

第一章 函数与极限

高等数学课程的主要内容是微积分学及其应用。在微积分学,函数是研究对象,连续是研究桥梁,极限是重要的研究方法。因此,极限是微积分学的基础,也是主要的推理方法。本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质。

第一节



数

一、集合的概念

1. 集合的定义及表示方法

集合是数学中的一个基本概念,是数学各分支所研究的对象。一般地,把具有某种特定性质的对象组成的总体叫做集合,简称集。把组成某一集合的各个对象叫做这个集合的元素,简称元。例如,一间工厂里的工人构成一个集合,而每个工人都是这个集合的元素。

通常,用大写英文字母 A, B, C 等表示集合,用小写英文字母 a, b, c 等表示集合中的元素。对象 a 是集合 M 的元素记作 $a \in M$ (读作 a 属于 M); 对象 a 不是集合 M 的元素记作 $a \notin M$ (读作 a 不属于 M)。

由有限个元素组成的集合称为有限集,由无穷多个元素组成的集合称为无限集。集合的表示方法通常有列举法和描述法两种。对于列举法,由元素 a, b, c 组成的集合,可记作

$$M = \{a, b, c\}$$

对于描述法,设集合 A 是具有某种特性的元素 x 的全体组成的集合,则 A 可表示成

$$A = \{x \mid x \text{ 所具有的特性}\}$$

注:本书用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合。如无特别声明,以后提到的数都是实数。

将自然数集记作 $\mathbf{N}$, 整数集记作 $\mathbf{Z}$, 有理数集记作 $\mathbf{Q}$, 实数集记作 $\mathbf{R}$ 。

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即“如果 $x \in A$, 则必有 $x \in B$ ”, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$; 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称集合 A 与 B 相等, 记作 $A = B$ 。不含任何元素的集合称为空集, 记为 $\varnothing$, 规定空集为任何集合的子集。

2. 区间

区间也是数集。设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$, 则称满足 $a < x < b$ 的实数 x 的集合为开区间, 记作 (a, b) ; 称满足 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合为闭区间, 记作 $[a, b]$; 称满足 $a < x \leq b$

或 $a \leq x < b$ 的实数 x 的集合为半开区间, 分别记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 。以上区间都称为有限区间, a, b 称为区间的端点, $b-a$ 称为区间的长度。在数轴上, 区间的端点用空心的圆点表示时, 表示该区间不包括端点; 用实心圆点表示时, 表示该区间包括端点 (见图 1-1)。

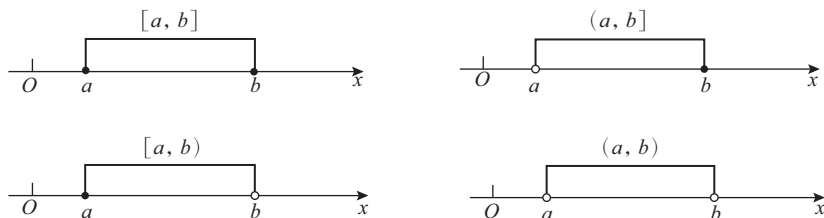


图 1-1

满足 $x \geq a$ 和 $x \leq b$ 的实数 x 的集合称为无限半开区间, 分别记为 $[a, +\infty)$ 和 $(-\infty, b]$; 满足 $x > a$ 和 $x < b$ 的实数 x 的集合称为无限开区间, 记为 $(a, +\infty)$ 和 $(-\infty, b)$ 。在数轴上, 无限半开区间和无限开区间可用长度为无限的射线表示 (见图 1-2)。



图 1-2

全体实数的集合记作 $(-\infty, +\infty)$, 它是无限区间。

3. 邻域

对任意的正数 δ , 开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域, 简称为点 a 的邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径。

数集 $U(a, \delta) - \{a\}$ (即点 a 的 δ 邻域去掉中心 a) 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

二、函数的定义

在观察某一现象的过程中, 常常会遇到各种不同的量, 这些量一般可分为两种: 一种量在过程中是不变化的, 即在过程中始终保持一定的数值, 称为常量; 另一种量在过程中是变化的, 也就是可以取不同的数值, 称为变量。

通常, 用字母 a, b, c 等表示常量, 用字母 x, y, z, t 等表示变量。

在自然界中, 某一现象中的各种变量通常不都是独立变化的, 它们之间存在着依赖关系。

例如, 某种商品的销售单价为 p 元, 则其销售额 R 与销售量 x 之间存在依赖关系, 即 $R = px$ 。又如, 圆的面积 S 和半径 r 之间存在依赖关系, 即 $S = \pi r^2$ 。

不考虑上面两个例子中量的实际意义, 它们都给出了两个变量之间的相互依赖关系,

这种关系是一种对应法则,根据这一法则,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量就有确定的值与之对应,两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质。

现实生活中普遍存在着不断运动变化的变量,高等数学则正是研究变量的数学,对这些变量进行研究就抽象出了函数的概念。

定义 1-1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集,如果对于 D 中的每一个数 x ,按照某种确定的法则 f ,变量 y 都有唯一确定的值与它对应,则称对应法则 f 是定义在数集 D 上的一个函数,其中 D 称为函数的定义域。

对于每一个 $x \in D$,对应的 y 称为函数 f 在 x 处的值,简称函数值,记为 $y = f(x)$ 。由于我们通过函数值来研究函数,所以也称 $y = f(x)$ 是 x 的函数, x 称为自变量, y 称为因变量。当 x 取遍 D 的所有数值时,对应的函数值的全体组成的数集为

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

该数集称为函数的值域。

定义域和对应法则是函数概念的两个要素,也是判别两个函数是否是相同函数的关键。在实际问题中,函数的定义域需要根据问题的实际意义来确定,而对于用解析式给出的函数,其定义域是使解析式有意义的自变量的一切实数值所组成的集合。例如,函数 $y = \sqrt{x-1}$ 的定义域是区间 $[1, +\infty)$, 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域是 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 。

下面举几个函数的例子。

【例 1-1】 常数函数 $y = C$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{C\}$, 它的图形是一条平行于 x 轴的直线(见图 1-3)。

【例 1-2】 绝对值函数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = [0, +\infty)$ (见图 1-4)。

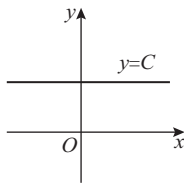


图 1-3

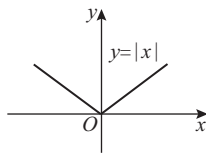


图 1-4

【例 1-3】 符号函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{-1, 0, 1\}$ (见图 1-5)。对于任何实数 x , 下列关系成立:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

【例 1-4】 取整函数

$$f(x) = [x]$$

其中, x 为任一实数, $[x]$ 为 x 的整数部分, 即不超过 x 的最大整数。它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为整数集 $\mathbf{Z}$ (见图 1-6)。在 x 的整数值处, 图形发生跳跃。

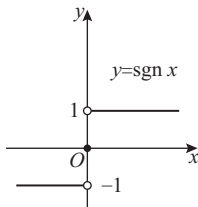


图 1-5

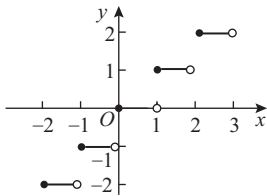


图 1-6

【例 1-5】 分段函数

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1, & |x| < 1 \\ \sin x, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$ 。当 $x \in (-1, 1)$ 时, 对应的函数值 $f(x) = 3x - 1$; 当 $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ 时, 对应的函数值 $f(x) = \sin x$ 。例如, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, $f(2) = \sin 2$ 。

例 1-2~例 1-5 中的函数都是用两个以上式子表示的, 这种在自变量的不同变化范围内, 因变量用不同的解析式来表示的函数称为分段函数。分段函数是经常出现的一种函数。

【例 1-6】 求 $y = \arcsin \frac{x-5}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域。

解 $\left| \frac{x-5}{5} \right| \leq 1$ 且 $25-x^2 > 0$, 即 $0 \leq x \leq 10$ 且 $-5 < x < 5$, 故定义域为 $[0, 5)$ 。

定义域是使函数有意义的自变量的集合。因此, 求函数定义域需注意以下几点。

- (1) 分母不等于 0。
- (2) 偶次根式被开方数大于或等于 0。
- (3) 对数的真数大于 0。
- (4) $y = x^0, x \neq 0$ 。
- (5) $y = \tan x, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ 等。

三、函数的表示方法

常用的函数的表示方法有以下三种。

1. 列表法

在实际应用中, 常把所考虑的函数的自变量的一些值与它们所对应的函数值列成一个表格, 这种表示函数的方法称为列表法, 如三角函数表、对数表等。列表法的优点是方便易懂。

2. 图形法

对于给定的函数 $y=f(x)$, 当自变量 x 在定义域 D 内变化时, 对应的函数值 y 也随之变化, 因此把坐标平面上的点集

$$\{P(x, y) \mid y=f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形。这种用坐标平面上的曲线表示函数的方法叫做图形法, 如指数曲线、对数曲线等。图形法的优点是直观性强, 函数的变化情况一目了然; 缺点是不够精确, 不便于做理论上的推导和运算。

3. 解析法

把两个变量之间的函数关系直接用数学式表示出来, 并注明函数的定义域, 这种表示函数的方法称为解析法, 如 $f(x)=\sin x$, $f(x)=2x-1$ 等。解析法的优点是便于理论分析和数值计算, 缺点是不够直观。

在研究具体问题时, 这三种方法可以结合使用。

四、函数的特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义。如果存在正数 M , 使得对于任意 $x \in I$, 都有

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 内有界。此时正数 M 称为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个界。如果不存在这样的正数 M , 则称函数 $f(x)$ 在 I 内无界。

例如, 正弦函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的。因为对于任意的 x 值, 都有 $|f(x)| = |\sin x| \leq 1$, 它的图形介于两条平行直线 $y=\pm 1$ 之间。而正切函数 $f(x)=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是无界的, 因为对于任意的正数 M , 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内不等式 $|\tan x| \leq M$ 都不能成立。

如果存在常数 M_1 , 使得对于任意 $x \in I$ 都有 $f(x) \leq M_1$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 有上界, 此时 M_1 称为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个上界; 如果存在常数 M_2 , 使得对于任意 $x \in I$ 都有 $f(x) \geq M_2$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 有下界, 此时 M_2 称为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个下界。

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内既有上界又有下界, 则称 $f(x)$ 在区间 I 内有界。

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若对任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的; 若对任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的。单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

例如, 函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的, 在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的, 但在 $(-\infty, +\infty)$ 内却不是单调函数。

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即如果 $x \in D$, 则 $-x \in D$)。如果对于任意 $x \in D$, 都有

$$f(-x) = f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果对于任意 $x \in D$, 都有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数。

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称。

例如, $f(x) = x^2$ 是偶函数, $f(x) = \sin x$ 是奇函数, $f(x) = 2^x$ 是非奇非偶函数。

【例 1-7】 讨论下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = \ln(1+x^2) + \frac{\sin x}{x}; (2) f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} (a > 0, a \neq 1); (3) f(x) = 3x^3 + 2.$$

解 (1) 该函数的定义域为 $x \neq 0$, 由于

$$f(-x) = \ln[1+(-x)^2] + \frac{\sin(-x)}{-x} = \ln(1+x^2) + \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

所以 $f(x) = \ln(1+x^2) + \frac{\sin x}{x}$ 为偶函数。

(2) 该函数的定义域为 $\mathbf{R}$, 由于

$$f(-x) = \frac{a^{-x} - a^x}{a^{-x} + a^x} = -\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = -f(x)$$

所以 $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ 为奇函数。

(3) 该函数的定义域为 $\mathbf{R}$, 由于

$$f(-x) = 3(-x)^3 + 2 = -3x^3 + 2$$

既不等于 $f(x)$, 也不等于 $-f(x)$, 所以 $f(x) = 3x^3 + 2$ 是非奇非偶函数。

4. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$, 如果存在一个正数 l , 使得对于定义域内的任意 x 值都有

$$f(x+l) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, l 叫做 $f(x)$ 的周期。满足这个等式的最小正数 l 称为周期函数的最小正周期。通常, 周期函数的周期是指最小正周期。

例如, 函数 $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数。

需要注意的是, 不是所有的周期函数都有最小正周期。例如, 常数函数是周期函数, 但它没有最小正周期。

周期函数的图形特点是在函数的定义域内, 每个长度为 l 的区间上, 函数的图形有相同的形状。所以画图时可以先作出长度为一个周期的区间上的图形, 再通过平移得到函数的图形。

五、反函数与复合函数

1. 反函数

函数 $y = f(x)$ 表示变量 y 随着 x 的变化而变化, 但在实际问题中, 有时却要反过来研

究 x 是怎样随着 y 的变化而变化的。例如,在自由落体运动过程中,距离 s 表示为时间 t 的函数 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 。在时间的变化范围中任意确定一个时刻 t_0 ,由上述公式就可得到相应的距离 $s_0 = \frac{1}{2}gt_0^2$ 。如果将问题反过来,即已知下落的距离 s ,求时间 t ,则有 $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ ($t \geq 0, g$ 为重力加速度),原来的因变量 s 成为自变量,原来的自变量 t 成为因变量。这样交换自变量和因变量的位置而得到的新函数 $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ 称为原函数 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 的反函数。

设 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W 。如果对于 $y = f(x)$ 值域 W 中的每个 y , 根据关系式 $y = f(x)$ 可以确定出 D 中唯一的 x 值与之对应, 则由此确定了一个新的函数, 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记作

$$x = f^{-1}(y)$$

这个函数的定义域为 W , 值域为 D , 相对于 $x = f^{-1}(y)$, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数。

由于习惯上经常用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 因此通常把 $x = f^{-1}(y)$ 中的自变量 y 改写成 x , 因变量 x 改写成 y , 这样 $y = f(x)$ 的反函数就写成了 $y = f^{-1}(x)$ 。

反函数是相互的, 即若 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 则 $y = f(x)$ 也是 $y = f^{-1}(x)$ 的反函数, 并且互为反函数的两个函数的图形关于直线 $y = x$ 对称。例如, 函数 $y = x^3$ 与它的反函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称。

什么样的函数存在反函数呢? 一般地, 有以下反函数存在性的充分条件: 若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义且在该区间上单调, 则它的反函数必存在。

例如, 函数 $y = \sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 显然在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $y = \sin x$ 不存在反函数, 但是如果我们仅在它的一个单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上考虑, 由反函数存在性的充分条件可知 $y = \sin x \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 存在反函数, 这个反函数即反正弦函数 $y = \arcsin x$, 其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。

类似地, $y = \cos x (x \in [0, \pi])$ 的反函数为反余弦函数 $y = \arccos x$, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$; $y = \tan x \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ 的反函数为反正切函数 $y = \arctan x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; $y = \cot x (x \in (0, \pi))$ 的反函数为反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, \pi)$ 。以上四种函数统称为反三角函数。

2. 复合函数

复合函数是比较常见的一类函数。例如, 某工厂生产某种产品, x 表示生产的原材料的收购量, u 表示生产量, y 表示上缴利润。若不考虑其他因素, 只研究这三者的关系, 显然, y 是 u 的函数, u 是 x 的函数, 对于每一个 x , 经过 u 总有一个 y 与之对应, 通过这种复合关系而构成的函数就是复合函数。

一般地, 如果变量 y 是变量 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 又是变量 x 的函数 $u = g(x)$, 且

$g(x)$ 函数值的全部或部分使 $f(u)$ 有定义, 则函数 $y=f[g(x)]$ 称为 x 的复合函数, x 称为自变量, u 称为中间变量. g 与 f 构成的复合函数 $f[g(x)]$ 的条件是函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须包含在 f 的定义域内, 否则不能构成复合函数。

例如, $y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$, $u=g(x)=2\sqrt{1-x^2}$ 在 $D=\left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ 上有定义, 且 $g(D) \subset [-1, 1]$, 则 g 与 f 可构成复合函数 $y=\arcsin 2\sqrt{1-x^2}$, $x \in D$ 。

但函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 不能构成复合函数, 因为对任意 $x \in \mathbf{R}$, $u=2+x^2$ 的值域均不在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 内。

对这种复合结构还可以加以推广, 如 $y=\cos u$, $u=\sin v$, $v=e^x+1$, 则复合函数为 $y=\cos(\sin(e^x+1))$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 。

【例 1-8】 指出下列函数是由哪些函数复合而成的:

(1) $y=\sin(\ln x)$; (2) $y=e^{\cos^2 x}$; (3) $y=\arcsin^2(2x-1)$ 。

解 (1) 函数 $y=\sin(\ln x)$ 是由函数 $y=\sin u$, $u=\ln x$ 复合而成的。

(2) 函数 $y=e^{\cos^2 x}$ 是由函数 $y=e^u$, $u=v^2$, $v=\cos x$ 复合而成的。

(3) 函数 $y=\arcsin^2(2x-1)$ 是由函数 $y=u^2$, $u=\arcsin v$, $v=2x-1$ 复合而成的。

六、基本初等函数

下列函数称为基本初等函数。

(1) 常数函数: $y=C$ (C 为常数)。

(2) 幂函数: $y=x^\mu$ (μ 是常数)。

(3) 指数函数: $y=a^x$ (a 是常数, $a>0$ 且 $a \neq 1$)。

(4) 对数函数: $y=\log_a x$ (a 是常数, $a>0$ 且 $a \neq 1$)。

(5) 三角函数: 正弦函数 $y=\sin x$; 余弦函数 $y=\cos x$; 正切函数 $y=\tan x$; 余切函数 $y=\cot x$ 。

(6) 反三角函数: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$ 。

这些基本初等函数的图形及其主要性质见附录 A。

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的复合步骤所构成, 并用一个式子表示的函数, 叫做初等函数; 否则就是非初等函数。

高等数学中所讨论的函数绝大多数是初等函数。分段函数大部分是非初等函数, 如符号函数(例 1-3)和取整函数(例 1-4)均为非初等函数, 而绝对值函数(例 1-2) $y=|x| =$

$\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 可表示为 $y=\sqrt{x^2}$, 故为初等函数。

七、极坐标系

平面直角坐标系是以一对实数来确定平面上一点的位置, 这是一种简单且常用的坐标系, 但不是唯一的坐标系。在实际问题中, 有时使用其他坐标系比较方便, 如炮兵射击时以

大炮为基点,利用目标的方向角及大炮的距离来确定目标的位置。下面就来介绍这种坐标系——极坐标系。

极坐标系对平面上的一点的位置也是用有序实数对来确定的,但这一对实数中,一个表示距离,另一个则表示方向。一般来说,取一个定点 O ,称为极点,作一水平射线 OX ,称为极轴,在 OX 上规定单位长度,这样就组成了一个极坐标系。平面上一点 P 的位置,可以由 OP 的长度及 $\angle XOP$ 的大小确定。具体地说,假设平面上有点 P ,连接 OP ,设 $OP = \rho$, $\angle XOP = \theta$ 。 ρ 和 θ 的值一旦确定,则 P 点的位置就唯一确定了。 ρ 叫做 P 点的极径, θ 叫做 P 点的极角, (ρ, θ) 叫做 P 点的极坐标(规定 ρ 写在前, θ 写在后)。由极径的意义可知 $\rho \geq 0$,当极角的取值范围是 $[0, 2\pi)$ 时,平面上的点(除去极点)就与极坐标 (ρ, θ) ($\rho \neq 0$) 建立一一对应的关系。

极坐标系与直角坐标系的关系如图 1-7 所示,将极坐标系的极点 O 作为直角坐标系的原点,将极坐标系的极轴作为直角坐标系 x 轴的正半轴。如果点 P 在直角坐标系下的坐标为 (x, y) ,在极坐标系下的坐标为 (ρ, θ) ,则有下列关系式成立:

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho}$$

即

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta$$

另外还有下列关系式成立:

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

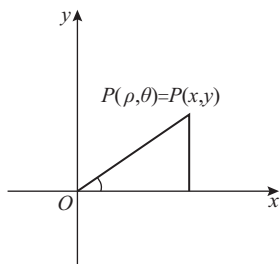


图 1-7

极坐标方程的形式为 $F(\rho, \theta) = 0$ 。在极坐标系里,以 ρ, θ 的每一组对应的值 (ρ_1, θ_1) $(\rho_2, \theta_2) \dots$ 作为点的坐标,并且标出这些点,然后用平滑的曲线依次连接这些点,所得到的曲线就称为这个极坐标方程的曲线。反过来,称这个方程为这条曲线的极坐标方程。

【例 1-9】 写出下列曲线的直角坐标方程:

(1) $\rho = 2$; (2) $\rho = \sec\theta$; (3) $\rho = 3\cos\theta$; (4) $\rho^2 \cos(2\theta) = 16$ 。

解 (1) 由 $\rho = 2$ 得 $x^2 + y^2 = 4$ 。

(2) 由 $\rho = \sec\theta$ 得 $\rho \cos\theta = 1$, 即 $x = 1$ 。

(3) 由 $\rho = 3\cos\theta$ 得 $\rho^2 = 3\rho \cos\theta$, 即 $x^2 + y^2 = 3x$, 可化为 $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ 。

(4) 由 $\rho^2 \cos(2\theta) = 16$ 得 $\rho^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 16$, 即 $x^2 - y^2 = 16$ 。

【例 1-10】 写出下列曲线的极坐标方程:

(1) $y = 2$; (2) $x^2 + y^2 = y$; (3) $x + y = 2$; (4) $x^2 + y^2 - ay = a\sqrt{x^2 + y^2}$ 。

解 (1) 由 $y = 2$ 得 $\rho \sin\theta = 2$, 即 $\rho = 2\csc\theta$ 。

(2) 由 $x^2 + y^2 = y$ 得 $\rho^2 = \rho \sin\theta$, 即 $\rho = \sin\theta$ 。

(3) 由 $x + y = 2$ 得 $\rho \cos\theta + \rho \sin\theta = 2$, 即 $\rho = \frac{2}{\cos\theta + \sin\theta}$ 。

(4) 由 $x^2 + y^2 - ay = a\sqrt{x^2 + y^2}$ 得 $\rho^2 - a\rho \sin\theta = a\rho$, 即 $\rho = a(1 + \sin\theta)$ 。

习题 1.1



1. 设 $f(x) = \frac{|x-3|}{x-1}$, 求下列函数的值。

(1) $f(3)$; (2) $f(-2)$; (3) $f(0)$ 。

2. 求下列函数的定义域。

$$(1) y = \ln \cos x; \quad (2) y = \frac{2x+2}{x^2-x+2};$$

$$(3) y = 3^{\frac{1}{x}}; \quad (4) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}.$$

3. 下列函数是否表示同一函数? 为什么?

$$(1) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(2) f(x) = 1, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x;$$

$$(3) y = \frac{x^2-1}{x-1}, y = x+1;$$

$$(4) y = x \cdot \operatorname{sgn} x, y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

4. 判断函数 $y = \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的单调性。

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意函数, 证明:

(1) 函数 $F_1(x) = f(x) + f(-x)$ 为偶函数;

(2) 函数 $F_2(x) = f(x) - f(-x)$ 为奇函数。

6. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的。

$$(1) y = (1+x)^3; \quad (2) y = \ln^2 x;$$

$$(3) y = 4^{(2x+1)^3}; \quad (4) y = \tan^2 3x.$$

第二节 数列的极限

为了掌握变量的变化规律, 我们往往需要从它的变化过程来判断它的变化趋势。例如, 有这么一个变量, 它开始是 1, 然后为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ 一直无尽地变化下去, 虽然无止境, 但它的变化有一个趋势, 这个趋势就是在它的变化过程中越来越接近于零。因此, 我们就说, 这个变量的极限为 0。

在高等数学中, 有很多重要的概念和方法都和极限有关, 如导数、微分、积分、级数等, 在实际问题中, 极限也占有重要的地位。例如, 圆的面积和周长公式为 $S = \pi r^2$ 和 $l = 2\pi r$, 但这两个公式从何而来呢?

要知道, 获得这些结果并不容易。人们最初只知道求多边形的面积和求直线段的长度。然而, 要定义这种从多边形到圆的过渡, 就要求人们在观念上、在思考方法上实现突破。多