是 (　　).

A. A　B. B　C. C　D. D

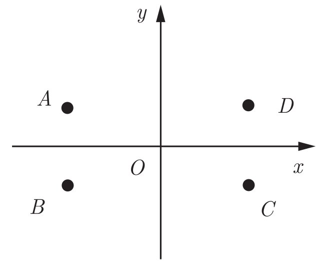


图 5-5

10. (2017 北京卷理 2) 若复数 $(1-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点在第二象限, 则实数 a 的取值范围是 (　　).

A. $(-\infty,1)$　B. $(-\infty,-1)$

C. $(1,+\infty)$　D. $(-1,+\infty)$

11. (2010 北京卷文 2) 在复平面内, 复数 $6+5\mathrm{i}$, $-2+3\mathrm{i}$ 对应的点分别为 A,B. 若 C 为线段 AB 的中点, 则点 C 对应的复数是 (　　).

A. $4+8\mathrm{i}$　B. $8+2\mathrm{i}$

C. $2+4\mathrm{i}$　D. $4+\mathrm{i}$

12. (2019 新课标全国 I 卷理 2) 设复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$, 在复平面内对应的点 Z 为 (x,y), 则 (　　).

A. $(x+1)^2+y^2=1$

B. $(x-1)^2+y^2=1$

C. $x^2+(y-1)^2=1$

D. $x^2+(y+1)^2=1$

5.4.3 中档题

1. (2020 新课标全国 Ⅱ 卷理 15) 设复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=2$, $z_1+z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$, 则 $|z_1-z_2|=$______.

2. (人教 A 版必修第二册 P81 习题 7.2T7) 已知 $2\mathrm{i}-3$ 是关于 x 的方程 $2x^2+px+q=0$ 的一个根, 则 $p=$______, $q=$______.

3. (2013 陕西理 6) 设 z_1,z_2 是复数, 则下列命题中的假命题是 (　　).

A. 若 $|z_1-z_2|=0$, 则 $\overline{z_1}=\overline{z_2}$

B. 若 $z_1=\overline{z_2}$, 则 $\overline{z_1}=z_2$

C. 若 $|z_1|=|z_2|$, 则 $z_1\cdot\overline{z_1}=z_2\cdot\overline{z_2}$

D. 若 $|z_1|=|z_2|$, 则 $z_1^2=z_2^2$

4. (人教 B 版必修第四册 P42 习题 10-2BT5) 已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-x+7=0$ 的两个根, 则 $|x_1-x_2|^2=$______.

5. (人教 B 版必修第四册 P52 复习题 B 组 T7) 已知 $z+\dfrac{4}{z}$ 为实数, 且 $|z-2|=2$, 则 $z=$______.

6. (2007 上海卷理 9 改编-多选题) 对于非零实数 a,b, 以下四个命题都成立, 那么对于非零复数 a,b 仍然成立的是 (　　).

A. $a+\dfrac{1}{a}\neq 0$

B. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

C. 若 $|a|=|b|$, 则 $a=\pm b$

D. 若 $a^2=ab$, 则 $a=b$

7. (2010 浙江卷理 5) 对任意复数 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$, i 为虚数单位, 则下列结论正确的是 (　　).

A. $|z-\overline{z}|=2y$　　B. $z^2=x^2+y^2$

C. $|z-\overline{z}|\geqslant 2x$　　D. $|z|\leqslant|x|+|y|$

8. (2017 新课标全国 I 卷理 3) 设有下面四个命题

p_1 : 若复数 z 满足 $\dfrac{1}{z} \in \mathrm{R}$, 则 $z \in \mathbf{R}$;

p_2 : 若复数 z 满足 $z^2 \in \mathrm{R}$, 则 $z \in \mathbf{R}$;

p_3 : 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 z_2 \in \mathbf{R}$, 则 $z_1 = \overline{z}_2$;

p_4 : 若复数 z 满足 $z \in \mathrm{R}$, 则 $\overline{z} \in \mathbf{R}$.

其中真命题为 (   ).

A. p_1, p_3 B. p_1, p_4

C. p_2, p_3 D. p_2, p_4

9. (2014 广东卷文 10) 对任意复数 w_1, w_2, 定义 $w_1 * w_2 = w_1 \overline{w_2}$, 其中 $\overline{w_2}$ 是 w_2 的共轭复数, 对任意复数 z_1, z_2, z_3 有如下四个命题:

① $(z_1 + z_2) * z_3 = (z_1 * z_3) + (z_2 * z_3)$;

② $z_1 * (z_2 + z_3) = (z_1 * z_2) + (z_1 * z_3)$;

③ $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$;

④ $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$.

则真命题的个数是 (   ).

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. (2013 陕西卷文 6) 设 z 是复数, 则下列命题中的假命题是 (   ).

A. 若 $z^2 \geqslant 0$, 则 z 是实数

B. 若 $z^2 < 0$, 则 z 是虚数

C. 若 z 是虚数, 则 $z^2 \geqslant 0$

D. 若 z 是纯虚数, 则 $z^2 < 0$

第 6 章　数列

6.1 数列的概念与简单表示

6.1.1 知识逐点夯实

1. 数列的有关概念

(1) 数列的定义: 一般地, 把按照确定的顺序排列的一列数称为数列, 数列中的______叫作这个数列的项.

(2) 数列的通项公式: 如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个式子来表示, 那么这个式子叫作数列的通项公式.

(3) 数列的递推公式: 如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示, 那么这个式子就叫作这个数列的递推公式.

2. 数列与函数

数列是一种特殊的函数, 数列的通项 a_n 可以看成关于 n 的函数.

3. 数列的分类

(1) 按项数分类: $\begin{cases} \text{有穷数列: 项数有限} \\ \text{无穷数列: 项数无限} \end{cases}$.

(2) 按项与项间的大小关系分类: $\begin{cases} \text{\_\_\_\_\_\_}: a_{n+1} > a_n \\ \text{\_\_\_\_\_\_}: a_{n+1} < a_n \\ \text{\_\_\_\_\_\_}: a_{n+1} = a_n \\ \text{摆动数列} \end{cases}$.

4. 数列的表示法

(1) 列表法: 列出表格来表示数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与序号 n 之间的关系.

(2) 图像法: 在平面直角坐标系中, 数列的图像是一系列横坐标为正整数的孤立的点 (n, a_n).

(3) 通项公式法: 如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与序号 n 之间的对应关系可以用一个式子来表示, 那么这个公式叫作这个数列的通项公式.

(4) 递推公式法: 如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示, 那么这个公式叫作这个数列的递推公式.

5. SA 公式

若已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}.$$

6.1.2　基础题

1. (人教 B 版选择性必修第三册 P14 习题 5-1AT5 改编) 数列 $\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \cdots$ 的通项公式 $a_n =$ ______.

2. (人教 B 版选择性必修第三册 P14 习题 5-1AT2 改编) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 10 + 2n, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $a_5 =$ ______.

3. (人教 A 版选择性必修第二册 P5 例 3 改编) 如果数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 + 2n$, 则 120 是这个数列的第 ______ 项.

4. (人教 B 版选择性必修第三册 P8 练习 AT5 改编) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{2n-1}{n}$, 那么这个数列是 (　　).

   A. 递减数列　　B. 递增数列

   C. 摆动数列　　D. 常数列

5. (人教 A 版选择性必修第二册 P8 练习 T4 改编) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为 $S_n = -2n^2$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ ______.

6. (2011 江西卷理 5) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足:$S_n + S_m = S_{n+m}$, 且 $a_1 = 1$, 那么 $a_{10} =$(　　).

   A. 1　　B. 9　　C. 10　　D. 55

7. (2010 安徽卷文 5) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2$, 则 a_8 的值为 (　　).

   A. 15　　B. 16　　C. 49　　D. 64

8. (2008 江西卷理 5) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 则 $a_n =$ (　　).

   A. $2 + \ln n$

   B. $2 + (n-1)\ln n$

   C. $2 + n\ln n$

   D. $1 + n + \ln n$

9. (2018 新课标全国 I 卷理 17 改编) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, na_{n+1} = 2(n+1)a_n$. 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ______.

10. (2005 湖南卷文 5) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n - \sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n + 1}(n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_{20} =$ (　　).

    A. 0　　B. $-\sqrt{3}$

    C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6.1.3 中档题

1. (2007 北京卷理 10) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-10n(n=1,2,3,\cdots)$, 则此数列的通项公式为 ______; 数列 $\{na_n\}$ 中数值最小的项是第 ______ 项.

2. (人教 B 版选择性必修第三册 P57 复习题 B 组 T8 改编) 已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n=n^2$, 则 $a_n=$ ______.

3. (2013 新课标全国 I 卷理 14) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 ______.

4. (人教 B 版选择性必修第三册 P57 复习题 B 组 T9 改编) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n=3n^2$, 则 $a_n=$ ______.

5. (2010 辽宁卷理 16) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=33$, $a_{n+1}-a_n=2n$, 则 $\dfrac{a_n}{n}$ 的最小值为 ______.

6. (人教 B 版选择性必修第三册 P7 练习 AT4 改编) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2+\lambda n(n\in\mathbf{N}^*)$, 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 λ 的取值范围是 (　　).

A. $\left(-\dfrac{7}{2},+\infty\right)$　　B. $[0,+\infty)$

C. $[-2,+\infty)$　　D. $(-3,+\infty)$

7. (2021 北京卷 10) 数列 $\{a_n\}$ 是递增的整数数列, 且 $a_1\geqslant 3$, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=100$, 则 n 的最大值为 (　　).

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

8. (2015 江苏卷 10) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}-a_n=n+1(n\in\mathbf{N}^*)$, 则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 ______.

9. (2014 新课标全国 Ⅱ 卷文 16) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$, $a_8=2$, 则 $a_1=$ ______.

10. (2011 浙江卷文 17) 若数列 $\left\{n(n+4)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$ 中的最大项是第 k 项, 则 $k=$ ______.

6.2 等差数列及其前 n 项和

6.2.1 知识逐点夯实

1. 等差数列的有关概念

(1) 定义: 一般地, 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的差都等于同一个常数, 那么这个数列就叫作等差数列, 这个常数叫作等差数列的公差, 等差数列用符号表示为 ______$(n \in \mathbf{N}^*, d$为常数$)$.

(2) 等差中项: 数列 a, A, b 成等差数列的充要条件是 $A = \dfrac{a+b}{2}$, 其中 A 叫作 a, b 的 ______.

2. 等差数列的有关公式

(1) 通项公式:$a_n =$ ______ $= nd + a_1 - d$, 即当 $d \neq 0$ 时, a_n 是关于 n 的一次函数.

(2) 前 n 项和公式:$S_n =$ ______ $=$ ______ $= \dfrac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \dfrac{d}{2}\right)n$, 即当 $d \neq 0$ 时, s_n 是关于 n 的二次函数, 且没有常数项.

3. 常用性质与结论

(1) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 d, S_n 为该数列的前 n 项和.

① 通项公式的推广:$a_n = a_m + (n - m)d(n, m \in \mathbf{N}^*)$.

② 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $m+n = p+q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q(m, n, p, q \in \mathbf{N}^*)$. 特别地, 若 $m+n = 2p$, 则 $2a_p = a_m + a_n(m, n, p, q \in \mathbf{N}^*)$.

③ $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \cdots$ 也成等差数列, 公差为 n^2d.

(2) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 > 0$, $d < 0$, 则 S_n 存在最大值; 若 $a_1 < 0$, $d > 0$, 则 S_n 存在最小值.

(3) 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列 $\Leftrightarrow S_n = An^2 + Bn(A, B$ 为常数$)$.

6.2.2 基础题

1. (人教 A 版选择性必修第二册 P14 例 1 改编) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 5 - 2n$, 则 $\{a_n\}$ 的公差 $d =$ ______.

2. (人教 A 版选择性必修第二册 P15 练习 T5 改编) 在 7 与 21 中插入 3 个数, 使得这 5 个数成等差数列, 则这个数列的公差 $d =$ ______.

3. (人教 A 版选择性必修第二册 P23 练习 T4 改编) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $S_{15} = 5(a_2 + a_6 + a_k)$, 则 $k =$ ______.

4. (2012 辽宁卷理 6) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_4+a_8=16$, 则该数列前 11 项和 $S_{11}=$ (　　).

A. 58　　B. 88　　C. 143　　D. 176

5. (2014 江西卷文 13) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=7$, 公差为 d, 前 n 项和为 S_n, 当且仅当 $n=8$ 时, S_n 取得最大值, 则 d 的取值范围为 ______.

6. (2018 北京卷理 9) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=3$, $a_2+a_5=36$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ______.

7. (2012 江西卷理 12) 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是等差数列, 若 $a_1+b_1=7$, $a_3+b_3=21$, 则 $a_5+b_5=$ ______.

8. (2020 新高考全国 I 卷 14) 将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 ______.

9. (2019 新课标全国 I 卷理 9) 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_4=0$, $a_5=5$, 则 (　　).

A. $a_n=2n-5$

B. $a_n=3n-10$

C. $S_n=2n^2-8n$

D. $S_n=\dfrac{1}{2}n^2-2n$

10. (2006 广东卷文 6) 已知等差数列共有 10 项, 其中奇数项之和为 15, 偶数项之和为 30, 则其公差是 (　　).

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

11. (2019 北京卷理 10) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_2=-3$, $S_5=-10$, 则 $a_5=$ ______, S_n 的最小值为 ______.

12. (2012 大纲卷理 5) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_5=5$, $S_5=15$, 则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 100 项和为 (　　).

A. $\dfrac{100}{101}$　　B. $\dfrac{99}{101}$　　C. $\dfrac{99}{100}$　　D. $\dfrac{101}{100}$

6.2.3　中档题

1. (2006 全国 I 卷理 10) 设 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列, 若 $a_1+a_2+a_3=15$, $a_1a_2a_3=80$, 则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=$(　　).

A. 120　　B. 105　　C. 90　　D. 75

2. (人教 B 版选择性必修第三册 P21 练习 BT1 改编) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 17, 公差为 -0.6, 此等差数列从第 ( ) 项开始出现负数.

A. 30 B. 31 C. 32 D. 33

3. (人教 A 版选择性必修第二册 P23 练习 T5 改编) 已知一个等差数列的项数为奇数, 其中所有的奇数项的和为 290, 所有的偶数项的和为 261, 则该数列的中间一项的值为 ( ).

A. 28 B. 29 C. 30 D. 31

4. (2013 新课标全国 I 卷理 7) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_{m-1}=-2$, $S_m=0$, $S_{m+1}=3$, 则 $m=$ ( ).

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

5. (人教 A 版选择性必修第二册 P25 习题 4.2T5 改编) 已知一个多边形的周长为 158cm, 所有各边的长成等差数列, 最大边长为 44cm, 公差为 3cm, 则多边形的边长为 ( ).

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

6. (2015 北京卷理 6 改编-多选题) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 下列结论中不正确的是 ( ).

A. 若 $a_1+a_2>0$, 则 $a_2+a_3>0$

B. 若 $a_1+a_3<0$, 则 $a_1+a_2<0$

C. 若 $0<a_1<a_2$, 则 $a_2>\sqrt{a_1a_3}$

D. 若 $a_1<0$, 则 $(a_2-a_1)(a_2-a_3)>0$

7. (2006 全国 Ⅱ 卷理 11) 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\dfrac{S_3}{S_6}=\dfrac{1}{3}$, 则 $\dfrac{S_6}{S_{12}}=$ ( ) .

A. $\dfrac{3}{10}$ B. $\dfrac{1}{3}$ C. $\dfrac{1}{8}$ D. $\dfrac{1}{9}$

8. (2015 新课标全国 I 卷理 17 改编) S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_n>0, a_n^2+2a_n=4S_n+3(n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $a_n=$ ______.

9. (2007 湖北卷文 10) 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n, 且 $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{7n+45}{n+3}$, 则使得 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数的个数是 (　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

10. (2003 全国卷理 7) 已知方程 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的四个根组成一个首项为 $\dfrac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|m-n|=$(　　).

A. 1　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{3}{8}$

11. (2021 新课标全国乙卷理 19) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积, 已知 $\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$.

(I) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(Ⅱ) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

12. (2021 新课标全国甲卷理 18) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 从下面① ② ③ 中选取两个作为条件, 证明另外一个成立.

① 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列;

② 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列;

③ $a_2=3a_1$.

6.3 等比数列及其前 n 项和

6.3.1 知识逐点夯实

1. 等比数列的有关概念

(1) 定义: 一般地, 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的比都等于______, 那么这个数列就叫作等比数列, 这个常数叫作等比数列的______, 通常用字母 $q(q\neq 0)$ 表示, 等比数列用符号表示为 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q(n\in \mathbf{N}^*, d$ 为常数).

(2) 等比中项: 数列 a, G, b 成等比数列, 那么 G 叫作 a, b 的等比中项. 即______.

2. 等比数列的有关公式

(1) 通项公式:$a_n=$______.

(2) 前 n 项和公式: $S_n=\begin{cases}\underline{\qquad\quad}, & q=1\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1\end{cases}$. 当 $q\neq 1$ 时, $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=-\dfrac{a_1}{1-q}q^n+\dfrac{a_1}{1-q}$, 若 $k=\dfrac{a_1}{1-q}$, 则 $S_n=-kq^n+k$, 由此可知, 数列 $\{S_n\}$ 的图像是函数 $y=k-kq^x$ 图像上一系列孤立的点.

3. 常用性质与结论

(1) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 公比为 q, S_n 为该数列的前 n 项和.

① 通项公式的推广:$a_n = a_m q^{n-m}(n, m \in \mathbf{N}^*)$.

② 若 $m+n=p+q=2k$, 则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q = a_k^2(m, n, p, q, k \in \mathbf{N}^*)$.

③ 公比不为 -1 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n, 则 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}, \cdots$ 也成等比数列, 公比为 q^n.

(2) 等比数列的单调性

① 当 $q>1, a_1>0$ 或 $0<q<1, a_1<0$ 时, $\{a_n\}$ 是递增数列;

② 当 $q>1, a_1<0$ 或 $0<q<1, a_1>0$ 时, $\{a_n\}$ 是递减数列;

③ 当 $q=1$ 时, $\{a_n\}$ 是常数列.

6.3.2 基础题

1. (人教 B 版选择性必修第三册 P31 例 3 改编) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3 \times 2^n$, 则等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=$ ______.

2. (人教 A 版选择性必修第二册 P34 练习 T1 改编) 在 9 与 243 中间插入 2 个数, 使得这 4 个数成等比数列, 则公比 $q=$ ______.

3. (人教 B 版选择性必修第三册 P40 练习 AT4 改编) 某林场计划第 1 年造林 15 公顷, 以后每年比前一年多造林 20%, 该林场 5 年共造林 ______ 公顷.

4. (2015 新课标全国 I 卷文 13) 数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=2, a_{n+1}=2a_n$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n=126$, 则 $n=$ ______.

5. (2013 新课标全国 I 卷文 6) 设首项为 1, 公比为 $\dfrac{2}{3}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 (　　).

A. $S_n=2a_n-1$　　B. $S_n=3a_n-2$

C. $S_n=4-3a_n$　　D. $S_n=3-2a_n$

6. (2019 新课标全国 I 卷理 14) 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1=\dfrac{1}{3}, a_4^2=a_6$, 则 $S_5=$ ______.

7. (2016 新课标全国 Ⅲ 卷文 17 改编) 已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ______.

8. (2020 新课标全国 I 卷文 10) 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1+a_2+a_3=1$, $a_2+a_3+a_4=2$, 则 $a_6+a_7+a_8=($　　$)$.

A. 12　　B. 24　　C. 30　　D. 32

9. (2012 北京卷文 6 改编-多选题) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 下面结论中不正确的是 (　　).

A. $a_1+a_3\geqslant 2a_2$

B. $a_1^2+a_3^2\geqslant 2a_2^2$

C. 若 $a_1=a_3$, 则 $a_1=a_2$

D. 若 $a_3>a_1$, 则 $a_4>a_2$

10. (2010 北京卷理 2) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 公比 $|q|\neq 1$, 若 $a_m=a_1a_2a_3a_4a_5$, 则 $m=($　　$)$.

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

11. (2011 辽宁卷文 5) 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_na_{n+1}=16^n$, 则公比为 (　　).

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

12. (2015 新课标全国 Ⅱ 卷文 9) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{4}$, $a_3a_5=4(a_4-1)$, 则 $a_2=($　　$)$.

A. 2　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{8}$

6.3.3 中档题

1. (2014 大纲卷理 10) 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4=2$, $a_5=5$, 则数列 $\{\lg a_n\}$ 的前 8 项和等于 (　　).

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

2. (2021 新课标全国甲卷文 9) 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_2=4$, $S_4=6$, 则 $S_6=($　　$)$.

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

3. (人教 A 版选择性必修第二册 P37 练习 T4 改编) 已知三个数成等比数列, 它们的和为 14, 积等于 64, 则这个等比数列的公比 $q=$ ______.

4. (人教 A 版选择性必修第二册 P36 例 8 改编) 已知等比数列的首项为 -1, 前 n 项和为 S_n, 若 $\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{31}{32}$, 则公比 $q=$ ______.

5. (2020 新课标全国 Ⅱ 卷理 6) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2, a_{m+n}=a_ma_n$, 若 $a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}+\cdots+a_{k+10}=2^{15}-2^5$, 则 $k=($ $)$.

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

6. (人教 A 版选择性必修第二册 P41 习题 4.3T8 改编) 若数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$, 且满足 $a_{n+1}=2a_n+1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ______.

7. (2012 大纲卷文 6) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=1$, $S_n=2a_{n+1}$, 则 $S_n=($ $)$.

A. 2^{n-1} B. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

C. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ D. $\dfrac{1}{2^{n-1}}$

8. (2016 新课标全国 I 卷理 15) 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3=10$, $a_2+a_4=5$, 则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值为 ______.

9. (2018 新课标全国 I 卷理 15) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n=2a_n+1$, 则 $S_6=$ ______.

10. (2006 辽宁卷理 9) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, 前 n 项和为 S_n, 若数列 $\{a_n+1\}$ 也是等比数列, 则 S_n 等于 ( ).

A. $2^{n+1}-2$ B. $3n$

C. $2n$ D. 3^n-1

11. (2020 新课标全国 Ⅲ 卷文 17) 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=4$, $a_3-a_1=8$.

(Ⅰ) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 记 S_n 为数列 $\{\log_3 a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$, 求 m.

12. (2019 新课标全国 Ⅱ 卷理 19) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1, b_1=0, 4a_{n+1}=3a_n-b_n+4, 4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$.

(Ⅰ) 证明:$\{a_n+b_n\}$ 是等比数列, $\{a_n-b_n\}$ 是等差数列;

(Ⅱ) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

6.4 专题突破 数列求和

6.4.1 知识逐点夯实

1. 公式法

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$. 推导方法: 倒序相加法.

(2) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \begin{cases} na_1, & q=1 \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1 \end{cases}$. 推导方法: 错位相减法.

2. 分组求和法与并项求和法

(1) 若一个数列是由若干个等差数列或等比数列或可求和的数列组成, 则求和时可用分组求和法, 分别求和后相加减.

(2) 形如 $a_n = (-1)^n \cdot f(n)$ 类型, 常采用两项合并求解的方法.

3. 裂项相消法

把数列的通项拆成两项之差, 在求和时中间的一些项可以相互抵消, 从而求得其和.

4. 错位相减法

如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的, 那么这个数列的前 n 项和即可用此法来求, 如等比数列的前 n 项和公式就是用此法推导的.

5. 常用性质与结论

(1) $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$;

(2) $\dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$;

(3) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$;

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

6.4.2 基础题

1. (2021 新高考全国 Ⅱ 卷 17) 记 S_n 是公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3 = S_5$, $a_2a_4 = S_4$.

(Ⅰ) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n;

(Ⅱ) 求使 $S_n > a_n$ 成立的 n 的最小值.

2. (2018 新课标全国 Ⅲ 卷理 17) 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_5 = 4a_3$.

(Ⅰ) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_m = 63$, 求 m.

3. (2017 新课标全国 Ⅲ 卷文 17) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \cdots + (2n-1)a_n = 2n$.

(Ⅰ) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和.

4. (2011 新课标全国卷理 17) 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $2a_1 + 3a_2 = 1$, $a_3^2 = 9a_2a_6$.

(Ⅰ) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 设 $b_n = \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_n$, 求数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和.

5. (2014 北京卷文 15) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 满足 $a_1 = 3$, $a_4 = 12$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 4$, $b_4 = 20$, 且 $\{b_n - a_n\}$ 为等比数列.

(Ⅰ) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

6. (2014 大纲卷文 17) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$.

(Ⅰ) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 证明 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(Ⅱ) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

7. (2017 新课标全国 Ⅰ 卷文 17) 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_2 = 2$, $S_3 = -6$.

(Ⅰ) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 求 S_n, 并判断 S_{n+1}, S_n, S_{n+2} 是否成等差数列.

8. (2012 大纲卷文 18) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 前 n 项和 $S_n = \dfrac{n+2}{3}a_n$.

(Ⅰ) 求 a_2, a_3;

(Ⅱ) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

6.4.3　中档题

1. (2021 新高考全国 Ⅰ 卷 17)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, & n\text{为奇数} \\ a_n + 2, & n\text{为偶数} \end{cases}$.

(Ⅰ) 记 $b_n = a_{2n}$, 写出 b_1, b_2, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和.

2. (2014 大纲卷理 18) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1 = 10, a_2$ 为整数, 且 $S_n \leqslant S_4$.

(Ⅰ) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 设 $b_n = \dfrac{1}{a_na_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

3. (2014 新课标全国 I 卷文 17) 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列, a_2, a_4 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和.

4. (2009 全国 Ⅱ 卷理 19) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $a_1=1$, $S_{n+1}=4a_n+2$.

(I) 设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$, 证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(Ⅱ) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

5. (2021 新课标全国乙卷文 19) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{na_n}{3}$. 已知 $a_1, 3a_2, 9a_3$ 成等差数列.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 记 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 证明:$T_n<\dfrac{S_n}{2}$.

6. (2011 大纲卷理 20) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$ 且 $\dfrac{1}{1-a_{n+1}}-\dfrac{1}{1-a_n}=1$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 设 $b_n=\dfrac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}$, S_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 证明: $S_n<1$.

7. (2010 新课标全国卷理 17) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_{n+1}-a_n=3\cdot 2^{2n-1}$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 令 $b_n=na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

8. (2014 山东卷理 19) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 前 n 项和为 S_n, 且 S_1, S_2, S_4 成等比数列.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 令 $b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{4n}{a_na_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.