第六章 微分方程

在生产实践和科学技术应用中经常要研究函数，高等数学中所研究的函数反映了客观现实和运动过程中的量与量之间的关系。但在大量的实际问题中，遇到稍微复杂的运动过程时，反映运动规律的量与量之间的关系(即函数)往往不能直接写出，但有时可建立含有要找的函数及其导数的关系式，这就是所谓的微分方程。微分方程是描述客观事物数量关系的一种重要的数学模型，本章主要介绍有关微分方程的基本概念、基本理论和几种常用微分方程的解法。

第一节 微分方程概述

下面通过几何学、物理学中的具体例子介绍微分方程的基本概念。

一、微分方程的例子

【例 6-1】 已知一条曲线上任意一点处的切线的斜率等于该点的横坐标的 3 倍，且该曲线通过(2,1)点，求该曲线方程。

解 设曲线方程为 $y=y(x)$，且曲线上任意一点的坐标为(x,y)。根据题意及导数的几何意义可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x \tag{6-1}$$

此外，$y(x)$还满足下列条件：

$$\text{当 } x=2 \text{ 时，} \quad y=1 \tag{6-2}$$

式(6-1)两端对 x 积分，得

$$y=\int 3x\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}x^2+C \tag{6-3}$$

把条件(6-2)代入式(6-3)，得

$$1=6+C, \quad C=-5$$

把 $C=-5$ 代入式(6-3)，得曲线方程

$$y=\frac{3}{2}x^2-5 \tag{6-4}$$

【例 6-2】 以初速度 v_0 将质点垂直上抛，不计阻力，求质点的运动规律。

解 如图 6-1 所示，取坐标系。设运动开始时$(t=0)$质点位于 x_0，在时刻 t 时质点位于

x。变量 x 与 t 之间的函数关系 $x=x(t)$ 就是要找的运动规律。

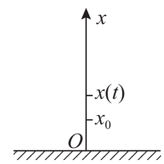

图 6-1

根据导数的物理意义,按题意,未知函数 $x(t)$ 应满足关系式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g \tag{6-5}$$

式中,g 为重力加速度。此外,$x(t)$ 还满足下列条件:

$$当\ t=0\ 时,\quad x=x_0,\quad \frac{dx}{dt}=v_0 \tag{6-6}$$

式(6-5)两端对 t 积分一次,得

$$\frac{dx}{dt}=-gt+C_1 \tag{6-7}$$

式(6-5)两端再对 t 积分一次,得

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{6-8}$$

把条件(6-6)代入式(6-7)和式(6-8),得 $C_1=v_0$,$C_2=x_0$,于是有

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0 \tag{6-9}$$

以上以几何学、物理学的实际问题引出关于未知函数的导数、未知函数和自变量之间的关系式,这类问题在其他学科也会遇到,因此有必要探讨解决这类问题的方法。

二、微分方程的基本概念

在以上两个例子中,式(6-1)和式(6-5)都含有未知函数的导数。一般地,表示未知函数、未知函数的导数及自变量之间关系的方程称为微分方程。若未知函数是一元函数,则微分方程叫作常微分方程;若未知函数是多元函数,则微分方程叫作偏微分方程。这里必须指出,在微分方程中,自变量及未知函数可以不出现,但未知函数的导数必须出现。本章只讨论常微分方程。

微分方程中所出现的未知函数导数的最高阶数称为微分方程的阶。例如,方程(6-1)是一阶微分方程;方程(6-5)是二阶微分方程。又如,方程

$$xy'''+x^3y''-5y'=\sin x$$

是三阶微分方程;而方程

$$y^{(4)}-xy=x^2$$

是四阶微分方程。

求函数 $f(x)$ 的原函数的问题,就是求解一阶微分方程 $y'=f(x)$。这是最简单的一阶微分方程,方程(6-1)就是这种方程。一般地,一阶微分方程的形式为

$$y'=f(x,y)\quad 或\quad F(x,y,y')=0$$

而二阶微分方程的一般形式为

$$y''=f(x,y,y')\quad 或\quad F(x,y,y',y'')=0$$

由前面的例子可以看到,在研究某些实际问题时,首先要建立微分方程,然后解微分方程,即求出满足微分方程的函数。如果把某函数及它的导数代入微分方程能使该方程成为恒等式,这样的函数称为该微分方程的解。就二阶微分方程 $F(x,y,y',y'')=0$ 而言,如果

有在某个区间 I 上的二阶可微函数 $\varphi(x)$，使当 $x \in I$ 时，有

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)] \equiv 0$$

那么 $y=\varphi(x)$ 就称为微分方程 $F(x, y, y', y'')=0$ 在区间 I 上的解。

例如，式(6-3)和式(6-4)都是微分方程(6-1)的解；式(6-8)和式(6-9)都是微分方程(6-5)的解。

如果微分方程的解中含有彼此独立的任意常数，且这些任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解称为微分方程的通解。例如，函数(6-3)是方程(6-1)的解，它含有一个任意常数，而方程(6-1)是一阶的，所以式(6-3)是方程(6-1)的通解；又如函数(6-8)是方程(6-5)的解，它含有两个任意常数，而方程(6-5)是二阶的，所以式(6-8)是方程(6-5)的通解。

由于通解中含有任意常数，所以它还不能完全确定地反映某一客观事物的规律性。要完全确定地反映事物的规律性，必须确定这些常数的值。为此，提出问题的同时，还要根据问题的实际情况提出确定这些常数的条件。例如，例 6-1 中的条件(6-2)、例 6-2 中的条件(6-6)便是这样的条件。

设微分方程中未知函数为 $y=y(x)$，如果微分方程是一阶的，那么通常用来确定任意常数的条件是

$$\text{当 } x=x_0 \text{ 时，}\quad y=y_0$$

或写成

$$y\big|_{x=x_0}=y_0$$

式中，x_0, y_0 都是给定的值；如果微分方程是二阶的，那么通常用来确定任意常数的条件是

$$\text{当 } x=x_0 \text{ 时，}\quad y=y_0,\quad y'=y_1$$

或写成

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\quad y'\big|_{x=x_0}=y_1$$

式中，x_0, y_0, y_1 都是给定的值。上述这种条件称为初始条件。

确定通解中的任意常数后，就得到微分方程的特解。例如，式(6-4)是微分方程(6-1)满足初始条件(6-2)的特解；式(6-9)是微分方程(6-5)满足初始条件(6-6)的特解。

求一阶微分方程 $F(x, y, y')=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=x_0}=y_0$ 的特解问题，称为一阶微分方程的初值问题，记作

$$\begin{cases} F(x, y, y')=0 \\ y\big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases} \tag{6-10}$$

微分方程的特解的图形是一条曲线，称为微分方程的积分曲线。初值问题(6-10)的几何意义，就是求微分方程通过点(x_0, y_0)的积分曲线。二阶微分方程满足初始条件 $y\big|_{x=x_0}=y_0, y'\big|_{x=x_0}=y_1$ 的特解的几何意义，就是通过点(x_0, y_0)且在该点处的切线斜率为 y_1 的积分曲线。而微分方程的通解中含有任意常数，其解的图形构成一族积分曲线。

【例 6-3】 函数 $y=Cx\ln x$（C 为任意常数）是否为微分方程

$$x^2y''-xy'+y=0$$

的解？是否满足条件 $y\Big|_{x=1}=0, y'\Big|_{x=\frac{1}{e}}=0$？是通解还是特解？

解 由于 $y'=C\ln x+C, y''=\dfrac{C}{x}$，因此

$$x^2y''-xy'+y=x^2\frac{C}{x}-x(C\ln x+C)+Cx\ln x$$
$$=Cx-Cx\ln x-Cx+Cx\ln x=0$$

故 $y=Cx\ln x$ 是所给微分方程的解。

由于 $y|_{x=1}=C\times1\times\ln 1=0$,$y'\Big|_{x=\frac{1}{e}}=C\ln\frac{1}{e}+C=0$,故 $y=Cx\ln x$ 是满足条件 $y|_{x=1}=0$,$y'\Big|_{x=\frac{1}{e}}=0$ 的解,但非特解(因含有任意常数)。

因为所给方程是二阶微分方程,而函数 $y=Cx\ln x$ 中只含有一个任意常数,所以它不是通解。

习题 6-1

1. 指出下列方程中哪些是微分方程,并指出微分方程的阶数。

(1) $y'''-3y'+2y=x$　　(2) $y^2+4y-2=0$

(3) $y'-xy'=a(y^2+y')$　　(4) $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$

2. 检验下列函数(C 是任意常数)是否是方程 $xy'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$ 的解,并指出哪一个是通解。

(1) $y=x$　　(2) $y=Cx$　　(3) $y=xe^{Cx}$　　(4) $y=Cxe^x$

3. 已知一曲线通过点(1,0),且该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 x^2,求该曲线方程。

4. 一质点由原点($t=0$)开始沿直线运动,已知在时刻 t 的加速度为 t^2-1,而在 $t=1$ 时的速度为 $\frac{1}{3}$,求位移 x 与时间 t 的函数关系。

第二节　一阶微分方程

微分方程形式多样,解法各不相同,本节介绍几种常见的一阶微分方程及其解法。

一、可分离变量的微分方程

在例 6-1 中,我们讲到一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=3x$$

或写成

$$dy=3x\,dx$$

对上式两端积分,就得到这个方程的通解,即

$$y=\frac{3}{2}x^2+C$$

但并不是所有的一阶微分方程都能这样求解。例如，对于一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy^2 \tag{6-11}$$

就不能对方程两端直接积分求出通解。这是因为微分方程(6-11)右端含有未知函数 y，积分 $\int 2xy^2\mathrm{d}x$ 求不出来。当 $y\neq 0$ 时，可以在微分方程(6-11)的两端同时乘以 $\frac{1}{y^2}\mathrm{d}x$，使方程(6-11)变为

$$\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=2x\,\mathrm{d}x$$

这样，变量 x 与 y 分离在等式的两端。然后对两端积分，得

$$-\frac{1}{y}=x^2+C$$

或

$$y=-\frac{1}{x^2+C} \tag{6-12}$$

式中，C 是任意常数。

可以验证式(6-12)确实是一阶微分方程(6-11)的解。又因式(6-12)含有一个任意常数，所以它是一阶微分方程(6-11)的通解。

通过这个例子可以看到，在一个一阶微分方程中，若两个变量同时出现在方程的某一端，就不能直接用积分的方法求解。但如果能把两个变量分离开，使方程的一端只含变量 y 及 $\mathrm{d}y$，另一端只含变量 x 及 $\mathrm{d}x$，那么就可以通过两端积分的方法求出它的通解。

另外，$y=0$ 也是方程的解，但无论 C 怎样取值，$y=0$ 也不能由通解(6-12)表示，即直线 $y=0$ 虽然是原方程的一条积分曲线，但是它并不属于该方程通解所确定的积分曲线族 $y=-\frac{1}{x^2+C}$，因此称这样的解为方程的奇解。也就是说，微分方程的通解未必包含其全部的解。

一般地，如果一个一阶微分方程能化成

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \tag{6-13}$$

的形式，那么原方程就称为可分离变量的微分方程。

把一个可分离变量微分方程化为形如式(6-13)的方程，这一步骤称为分离变量。然后可对式(6-13)的两端积分，有

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$$

设 $g(y)$ 及 $f(x)$ 的原函数依次为 $G(y)$ 及 $F(x)$，得

$$G(y)=F(x)+C \tag{6-14}$$

可以证明，由二元方程(6-14)所确定的隐函数 $y=y(x)$ 是微分方程(6-13)的解。二元方程(6-14)就称为微分方程(6-13)的隐式解。又因二元方程(6-14)含有一个任意常数，所以二元方程(6-14)是微分方程(6-13)的隐式通解。

【例 6-4】 求微分方程

$$x(y^2-1)\mathrm{d}x+y(x^2-1)\mathrm{d}y=0$$

的通解。

解　分离变量得

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x^2-1}=-\frac{y\mathrm{d}y}{y^2-1}$$

对两端积分得

$$\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\ln|C|\text{（}C\text{ 为不等于 0 的任意常数）}$$

即

$$(x^2-1)(y^2-1)=C$$

【例 6-5】 求微分方程 $\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x+(1+\mathrm{e}^x)\sin y\mathrm{d}y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$ 的特解。

解　分离变量得

$$-\frac{\sin y}{\cos y}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$$

对两端积分得

$$\ln|\cos y|=\ln|1+\mathrm{e}^x|+\ln|C|$$

所求通解为

$$\cos y=C(1+\mathrm{e}^x)$$

将初始条件 $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$ 代入得 $C=\frac{\sqrt{2}}{4}$，则所求特解为

$$\cos y=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\mathrm{e}^x)$$

*二、齐次方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6-15}$$

的一阶微分方程称为齐次微分方程，简称齐次方程。例如，

$$xy'=y\ln\frac{y}{x}$$

是齐次方程，因它可化为

$$y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$$

齐次方程(6-15)中的变量 x 与 y 一般是不能分离的。如果引进新的未知函数

$$u=\frac{y}{x} \tag{6-16}$$

就可把方程(6-15)化为可分离变量的方程。因为由式(6-16)有

$$y=xu,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

代入方程(6-15),便得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u$$

这是可分离变量的微分方程。分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

对两端积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

求出积分后再用$\frac{y}{x}$代替 u,便得所给齐次方程的通解。

【例 6-6】 求微分方程$(2x^2-y^2)+3xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 的通解。

解　原方程两边同时除以 x^2 得

$$\left[2-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]+3\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

这是齐次方程,令$\frac{y}{x}=u$,则

$$y=xu,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

代入方程得

$$2(1+u^2)+3ux\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0$$

分离变量得

$$2\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{3u\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

对两端积分得

$$4\ln|x|=-3\ln|1+u^2|+\ln|C|$$

以$\frac{y}{x}=u$ 代入得

$$x^4\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^3=C$$

故所求通解为

$$(x^2+y^2)^3=Cx^2$$

对于齐次方程,可通过变量代换$\frac{y}{x}=u$ 把它化为可分离变量的方程,从而求其解。事

实上,很多不能直接分离变量的方程,通过适当的变量代换后也可以化为可分离变量的方程,这是求微分方程非常常用的方法。解这种方程的困难在于选择一个适当的变换。要根据方程的特点做适当的变形,试探性地设出变换,以达到分离变量的目的。下面列举一个例子。

【例 6-7】 求解微分方程

$$y'=\sin^2(x-y+1)$$

解　令 $u=x-y+1$,则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,代入原方程得

$$1-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sin^2 u$$

分离变量得

$$\sec^2 u\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$$

对两端积分得

$$\tan u=x+C$$

故所求通解为

$$\tan(x-y+1)=x+C$$

三、一阶线性微分方程

线性微分方程是指方程关于未知函数及其导数是一次的。例如,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cot x=5\mathrm{e}^{\cos x}$ 是线性微分方程,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^2\sin y=2x$ 不是线性微分方程。

方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{6-17}$$

叫作一阶线性微分方程,其中,$P(x)$,$Q(x)$为已知函数。

如果 $Q(x)\equiv 0$,则方程(6-17)称为齐次的;如果 $Q(x)$不恒等于零,则方程(6-17)称为非齐次的。

设式(6-17)为非齐次线性微分方程,把 $Q(x)$换成零而写出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{6-18}$$

方程(6-18)称为对应于方程(6-17)的齐次线性微分方程。方程(6-17)与方程(6-18)的解有着密切的关系。下面我们先解方程(6-18)。

方程(6-18)是可分离变量的,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$$

对两端积分得

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+C_1$$

或

$$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\quad (C=\pm e^{C_1})$$

这就是对应于非齐次线性微分方程(6-17)的齐次线性方程(6-18)的通解。

现在我们用常数变易法来求非齐次线性微分方程(6-17)的通解。该方法是把方程(6-18)的通解中的任意常数 C 换成 x 的待定函数 $u(x)$,也就是作变换

$$y=ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\quad 或\quad u=ye^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-uP(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

代入方程(6-17)得

$$u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-uP(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+P(x)ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$$

即

$$u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)\Rightarrow u'=Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

对两端积分得

$$u=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

从而有

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\tag{6-19}$$

式(6-19)是一阶非齐次线性微分方程(6-17)的通解。把式(6-19)写成两项之和

$$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

上式右端第一项是对应的齐次线性方程(6-18)的通解,第二项是非齐次线性方程(6-17)的一个特解[在通解(6-19)中取 $C=0$ 便得出这个特解]。由此可知,一阶非齐次线性方程的通解等于对应的齐次线性方程的通解与非齐次线性方程的一个特解之和。

【例 6-8】 求微分方程 $y'\cos x+y\sin x=1$ 的通解。

解 方法一:原方程可化为

$$y'+y\tan x=\sec x$$

这是一阶非齐次线性方程。先求对应的齐次方程的通解,对应的齐次方程为

$$y'+y\tan x=0$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\tan x\,\mathrm{d}x$$

对两端积分得

$$\ln y=\ln\cos x+\ln c_1$$

故

$$y=c_1\cos x$$

下面用常数变易法变换常数 c_1。令 $y=c(x)\cos x$ 是原方程的解,则

$$y'=c'(x)\cos x-c(x)\sin x$$

把 y,y' 代入原方程得

$$[c'(x)\cos x-c(x)\sin x]+c(x)\cos x\tan x=\sec x$$

整理得

$$c'(x)=\sec^2 x$$

于是

$$c(x)=\tan x+C$$

把 $c(x)=\tan x+C$ 代入 $y=c(x)\cos x$ 中,得到该非齐次方程的通解

$$y=(\tan x+C)\cos x$$

方法二:利用通解公式求解。将方程化成标准形式:

$$y'+y\tan x=\sec x$$

则 $P(x)=\tan x,Q(x)=\sec x$,故

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]=e^{-\int \tan x dx}\left(\int \sec x\, e^{\int \tan x dx}dx+C\right)\\&=e^{\ln\cos x}\left(\int \sec x\, e^{-\ln\cos x}dx+C\right)=\cos x\left(\int \sec^2 x\, dx+C\right)\\&=(\tan x+C)\cos x\end{aligned}$$

【例 6-9】 求微分方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{y^3+x}$的通解。

解 观察这个方程,可知它不是未知函数 y 的线性微分方程,但如果将 x 看作未知量,y 看作其自变量,而把方程改写成

$$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=y^2$$

用公式法,$P(y)=-\dfrac{1}{y},Q(y)=y^2$,故

$$\begin{aligned}x&=e^{-\int P(y)dy}\left[\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy+C\right]=e^{-\int -\frac{1}{y}dy}\left(\int y^2 e^{\int -\frac{1}{y}dy}dy+C\right)\\&=e^{\ln y}\left(\int y^2 e^{\ln\frac{1}{y}}dy+C\right)=y\left(\int y\, dy+C\right)\\&=y\left(\frac{1}{2}y^2+C\right)\end{aligned}$$

即所求通解为

$$x=\frac{1}{2}y^3+Cy$$

常数变易法是解非齐次线性微分方程的基本方法,读者应了解它的求解思路。在解线性方程时,也可直接用一阶线性方程的通解公式(6-19),使运算更简便。但此时应注意一定要先将线性方程化为标准形式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

即一定要将一阶导数项的系数化为 1,确定出 $P(x),Q(x)$后,再用式(6-19)求解。