# 选择、填空题

# 第1章 数学思想方法与选择、填空题解题技巧

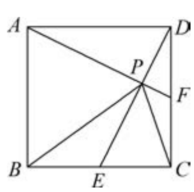
## 1.1 数学思想方法

### 一、函数与方程思想

函数思想的实质是抛开所研究对象的非数学特征，用联系和变化的观点提出数学对象，抽象其数学特征，建立各变量之间固有的函数关系，通过函数形式，利用函数的有关性质，使问题得到解决。方程思想是将所求的量设成未知数，用它表示问题中的其他各量，根据题中隐含的等量关系，列方程（组），通过解方程（组）或对方程（组）进行研究，以求得问题的解。函数与方程在一定条件下可以相互转化。

**典型例题**

**例 1** 如图，正方形 $ABCD$ 中，$E$，$F$ 均为中点，现有下列结论：①$AF\perp DE$；②$AD=BP$；③$PE+PF=\sqrt{2}PC$；④$PE+PF=PC$。其中正确的是（　　）。




A. ①④　　B. ①②④

C. ①③　　D. ①②③

**【解析】**

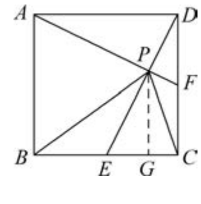
**【方法一】**

（1）设正方形 $ABCD$ 的边长为 $4x$，则 $AB=BC=CD=AD=4x$，$BE=CE=CF=DF=2x$。（此处也可以取特殊值代入计算，如取 $x=1$。）

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore \angle ADF=\angle DCE=90^\circ$。在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle DCE$ 中，$AD=DC$，$\angle ADF=\angle DCE$，$DF=CE$，$\therefore \triangle ADF\cong\triangle DCE$（SAS），$\therefore \angle AFD=\angle DEC$。

$\because \angle DEC+\angle CDE=90^\circ$，$\therefore \angle AFD+\angle CDE=90^\circ=\angle DPF$，$\therefore AF\perp DE$，故①正确。

（2）如图，过点 $P$ 作 $PG\perp BC$ 于点 $G$，则 $\angle PGE=90^\circ$，$\therefore \triangle PGE\backsim\triangle DCE$，$\therefore \dfrac{PG}{DC}=\dfrac{PE}{DE}=\dfrac{GE}{CE}$。



在 Rt△$ADF$ 中，$AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=2\sqrt{5}x$，∴$DE=2\sqrt{5}x$，∴$DP=\frac{4\sqrt{5}}{5}x$，$AP=\frac{8\sqrt{5}}{5}x$，$PF=\frac{2}{5}\sqrt{5}x$，∴$PE=\frac{6}{5}\sqrt{5}x$，∴$\frac{PG}{4x}=\frac{\frac{6}{5}\sqrt{5}x}{2\sqrt{5}x}=\frac{GE}{2x}$，∴$PG=\frac{12}{5}x$，$GE=\frac{6}{5}x$，∴$BG=BE+GE=\frac{16}{5}x$。

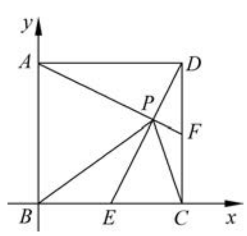
在 Rt△$BPG$ 中，$BP=\sqrt{BG^2+PG^2}=4x=AD$，故②正确。

(3) 在 Rt△$PCG$ 中，$PC=\sqrt{CG^2+PG^2}=\frac{4}{5}\sqrt{10}x$，∴$PE+PF=\frac{8}{5}\sqrt{5}x=\frac{4}{5}\sqrt{10}x\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}PC$，故③正确，④错误。

故答案为：D。

**【方法二】**

(1) 如图，以点 $B$ 为坐标原点，以 $AB$ 所在的直线为 $y$ 轴，$BC$ 所在的直线为 $x$ 轴，建立平面直角坐标系。




设正方形 $ABCD$ 的边长 $AB=BC=CD=AD=a$，则点 $A(0,a)$，$B(0,0)$，$C(a,0)$，$D(a,a)$。

∵$E$，$F$ 均为中点，∴$E\left(\frac{a}{2},0\right)$，$F\left(a,\frac{a}{2}\right)$。

设直线 $AF$ 的函数解析式为 $y=kx+b$，代入点 $A$，$F$ 的坐标，得$\begin{cases}b=a\\ak+b=\frac{a}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{2}\\b=a\end{cases}$，∴$y=-\frac{1}{2}x+a$。

同理可得，直线 $DE$ 的函数解析式为 $y=2x-a$。

$k_{AF}\cdot k_{DE}=-\frac{1}{2}\times2=-1$，∴$AF\perp DE$，故①正确。

(2) 由$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+a\\y=2x-a\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\frac{4}{5}a\\y=\frac{3}{5}a\end{cases}$，

∴点 $P$ 的坐标为$\left(\frac{4}{5}a,\frac{3}{5}a\right)$，∴$BP=a=AD$，故②正确。

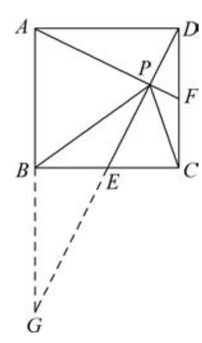
(3) $PE=\frac{3}{10}\sqrt{5}a$，$PF=\frac{1}{10}\sqrt{5}a$，$PC=\frac{1}{5}\sqrt{10}a$，∴$PE+PF=\frac{2}{5}\sqrt{5}a=\frac{1}{5}\sqrt{10}a\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}PC$，故③正确，④错误。

故答案为：D。

**【方法三】**

(1) 解法同**【方法一】**(1)。

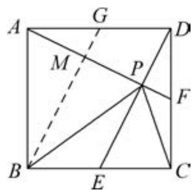
(2) 如图，分别延长 $AB$，$DE$ 交于点 $G$。∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$\angle ABC=\angle GBC=\angle BCD=90^\circ$，$AB=CD=AD$。




∵$E$ 是 $BC$ 的中点，∴$BE=CE$。

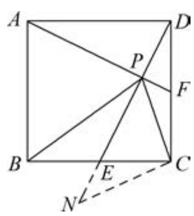
又∵$\angle BEG=\angle CED$，∴△$BEG$≌△$CED$(ASA)，∴$BG=CD=AB$，即 $B$ 是 $AG$ 的中点，由(1)得 $AF\perp DE$，∴$BP=AB=AD$，故②正确。

（另解） 如图，过点 $B$ 作 $BG/\!/DE$ 交 $AD$ 于点 $G$，交 $AP$ 于点 $M$。




$\because AF\perp DE$，$BG/\!/DE$，$E$ 是 $BC$ 的中点，$\therefore BG\perp AP$，$G$ 是 $AD$ 的中点，$\therefore BG$ 是 $AP$ 的垂直平分线，$\therefore \triangle ABP$ 是等腰三角形，$\therefore BP=AB=AD$，故②正确。

（3）如图，延长 $DE$ 至点 $N$，使得 $EN=FP$，连接 $CN$。




$\because \angle AFD=\angle DEC$，$\therefore \angle CEN=\angle CFP$。

$\because E$，$F$ 分别是 $BC$，$DC$ 的中点，$\therefore CE=CF$。

$\because$ 在 $\triangle CEN$ 和 $\triangle CFP$ 中，$CE=CF$，$\angle CEN=\angle CFP$，$EN=FP$，$\therefore \triangle CEN\cong\triangle CFP$(SAS)，$\therefore CN=CP$，$\angle ECN=\angle PCF$。

$\because \angle PCF+\angle BCP=90^\circ$，$\therefore \angle ECN+\angle BCP=\angle NCP=90^\circ$，$\therefore \triangle NCP$ 是等腰直角三角形，$\therefore PN=PE+NE=PE+PF=\sqrt{2}PC$。

故③正确，④错误。

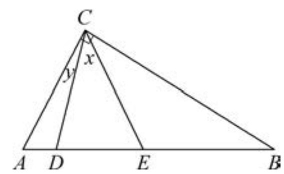
综上所述，①②③正确。

故答案为：D。

**【总结】** 与几何法相比，利用函数与方程思想可以使得解题思路更加简单、直接。

可以发现几何法难想易算，函数与方程的方法易想难算。

**例 2** 如图，在 Rt$\triangle ACB$ 中，$D$，$E$ 为斜边 $AB$ 上的两个点，且 $BD=BC$，$AE=AC$，则 $\angle DCE$ 的大小为________。




**【解析】**

设 $\angle DCE=x$，$\angle ACD=y$，则 $\angle ACE=x+y$。

$\because AE=AC$，$\therefore \angle ACE=\angle AEC=x+y$。

$\because BD=BC$，$\therefore \angle BDC=\angle BCD=\angle BCA-y=90^\circ-y$。

在 $\triangle DCE$ 中，$\because \angle DCE+\angle CDE+\angle DEC=180^\circ$，$\therefore x+(90^\circ-y)+(x+y)=180^\circ$，解得 $x=45^\circ$，$\therefore \angle DCE=45^\circ$。

故答案为：$45^\circ$。

## 二、数形结合思想

数形结合思想就是根据数与形之间的对应关系，通过数与形的相互转化解决数学问题的思想，包含“以形助数”和“以数辅形”两个方面。其中“以形助数”是指借助形的生动性和直观性阐明数之间的联系，即以形作为手段，以数作为目的。“以数辅形”是指借助数的精确性和严密性阐明形的某些属性，即以数作为手段，以形作为目的。

## 典型例题

**例 3** 关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2-3x-1=0$ 的两个不相等的实数根都在 $-1$ 和 $0$ 之间(不包括 $-1$ 和 $0$)，则 $a$ 的取值范围是________。

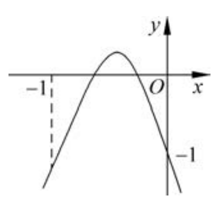
**【解析】**

**【方法一】**

∵关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2-3x-1=0$ 有两个不相等的实数根，∴$\Delta=b^2-4ac=9+4a>0$，∴$a>-\frac{9}{4}$。

设二次函数为 $y=ax^2-3x-1$。

∵方程 $ax^2-3x-1=0$ 的两个不相等的实数根都在 $-1$ 和 $0$ 之间(不包括 $-1$ 和 $0$)，∴$x_1x_2=-\frac{1}{a}>0$，∴$a<0$，∴二次函数 $y=ax^2-3x-1$ 的图象如图所示。




当 $x=-1$ 时，$y=a+3-1<0$，即 $a<-2$，∴$a$ 的取值范围是 $-\frac{9}{4}<a<-2$。

故答案为：$-\frac{9}{4}<a<-2$。

**【方法二】**

∵关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2-3x-1=0$ 有两个不相等的实数根，∴$\Delta=b^2-4ac=9+4a>0$，∴$a>-\frac{9}{4}$。

∵方程 $ax^2-3x-1=0$ 的两个不相等的实数根都在 $-1$ 和 $0$ 之间(不包括 $-1$ 和 $0$)，∴$x_1x_2=-\frac{1}{a}>0$，∴$a<0$。

设 $-1<x_1<x_2<0$，∴$x_1=\frac{3+\sqrt{9+4a}}{2a}>-1$，$x_2=\frac{3-\sqrt{9+4a}}{2a}<0$，解得 $a<-2$。

综上，$a$ 的取值范围是 $-\frac{9}{4}<a<-2$。

故答案为：$-\frac{9}{4}<a<-2$。

**【总结】** 根据一元二次方程与二次函数之间的关系，使用图象法可以快速解决此类问题。

**例 4** “如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 $x$ 轴有两个公共点，那么一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根。”请根据你对这句话的理解，解决下面的问题：若 $m,n(m<n)$ 是关于 $x$ 的方程 $1-(x-a)(x-b)=0$ 的两个根，且 $a<b$，则 $a,b,m,n$ 的大小关系是(　　)。

A. $m<a<b<n$　　B. $a<m<n<b$

C. $a<m<b<n$　　D. $m<a<n<b$

**【解析】**

**【方法一】**

方程可化简为 $x^2-(a+b)x+ab-1=0$。

根据求根公式得：

$$x=\frac{(a+b)\pm\sqrt{(a-b)^2+4}}{2},$$

即 $m=\frac{(a+b)-\sqrt{(a-b)^2+4}}{2}$，

$n=\frac{(a+b)+\sqrt{(a-b)^2+4}}{2}$。

∵$a<b$，∴$a=\frac{(a+b)-\sqrt{(a-b)^2}}{2}$，$b=\frac{(a+b)+\sqrt{(a-b)^2}}{2}$，∴ $a<\frac{a+b}{2}<b$，

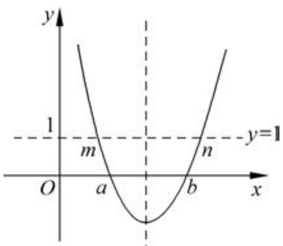
$$\frac{(a+b)-\sqrt{(a-b)^2+4}}{2}<\frac{(a+b)-\sqrt{(a-b)^2}}{2}<\frac{a+b}{2}<\frac{(a+b)+\sqrt{(a-b)^2}}{2}<\frac{(a+b)+\sqrt{(a-b)^2+4}}{2},$$

$\therefore m<a<b<n$。

故答案为：A。

**【方法二】**

依题意，画出二次函数 $y=(x-a)(x-b)$ 的图象，如图所示。




函数图象为抛物线，开口向上，与 $x$ 轴两个交点的横坐标分别为 $a$，$b(a<b)$。

方程 $1-(x-a)(x-b)=0$ 转化为 $(x-a)(x-b)=1$，方程的两个根是抛物线 $y=(x-a)(x-b)$ 与直线 $y=1$ 的两个交点。

由 $m<n$ 可知，对称轴左侧交点横坐标为 $m$，右侧交点横坐标为 $n$。

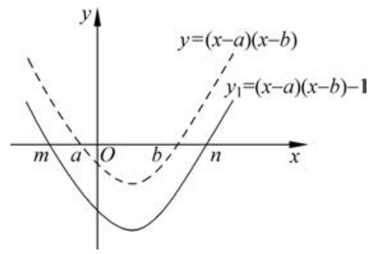
由抛物线开口向上知，在对称轴左侧，$y$ 随 $x$ 增大而减小，则有 $m<a$；在对称轴右侧，$y$ 随 $x$ 增大而增大，则有 $b<n$。

综上所述，可知 $m<a<b<n$。

故答案为：A。

**【方法三】**

依题意，画出二次函数 $y=(x-a)(x-b)$ 的图象，如图所示，该二次函数与 $x$ 轴的两个交点的坐标分别为 $(a,0)$ 和 $(b,0)$，其中 $a<b$。




将二次函数 $y=(x-a)(x-b)$ 的图象向下平移 1 个单位，得到新二次函数的解析式为 $y_1=(x-a)(x-b)-1$，这时，新二次函数与 $x$ 轴的两个交点的坐标分别为 $(m,0)$ 和 $(n,0)$，其中 $m<n$，易得 $m<a<b<n$。

故答案为：A。

**【方法四】**

依题意，令 $a=0$，$b=1$，则原方程可转化为 $1-x(x-1)=0$，即 $x^2-x-1=0$，解得 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。

$\because m<n$，$\therefore m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$，$n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$，

$\therefore m<a<b<n$。

故答案为：A。

## 三、分类与整合思想

在解决某些数学问题且被研究的问题包含多种情况时，必须抓住主导问题发展方向的主要因素，在其变化范围内，根据问题的不同发展方向将其划分为若干部分分别研究。这里集中体现的是由大化小、由整体化为部分、由一般化为特殊的解决问题的方法，其研究的基本方向是“分”，但分类解决问题之后，还必须把它们整合在一起。这种“合—分—合”的解决问题的思想就是分类与整合思想。

## 典型例题

**例 5** 点 $A,B,C$ 在同一条数轴上，其中点 $A,B$ 表示的数分别为 $-3,1$，若 $BC=2$，则 $AC$ 等于(　　)。

A. 3　　B. 2

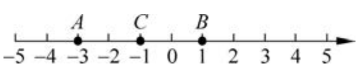
C. 3 或 5　　D. 2 或 6

**【解析】**

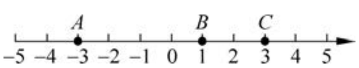
根据题意画图时会出现两种情况，即点 $C$ 在线段 $AB$ 内，点 $C$ 在线段 $AB$ 外，所以要分两种情况计算。

点 $A,B$ 表示的数分别为 $-3,1$，$AB=4$。

第一种情况：点 $C$ 在 $AB$ 内，如图所示，$AC=4-2=2$。



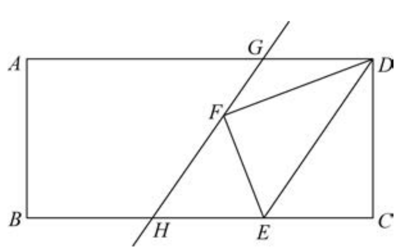

第二种情况：点 $C$ 在 $AB$ 外，如图所示，$AC=4+2=6$。




故答案为：D。

**【总结】** 题目没有给出图形，需要注意分类情况。

**例 6** (2022·盘锦)如图，四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB=\sqrt{2}$，$AD=3$，点 $E$ 为边 $BC$ 上一点，将$\triangle DCE$ 沿 $DE$ 翻折，点 $C$ 的对应点为点 $F$，过点 $F$ 作 $DE$ 的平行线交 $AD$ 于点 $G$，交直线 $BC$ 于点 $H$。若点 $G$ 是边 $AD$ 的三等分点，则 $FG$ 的长是________。




**【解析】**

① 如图，当 $GD=\frac{1}{3}AD$ 时，过点 $E$ 作 $EM\perp GH$ 于点 $M$，则$\angle EMG=\angle EMH=90^\circ$，$\therefore \angle FEM+\angle FED=90^\circ$，$\therefore \angle CED+\angle HEM=90^\circ$。

$\because DE/\!/GH$，$AD/\!/BC$，$\therefore$ 四边形 $HEDG$ 是平行四边形，$\angle MED=\angle EMG=90^\circ$。

$\because AD=3$，点 $G$ 是边 $AD$ 的三等分点，$\therefore HE=GD=\frac{1}{3}AD=1$。

$\because$ 将$\triangle DCE$ 沿 $DE$ 翻折，$\therefore EF=EC$，$\angle FED=\angle CED$，$\therefore \angle HEM=\angle FEM$。

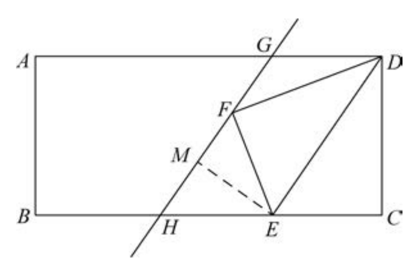
$\because ME=ME$，$\therefore \triangle HEM\cong\triangle FEM$(ASA)，$\therefore HM=MF$，$EC=EF=HE=1$。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=\sqrt{2}$，$\therefore \angle C=90^\circ$，$DC=AB=\sqrt{2}$。

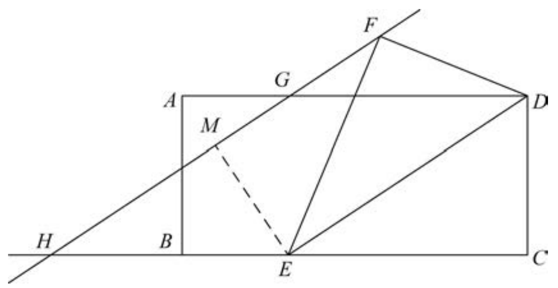
$\text{Rt}\triangle EDC$ 中，$DE=\sqrt{DC^2+EC^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$，$\therefore GH=DE=\sqrt{3}$。

$\because ME\perp HG$，$DE/\!/GH$，$\therefore \frac{1}{2}ME\cdot DE=S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}DC\cdot EC$，$\therefore ME=\frac{DC\times EC}{DE}=\frac{\sqrt{2}\times 1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$。

$\text{Rt}\triangle HME$ 中，$HM=\sqrt{HE^2-ME^2}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore FG=HG-HF=HG-2HM=\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。




② 如图，当 $AG=\frac{1}{3}AD=1$ 时，过点 $E$ 作 $EM\perp GH$ 于点 $M$，则$\angle EMG=\angle EMH=90^\circ$。




同理可得 $HE=GD=AD-AG=3-1=2$，$EC=EF=HE=2$，$\therefore DE=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，$\therefore ME=\dfrac{DC\times EC}{DE}=\dfrac{\sqrt{2}\times 2}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。

$\text{Rt}\triangle HME$ 中，$HM=\sqrt{HE^2-ME^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，$\therefore FG=HF-HG=2HM-HG=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}-\sqrt{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。

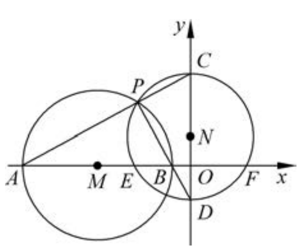
故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$或$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。

## 四、特殊与一般思想

人们对一类新事物的认识往往是通过对某些个体的认识与研究，逐渐积累对这类事物的了解，从而形成对这类事物总体的认识。这种认识事物的过程是由特殊到一般的认识过程。但这并不是目的，还需要用理论指导实践，用所得到的特点和规律解决这类事物中的新问题。这种认识事物的过程是由一般到特殊的认识过程。于是这种由特殊到一般再由一般到特殊反复认识的过程，就是人们认识世界的基本过程之一。数学研究也不例外，这种由特殊到一般与由一般到特殊的研究数学问题的思想，就是数学研究中的特殊与一般思想。

### 典型例题

**例 7** 如图，以 $M(-5,0)$ 为圆心、4 为半径的圆与 $x$ 轴交于 $A$，$B$ 两点，$P$ 是 $\odot M$ 上异于点 $A$，$B$ 的一个动点，直线 $PA$，$PB$ 分别交 $y$ 轴于点 $C$，$D$，以 $CD$ 为直径的 $\odot N$ 与 $x$ 轴交于点 $E$，$F$，则 $EF$ 的长（　　）。



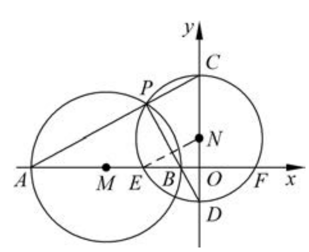

A. 等于 $4\sqrt{2}$　　B. 等于 $4\sqrt{3}$

C. 等于 6　　D. 随 $P$ 点

**【解析】**

**【方法一】**

如图，连接 $NE$。




设$\angle PAB=30°$，则$\angle ACO=\angle PBA=60°$。

$\because \odot M$ 的半径为 4，圆心为 $M(-5,0)$，$\therefore AB=8$，$A(-9,0)$，$B(-1,0)$，$\therefore PB=\dfrac{1}{2}AB=4$，$PA=4\sqrt{3}$，$AO=9$，$\therefore OC=3\sqrt{3}$，$AC=2OC=6\sqrt{3}$，$PC=AC-PA=2\sqrt{3}$，

$\therefore CD=2PC=4\sqrt{3}$，$\odot N$ 的半径为 $2\sqrt{3}$，$\therefore ON=OC-NC=\sqrt{3}$，$\therefore EF=2OE=6$。

设 $\angle PAB=45°$ 时，同理可得 $EF=6$。

故答案为：C。

**【方法二】**

如图，连接 $NE$。

设 $\odot N$ 半径为 $r$，$ON=x$，则 $OD=r-x$，$OC=r+x$。

$\because$ 以点 $M(-5,0)$ 为圆心、4 为半径的圆与 $x$ 轴交于 $A$，$B$ 两点，$\therefore OA=4+5=9$，$OB=5-4=1$。

$\because AB$ 是 $\odot M$ 的直径，$\therefore \angle APB=90°$，$\therefore \angle PAB+\angle PBA=90°$。

$\because \angle BOD=90°$，$\therefore \angle ODB+\angle OBD=90°$。

$\because \angle PBA=\angle OBD$，$\therefore \angle PAB=\angle ODB$。

又 $\because \angle AOC=\angle BOD=90°$，$\therefore \triangle OBD\backsim\triangle OCA$，$\therefore \dfrac{OC}{OB}=\dfrac{OA}{OD}$，即 $\dfrac{r+x}{1}=\dfrac{9}{r-x}$，解得 $r^2-x^2=9$。

由垂径定理得 $OE=OF$，$OE^2=EN^2-ON^2=r^2-x^2=9$，即 $OE=OF=3$，$\therefore EF=2OE=6$。

故答案为：C。

**【总结】** 代入特殊角度，或者直接设未知数都可以获得正确答案。

**例 8** 已知 $a,b,c,d$ 都是正实数，且 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$，给出下列四个不等式：① $\dfrac{a}{a+b}<\dfrac{c}{c+d}$；② $\dfrac{c}{c+d}<\dfrac{a}{a+b}$；③ $\dfrac{d}{c+d}<\dfrac{b}{a+b}$；④ $\dfrac{b}{a+b}<\dfrac{d}{c+d}$。

其中不等式正确的是(　　)。

A. ①③　　B. ①④

C. ②④　　D. ②③

**【解析】**

**【方法一】**

$\because a,b,c,d$ 都是正实数，且 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$，$\therefore$ 令 $a=1,b=2,c=3,d=4$，则 $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{21}<\dfrac{9}{21}=\dfrac{3}{7}=\dfrac{c}{c+d}$，$\therefore$ ①正确，②不正确。

同理可得：③正确，④不正确。

故答案为：A。

**【方法二】**

$\because a,b,c,d$ 都是正实数，且 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$，$\therefore \dfrac{b}{a}>\dfrac{d}{c}$。

$\because \dfrac{a+b}{a}=1+\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{c+d}{c}=1+\dfrac{d}{c}$，$\therefore \dfrac{a+b}{a}>\dfrac{c+d}{c}$，$\therefore \dfrac{a}{a+b}<\dfrac{c}{c+d}$，$\therefore$ ①正确，②不正确。

同理可得：③正确，④不正确。

故答案为：A。

**【方法三】**

$\because \dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$，$a,b,c,d$ 都是正实数，$\therefore ad<bc$，$\therefore ac+ad<ac+bc$，即 $\dfrac{a}{a+b}<\dfrac{c}{c+d}$，$\therefore$ ①正确，②不正确。

$\because \dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$，$a,b,c,d$ 都是正实数，$\therefore ad<bc$，$\therefore bd+ad<bd+bc$，即 $\dfrac{d}{c+d}<\dfrac{b}{a+b}$，$\therefore$ ③正确，④不正确。

故答案为：A。

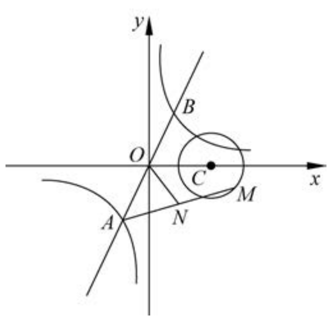
**【总结】** 本题解答方法多样，根据 $a,b,c,d$ 都是正实数，可以采用特值法，方便快捷地得到正确答案。

## 五、化归与转化思想

化归与转化思想是指在研究解决数学问题时，采用某种手段将问题通过变换使之转化，进而使问题得到解决的一种解题策略。数学题中的条件与条件、条件与结论之间存在着差异，差异即矛盾，解题过程就是有目的地不断转化矛盾，最终解决矛盾的过程。

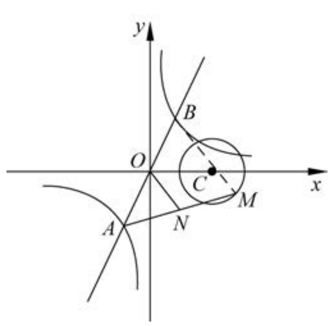
### 典型例题

**例 9** (2021·柳州)如图，一次函数 $y=2x$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图象交于 $A,B$ 两点，点 $M$ 在以 $C(2,0)$ 为圆心、半径为 1 的⊙$C$ 上，$N$ 是 $AM$ 的中点，已知 $ON$ 长的最大值为 $\frac{3}{2}$，则 $k$ 的值是________。




**【解析】**

如图，连接 $BM$。




联立 $\begin{cases} y=\frac{k}{x} \\ y=2x \end{cases}$，$\therefore x^2=\frac{k}{2}$，$\therefore x=\pm\sqrt{\frac{k}{2}}$，

$\therefore A\left(-\sqrt{\frac{k}{2}},-2\sqrt{\frac{k}{2}}\right)$，$B\left(\sqrt{\frac{k}{2}},2\sqrt{\frac{k}{2}}\right)$，

∴点 $A$ 与点 $B$ 关于原点 $O$ 对称，∴$O$ 是线段 $AB$ 的中点。

∵$N$ 是线段 $AM$ 的中点，∴$ON /\!/ BM$，且 $ON=\frac{1}{2}BM$。

∵$ON$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$，∴$BM$ 的最大值为 3。

∵$M$ 在⊙$C$ 上运动，∴当 $B,C,M$ 三点共线时，$BM$ 最大，此时 $BC=BM-CM=2$，即 $\left(\sqrt{\frac{k}{2}}-2\right)^2+\left(2\sqrt{\frac{k}{2}}\right)^2=4$，解得 $k=0$ 或 $k=\frac{32}{25}$。

∵$k>0$，∴$k=\frac{32}{25}$。

故答案为：$\frac{32}{25}$。

**例 10** 一个走廊拐角的横截面积如图所示，已知 $AB\perp BC$，$AB /\!/ DE$，$BC /\!/ FG$，且两组平行墙壁间的走廊宽度都是 1m，$\overset{\frown}{EF}$ 的圆心为点 $O$，半径为 1m，且 $\angle EOF=90^\circ$，$DE$，$FG$ 分别与⊙$O$ 相切于 $E$，$F$ 两点。若水平放置的木棒 $MN$ 的两个端点 $M$，$N$ 分别在 $AB$ 和 $BC$ 上，且 $MN$ 与⊙$O$ 相切于点 $P$，$P$ 是 $\overset{\frown}{EF}$ 的中点，则木棒 $MN$ 的长度为________ m。