

# 确定信号通过线性 时不变系统

## 3.1 连续时间线性时不变系统时间域分析

根据第 1 章的分析,任意连续时间信号  $x(t)$  均可以分解为冲激信号  $\delta(t)$  的积分,即

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

如图 3-1 所示,如果定义冲激函数  $\delta(t)$  通过线性时不变系统的输出  $h(t)$  为该系统的冲激响应 (Impulse Response),那么根据线性时不变系统的性质,可以得到信号  $x(t)$  通过该系统的输出  $y(t)$ 。

由于  $F[\delta(t)]=1$ ,因此冲激信号  $\delta(t)$  可视为所有可能频率的等幅度正弦信号的叠加。 $\delta(t)$  作为线性时不变系统的输入,等价于同时用所有可能频率的等幅度正弦信号激励该系统。

如图 3-2 所示,当定义了线性时不变系统的冲激响应  $h(t)$  为冲激信号  $\delta(t)$  通过该系统的输出后,根据线性时不变系统的性质,可以推导出: $\delta(t-\tau)$  通过该系统的输出为  $h(t-\tau)$ ;  $x(\tau)\delta(t-\tau)$  通过该系统的输出为  $x(\tau)h(t-\tau)$ ,于是得到  $x(t)$  通过该系统的输出  $y(t)$  为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (3-1)$$

即

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (3-2)$$

也就是说,确定信号  $x(t)$  通过线性时不变系统的输出  $y(t)$  是信号  $x(t)$  与系统冲激响应  $h(t)$  的卷积。这就是连续时间线性时不变系统的时间域分析公式。

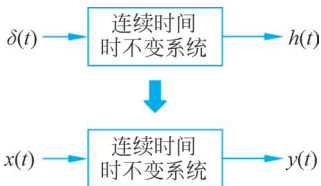


图 3-1 连续时间线性时不变系统冲激响应

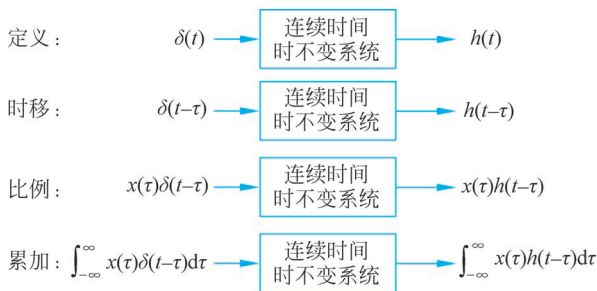


图 3-2 连续时间线性时不变系统时间域分析



第 29 集  
微课视频



第 30 集  
微课视频

可见,线性时不变系统在时间域上可唯一地用系统的冲激响应  $h(t)$  来描述,模型如图 3-3 所示。

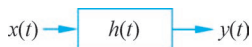


图 3-3 连续时间线性时不变系统的时间域模型

## 3.2 连续时间线性时不变系统频率域分析

线性时不变系统冲激响应  $h(t)$  的傅里叶变换  $H(\omega)$  称为该系统的频率响应(Frequency Response),即

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-3)$$

系统的频率响应  $H(\omega)$  反映了该系统对输入信号不同频率分量的传输特性。也就是说,当系统受单一频率  $\omega$  的信号激励时,系统的响应与激励之比定义为  $H(\omega)$  在该频率  $\omega$  处的值。

频率响应  $H(\omega)$  一般为复数,可以写为

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3-4)$$

其中,  $|H(\omega)|$  称为该系统的幅频响应(Amplitude Frequency Response);  $\varphi(\omega)$  称为该系统的相频响应(Phase Frequency Response)。

由于冲激响应  $h(t)$  是线性时不变系统在时间域上的唯一描述,因此频率响应  $H(\omega)$  是线性时不变系统在频率域上的唯一描述。

对式(3-2)两边分别作傅里叶变换,根据傅里叶变换的时间域卷积特性,可以得到

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega) \quad (3-5)$$

也就是说,系统输出信号  $y(t)$  的傅里叶变换是输入信号  $x(t)$  的傅里叶变换与系统频率响应  $H(\omega)$  的乘积。这就是连续时间线性时不变系统的频率域分析公式。

**【例 3-1】** 求如图 3-4 所示的 RC 低通电路系统的冲激响应和频率响应。

**解** 根据系统冲激响应的定义,冲激响应  $h(t)$  为冲激信号  $\delta(t)$  激励该 RC 低通电路系统的输出信号,于是有

$$\frac{\delta(t) - h(t)}{R} = C \frac{dh(t)}{dt}$$

所以

$$\delta(t) = h(t) + RC \frac{dh(t)}{dt}$$

对等式两边分别作傅里叶变换,可以得到

$$1 = H(\omega) + RCj\omega H(\omega)$$

于是得到 RC 低通电路系统的频率响应  $H(\omega)$  为

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega}$$

对频率响应  $H(\omega)$  作傅里叶逆变换,则得到系统的冲激响应  $h(t)$  为

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + RCj\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{RC} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega} e^{j\omega t} d\omega \right)$$



$$= \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

若令  $a = \frac{1}{RC}$ , 则系统的冲激响应和频率响应分别可以写为

$$h(t) = a e^{-at} u(t)$$

$$H(\omega) = \frac{a}{a + j\omega}$$

在例 3-1 中, 可以进一步得到 RC 低通电路系统的幅频响应为

$$|H(\omega)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

RC 低通电路系统的幅频响应如图 3-5 所示。

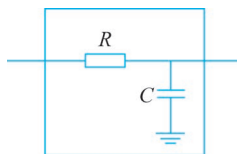


图 3-4 RC 低通电路系统

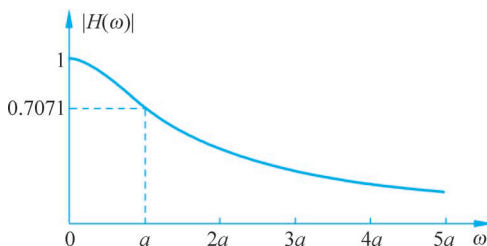


图 3-5 RC 低通电路系统的幅频响应

可见, 随着频率的增加, RC 低通电路系统的幅频响应  $|H(\omega)|$  不断减小, 这就说明输入信号的频率越高, 该信号通过 RC 低通电路系统的衰减也就越大。当  $a = \frac{1}{RC} = \omega_c$  时,  $|H(\omega_c)| = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$ , 即  $20 \lg |H(\omega_c)| = -3 \text{dB}$ , 频率  $\omega_c$  就称为该系统的 3dB 截频。

**【例 3-2】** 分别用时间域分析法和频率域分析法求如图 3-6 所示的方波通过例 3-1 RC 低通电路系统的输出。

**解** (1) 时间域分析法。

例 3-1 已得到 RC 低通电路系统的冲激响应为  $h(t) = a e^{-at} u(t)$ , 代入式(3-1)后, 可以推导出

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} A \text{rect}\left(\frac{\tau - \frac{T}{2}}{T}\right) a e^{-a(t-\tau)} u(t - \tau) d\tau$$

求解示意图如图 3-7 所示。

当  $t < 0$  时, 有

$$y(t) = 0$$

当  $0 \leq t \leq T$  时, 有

$$y(t) = Aa \int_0^t e^{-a(t-\tau)} d\tau = A e^{-a(t-\tau)} \Big|_{\tau=0}^t = A(1 - e^{-at}) = A - A e^{-at}$$

当  $t > T$  时, 有

$$y(t) = Aa \int_0^T e^{-a(t-\tau)} d\tau = Ae^{-a(t-\tau)} \Big|_{\tau=0}^T = A[e^{-a(t-T)} - e^{-at}]$$

$$= Ae^{-a(t-T)} - Ae^{-at}$$

所以

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A - Ae^{-at}, & 0 \leq t \leq T \\ Ae^{-a(t-T)} - Ae^{-at}, & t > T \end{cases}$$

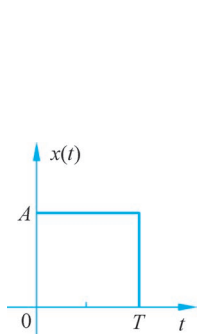


图 3-6 例 3-2 方波信号

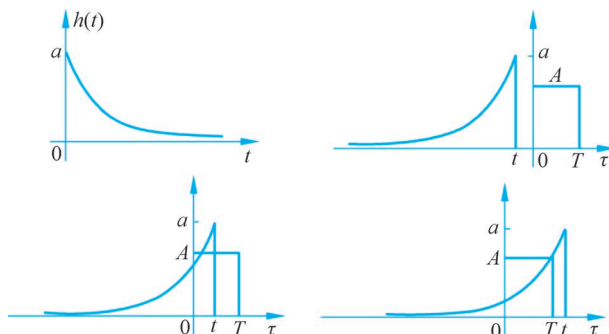


图 3-7 方波通过 RC 低通电路系统的时间域分析法求解示意图

(2) 频率域分析法。

例 3-1 已得到 RC 低通电路系统的频率响应为  $H(\omega) = \frac{a}{a + j\omega}$ , 而系统的输入信号  $x(t) =$

$A \text{rect}\left(\frac{\tau - \frac{T}{2}}{T}\right)$  的傅里叶变换为

$$X(\omega) = AT \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

代入式(3-5)后, 可以推导出

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = AT \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\omega \frac{T}{2}} \frac{a}{a + j\omega} = AT \frac{a}{a + j\omega} \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

$$= \frac{2aA}{(a + j\omega)\omega} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\omega \frac{T}{2}} = \frac{2aA}{(a + j\omega)\omega} \frac{1}{2j} (e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}) e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

$$= \frac{aA}{(a + j\omega)j\omega} (1 - e^{-j\omega T})$$

令  $Z(\omega) = \frac{aA}{(a + j\omega)j\omega}$ , 则有

$$Y(\omega) = Z(\omega)(1 - e^{-j\omega T})$$

如果  $Z(\omega) = F[z(t)]$ , 则有

$$y(t) = z(t) - z(t - T)$$

$Z(\omega)$  可以写为

$$Z(\omega) = \frac{aA}{(a + j\omega)j\omega} = A \left( \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{a + j\omega} \right)$$

所以

$$z(t) = \frac{A}{2} \operatorname{sgn}(t) - Ae^{-at} u(t) = \begin{cases} \frac{A}{2} - Ae^{-at}, & t > 0 \\ -\frac{A}{2}, & t < 0 \end{cases}$$

因此有

$$z(t-T) = \begin{cases} \frac{A}{2} - Ae^{-a(t-T)}, & t > T \\ -\frac{A}{2}, & t < T \end{cases}$$

于是,当  $t < 0$  时,有

$$y(t) = z(t) - z(t-T) = \left(-\frac{A}{2}\right) - \left(-\frac{A}{2}\right) = 0$$

当  $0 \leq t \leq T$  时,有

$$y(t) = z(t) - z(t-T) = \frac{A}{2} - Ae^{-at} - \left(-\frac{A}{2}\right) = A - Ae^{-at}$$

当  $t > T$  时,有

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) - z(t-T) = \frac{A}{2} - Ae^{-at} - \left[\frac{A}{2} - Ae^{-a(t-T)}\right] \\ &= Ae^{-a(t-T)} - Ae^{-at} \end{aligned}$$

所以

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A - Ae^{-at}, & 0 \leq t \leq T \\ Ae^{-a(t-T)} - Ae^{-at}, & t > T \end{cases}$$

$y(t)$ 、 $z(t)$  和  $z(t-T)$  的波形如图 3-8 所示。

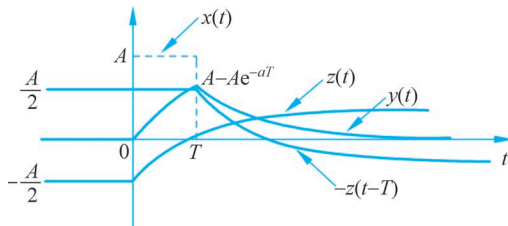


图 3-8 方波通过 RC 低通电路系统的频率域分析法波形

可见,时间域分析法和频率域分析法所得的结果是完全一致的。

**【例 3-3】** 分别用时间域分析法和频率域分析法求斜坡信号  $x(t) = tu(t)$  通过例 3-1 RC 低通电路系统的输出。

**解** (1) 时间域分析法。

例 3-1 已得到 RC 低通电路系统的冲激响应为  $h(t) = ae^{-at}u(t)$ , 代入式(3-1)后,可以推导出

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \tau u(\tau)ae^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

当  $t < 0$  时,有

$$y(t) = 0$$

当  $t > 0$  时,有

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \tau a e^{-a(t-\tau)} d\tau = \tau e^{-a(t-\tau)} \Big|_{\tau=0}^t - \int_0^t e^{-a(t-\tau)} d\tau \\ &= t - \frac{1}{a} e^{-a(t-\tau)} \Big|_{\tau=0}^t = t - \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) = t - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} e^{-at} \end{aligned}$$

所以

$$y(t) = \left( t - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} e^{-at} \right) u(t)$$

(2) 频率域分析法。

例 3-1 已得到 RC 低通电路系统的频率响应为  $H(\omega) = \frac{a}{a + j\omega}$ , 而系统的输入信号  $x(t) = tu(t)$  的傅里叶变换为

$$X(\omega) = j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

代入式(3-5),可以推导出

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \left[ j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2} \right] \frac{a}{a + j\omega} = \frac{a}{a + j\omega} \frac{1}{(j\omega)^2} + j \frac{a\pi}{a + j\omega} \delta'(\omega)$$

由于有

$$\begin{aligned} \frac{a}{a + j\omega} \frac{1}{(j\omega)^2} &= \frac{1}{a(a + j\omega)} - \frac{1}{aj\omega} + \frac{1}{(j\omega)^2} \\ j \frac{a\pi}{a + j\omega} \delta'(\omega) &= j \frac{\pi[(a + j\omega) - j\omega]}{a + j\omega} \delta'(\omega) = j\pi\delta'(\omega) + \frac{\pi}{a + j\omega} \omega \delta'(\omega) \\ &= j\pi\delta'(\omega) - \frac{\pi}{a + j\omega} \delta(\omega) = j\pi\delta'(\omega) - \frac{\pi}{a} \delta(\omega) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{a(a + j\omega)} - \frac{1}{aj\omega} + \frac{1}{(j\omega)^2} + j\pi\delta'(\omega) - \frac{\pi}{a} \delta(\omega) \\ &= \frac{1}{a(a + j\omega)} - \frac{1}{a} \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] + \left[ j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2} \right] \end{aligned}$$

所以

$$y(t) = \frac{1}{a} e^{-at} u(t) - \frac{1}{a} u(t) + tu(t) = \left( t - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} e^{-at} \right) u(t)$$

本例进一步说明了时间域分析法和频率域分析法所得的结果是完全一致的。

小结一下,线性时不变系统的分析,有时间域分析和频率域分析两种方法,图 3-9 给出了这两种分析方法及彼此之间的关系。

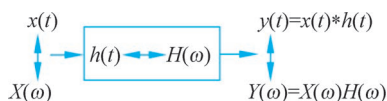


图 3-9 连续时间线性时不变系统的两种分析方法

对于一个系统的分析,既可以用时间域分析法,也可以用频率域分析法。虽然对于特定的分析,两种方法分析过程的繁简程度有所不同,但是两者所得的结果是完全一致的,也就是说,两种方法在本质上是完全等效的。

对于能量信号通过线性时不变系统,由其能量谱和互能量谱的定义可以推导出

$$E_y(\omega) = E_x(\omega) |H(\omega)|^2 \quad (3-6)$$

$$E_{yx}(\omega) = E_x(\omega)H(\omega) \quad (3-7)$$

**证明**

$$\begin{aligned} E_y(\omega) &= Y(\omega)Y^*(\omega) = [X(\omega)H(\omega)][X(\omega)H(\omega)]^* = X(\omega)H(\omega)X^*(\omega)H^*(\omega) \\ &= [X(\omega)X^*(\omega)][H(\omega)H^*(\omega)] = E_x(\omega) |H(\omega)|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{yx}(\omega) &= Y(\omega)X^*(\omega) = [X(\omega)H(\omega)]X^*(\omega) = [X(\omega)X^*(\omega)]H(\omega) \\ &= E_x(\omega)H(\omega) \end{aligned}$$

证毕。

即,系统输出信号的能量谱为输入信号的能量谱乘以系统频率响应的绝对值平方;系统输出信号与输入信号的互能量谱为输入信号的能量谱乘以系统的频率响应。

可以推导出

$$\begin{aligned} F^{-1}[|H(\omega)|^2] &= F^{-1}[H(\omega)H^*(\omega)] = h(t) * F^{-1}[H^*(\omega)] \\ &= h(t) * \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H^*(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = h(t) * \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right]^* \\ &= h(t) * h^*(-t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) h^*[-(t-\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) h^*(\tau-t) d\tau = R_h(t) \end{aligned}$$

根据维纳-辛钦定理,可以得到

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau) \quad (3-8)$$

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) \quad (3-9)$$

即,系统输出信号的自相关为输入信号的自相关卷积系统冲激响应的自相关;系统输出信号与输入信号的互相关为输入信号的自相关卷积系统的冲激响应。

类似地,对于功率信号通过线性时不变系统,也可以得到

$$P_y(\omega) = P_x(\omega) |H(\omega)|^2 \quad (3-10)$$

$$P_{yx}(\omega) = P_x(\omega)H(\omega) \quad (3-11)$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau) \quad (3-12)$$

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) \quad (3-13)$$

即,系统输出信号的功率谱为输入信号的功率谱乘以系统频率响应的绝对值平方,系统输出信号与输入信号的互功率谱为输入信号的功率谱乘以系统的频率响应;系统输出信号的自相关为输入信号的自相关卷积系统冲激响应的自相关,系统输出信号与输入信号的互相关为输入信号的自相关卷积系统的冲激响应。

如图 3-10 所示,当两个线性时不变系统串联(Series Interconnection)或级联(Cascade Interconnection)时,可以得到

$$Y(\omega) = X(\omega)H_1(\omega), \quad Z(\omega) = Y(\omega)H_2(\omega)$$

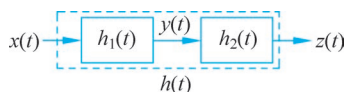


图 3-10 两个线性时不变系统串联

于是可以推导出

$$Z(\omega) = Y(\omega)H_2(\omega) = X(\omega)H_1(\omega)H_2(\omega) = X(\omega)[H_1(\omega)H_2(\omega)]$$

因此,这两个串联的线性时不变系统就等效于一个线性时不变系统,这个等效的系统的频率响应为

$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega) \quad (3-14)$$

根据傅里叶变换的性质,可以进一步得到:等效系统的冲激响应等于两个串联系统的冲激响应的卷积,即

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad (3-15)$$

由于  $H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega) = H_2(\omega)H_1(\omega)$ ,因此,交换两个串联系统的先后连接次序并不影响等效系统的频率响应。

如果  $H(\omega) = 1$ ,那么  $H_2(\omega) = \frac{1}{H_1(\omega)}$ ,说明两个线性时不变系统是可逆的(Invertible),其中一个系统称为另一个系统的逆系统(Invertible System)。

如图 3-11 所示,当两个线性时不变系统并联(Parallel Interconnection)时,可以得到

$$Y_1(\omega) = X(\omega)H_1(\omega), \quad Y_2(\omega) = X(\omega)H_2(\omega)$$

于是可以推导出

$$Y(\omega) = Y_1(\omega) + Y_2(\omega) = X(\omega)H_1(\omega) + X(\omega)H_2(\omega) = X(\omega)[H_1(\omega) + H_2(\omega)]$$

因此,这两个并联的线性时不变系统就等效于一个线性时不变系统,这个等效的系统的频率响应为

$$H(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega) \quad (3-16)$$

根据傅里叶变换的性质,可以进一步得到:等效系统的冲激响应等于两个并联系统的冲激响应的相加,即

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (3-17)$$

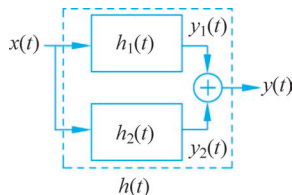


图 3-11 两个线性时不变系统并联

### 3.3 连续时间线性时不变系统的微分方程

连续时间线性时不变系统的输入信号  $x(t)$  和输出信号  $y(t)$  的关系还可以用微分方程来描述。一般而言,这个微分方程是  $N$  阶的线性常系数微分方程,即

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (3-18)$$

其中,  $a_k$  和  $b_k$  为该微分方程的常系数,  $M < N$ 。

式(3-18)的经典求解方法是将其解视为由齐次解(Homogeneous Solution)  $y_c(t)$  和特解(Special Solution)  $y_p(t)$  组成,即

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) \quad (3-19)$$

其中,齐次解  $y_c(t)$  是以下齐次方程的解。

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \quad (3-20)$$

而特解  $y_p(t)$  与系统的输入信号  $x(t)$  有关,且满足式(3-18)。

引入微分算子  $D = \frac{d}{dt}$ , 可以将式(3-18)改写为

$$\sum_{k=0}^N a_k D^k y(t) = \sum_{k=0}^M b_k D^k x(t) \quad (3-21)$$

于是有

$$y(t) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k D^k}{\sum_{k=0}^N a_k D^k} x(t)$$

引入微分方程的转移算子  $P(D) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k D^k}{\sum_{k=0}^N a_k D^k} = \frac{B(D)}{A(D)}$ , 其中  $A(D) = \sum_{k=0}^N a_k D^k$  称为微分

方程的特征多项式(Characteristic Polynomial), 特征多项式等于零的方程称为其特征方程(Characteristic Equation), 即

$$A(D) = \sum_{k=0}^N a_k D^k = 0 \quad (3-22)$$

如果特征方程的根互不相同, 即式(3-22)具有  $N$  个单根  $\lambda_i$ , 则式(3-20)所示的齐次方程的解为

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t} \quad (3-23)$$

但如果特征方程存在重根, 不失一般性, 我们可以设根  $\lambda_1$  是  $p$  重根, 而其他  $N-p$  个根  $\lambda_i (i=2, 3, \dots, N-p+1)$  都是单根, 则式(3-20)所示的齐次方程的解为

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^p d_i t^{p-i} e^{\lambda_1 t} + \sum_{i=2}^{N-p+1} c_{i-1} e^{\lambda_i t} \quad (3-24)$$

式(3-23)中的  $N$  个常数  $c_i$  以及式(3-24)中的  $N$  个常数  $c_i$  和  $d_i$ , 可以由  $y(t)$  及其各阶(1阶至  $N-1$  阶)导数的初始值代入后求解得到。

特解的求解相对比较困难, 不过对于一些简单的输入信号  $x(t)$ , 可以知道特解的表达式, 此时只需确定表达式的待定系数即可。

**【例 3-4】** 用微分方程求解方法求斜坡信号  $x(t) = tu(t)$  通过例 3-1 RC 低通电路系统的输出, 已知  $y(0^+) = 1$ 。

**解** 由于 RC 电路是因果系统, 且  $t < 0$  时系统的输入信号  $x(t) = tu(t) = 0$ , 所以  $t < 0$  时系统的输出也为零, 故下面只需求解  $t \geq 0$  时的系统输出。

根据该 RC 电路的结构, 可以得到

$$\frac{x(t) - y(t)}{R} = C \frac{dy(t)}{dt}$$

即

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

于是可以得到特征方程为

$$RC\lambda + 1 = 0$$

因此有

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

则该微分方程的齐次解为

$$y_c(t) = c_1 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

此时  $x(t) = t$ , 代入微分方程后可以得到

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = t$$

为使等式两边平衡, 特解的表达式为

$$y_p(t) = B_1 t + B_0$$

代入后可以推导出

$$RCB_1 + B_1 t + B_0 = t$$

比较等式两边, 可以得到

$$B_1 = 1, \quad B_0 = -RC$$

于是微分方程的特解为

$$y_p(t) = t - RC$$

所以

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = c_1 e^{-\frac{1}{RC}t} + t - RC$$

由于  $y(0^+) = 1$ , 因此有

$$c_1 - RC = 1$$

即

$$c_1 = RC + 1$$

因此, 得到  $t \geq 0$  后的输出信号  $y(t)$  为

$$y(t) = (RC + 1)e^{-\frac{1}{RC}t} + t - RC = RCe^{-\frac{1}{RC}t} + e^{-\frac{1}{RC}t} + t - RC$$

结合  $t < 0$  的输出, 可以得到

$$y(t) = (RCe^{-\frac{1}{RC}t} + e^{-\frac{1}{RC}t} + t - RC)u(t)$$

从例 3-4 可以看出, 齐次解的表达式仅依赖于系统本身的特性, 与系统的输入信号无关, 因此齐次解也称为系统的自由响应(Natural Response), 不过齐次解的待定系数是与系统的输入信号有关的。而特解的表达式则是由系统的输入信号决定的, 因此特解也称为系统的强迫响应(Forced Response)。

由于对于复杂的输入信号或高阶的系统, 经典的微分方程求解方法往往比较烦琐, 因此为了求解方便, 可以基于线性系统的特性, 将系统的响应分解为零输入响应(Zero Input

Response) $y_s(t)$ 和零状态响应(Zero State Response) $y_x(t)$ ,即

$$y(t) = y_s(t) + y_x(t) \quad (3-25)$$

在零输入条件下,系统的响应也是齐次方程的解。但是,它与自由响应是有区别的,区别在于两者的系数并不相同。零输入响应齐次解的系数仅由初始状态决定,而自由响应齐次解的系数是由系统的初始状态和输入信号共同确定的。也就是说,自由响应是由零输入响应 $y_s(t)$ 和部分零状态响应 $y_{cx}(t)$ 组成的,即

$$y_c(t) = y_s(t) + y_{cx}(t) \quad (3-26)$$

在零状态条件下,系统的响应仍然是非齐次方程的解。根据式(3-19)、式(3-25)和式(3-26),其解可以表示为

$$y_x(t) = y_{cx}(t) + y_p(t) \quad (3-27)$$

**【例 3-5】** 求解例 3-4 系统的零输入响应和零状态响应。

**解** 同样由于 RC 电路是因果系统,且 $t < 0$ 时系统的输入信号 $x(t) = tu(t) = 0$ ,所以 $t < 0$ 时系统的输出也为零,故下面也只需求解 $t \geq 0$ 时系统的输出。

例 3-4 已得到微分方程为

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

并已求出其特征根为

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

则系统的零输入响应 $y_s(t)$ 可以表示为

$$y_s(t) = c_s e^{-\frac{1}{RC}t}$$

将初始状态 $y(0^+) = 1$ 代入后,可以得到

$$c_s = 1$$

故系统的零输入响应为

$$y_s(t) = e^{-\frac{1}{RC}t}$$

例 3-4 已求出 $y_p(t) = t - RC$ ,因此系统的零状态响应可以写为

$$y_x(t) = c_{cx} e^{-\frac{1}{RC}t} + t - RC$$

零状态情况,即 $y(0^+) = 0$ ,代入后可以得到

$$c_{cx} = RC$$

所以

$$y_x(t) = RC e^{-\frac{1}{RC}t} + t - RC$$

结合 $t < 0$ 时的系统输出,于是有

$$y_s(t) = e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

$$y_x(t) = (RC e^{-\frac{1}{RC}t} + t - RC) u(t)$$

引入常数 $a = \frac{1}{RC}$ 后,可以得到

$$y_x(t) = \left( \frac{1}{a} e^{-at} + t - \frac{1}{a} \right) u(t)$$

可见,这个零状态响应与例 3-3 线性时不变系统时间域分析法和频率域分析法所得的结果是一致的。

其实,零状态响应的求解依然会遇到经典方法求特解时类似的困难。此时,可以根据系统的线性时不变特性借助卷积运算来解决。事实上,3.1 节介绍的时间域分析方法求出的响应就是系统的零状态响应。

### 3.4 典型线性时不变系统

下面介绍几个典型的线性时不变系统。

#### 3.4.1 无失真传输系统

无失真传输系统(Distortion Free Transmission System)指的是信号在通过该系统后不会产生任何的失真,即系统的输出信号与输入信号相比除可能的幅度改变和时间延迟外,波形完全相同。这就相当于要求系统的输出信号  $y(t)$  与输入信号  $x(t)$  之间满足

$$y(t) = ax(t - \tau) \quad (3-28)$$

其中,  $a$  为放大倍数;  $\tau$  为时间延迟常数。

对式(3-28)的两边分别作傅里叶变换,可以得到

$$Y(\omega) = aX(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

因此,无失真传输系统的频率响应为

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = ae^{-j\omega\tau} \quad (3-29)$$

系统的幅频响应和相频响应为

$$|H(\omega)| = a, \quad \varphi(\omega) = -\omega\tau \quad (3-30)$$

也就是说,无失真传输系统应满足以下两个条件。

(1) 系统的幅频响应  $|H(\omega)|$  在整个频率范围内为常数  $a$ , 即系统的带宽为无穷大。

(2) 系统的相频响应  $\varphi(\omega)$  在整个频率范围内与频率  $\omega$  成正比关系, 即系统具有线性相位特性。

无失真传输系统的频率响应如图 3-12 所示。

对式(3-29)两边分别作傅里叶逆变换,可以得到无失真传输系统的冲激响应为

$$h(t) = a\delta(t - \tau) \quad (3-31)$$

可见,无失真传输系统的冲激响应是延迟了时间  $\tau$  的冲激信号,其强度是单位冲激信号的  $a$  倍。

#### 3.4.2 理想低通滤波器

滤波器指的是能使一部分频率范围(称为滤波器的通带)的信号成分通过,而使另一部分频率范围(称为滤波器的阻带)的信号成分不通过(或很少通过)的系统。而理想滤波器(Ideal Filter)指的是在系统的通带频率范围内所有信号成分都可以无失真地通过,而在系

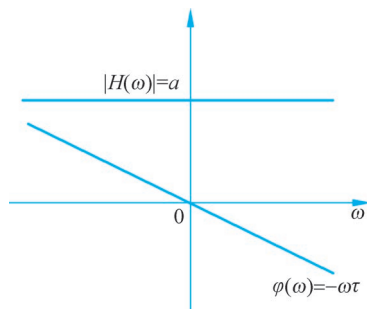


图 3-12 无失真传输系统的频率响应



第 32 集  
微课视频



第 33 集  
微课视频

统的通带频率范围外所有信号成分则被完全滤除掉。显然,无失真传输系统就可以看作通带频率范围为无穷大的理想滤波器。

根据通带频率范围的不同,理想滤波器通常可以分为理想低通滤波器(Ideal Low-Pass Filter)、理想高通滤波器(Ideal High-Pass Filter)、理想带通滤波器(Ideal Bandpass Filter)和理想带阻滤波器(Ideal Band Stop Filter)。这4类理想滤波器的幅频响应如图3-13所示。

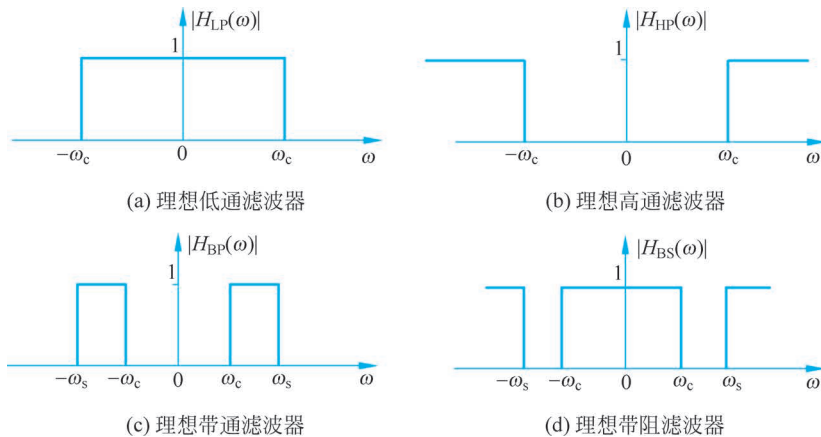


图 3-13 4 类理想滤波器的幅频响应

理想滤波器的相频响应在通带频率范围内与频率  $\omega$  成正比,即具有线性相位的特性。

由图3-13可见,  $|H_{HP}(\omega)| = 1 - |H_{LP}(\omega)|$ ,即理想高通滤波器可以等效为一个无失真传输系统与理想低通滤波器的并联(前者的输出减去后者的输出);理想带通滤波器可以等效为一个截止频率(Cut-Off Frequency)为  $\omega_s$  的理想低通滤波器与一个截止频率为  $\omega_c$  的理想高通滤波器的串联;理想带阻滤波器可以等效为一个无失真传输系统与理想带通滤波器的并联(前者的输出减去后者的输出)。可见,这4类理想滤波器均可以等效为无失真传输系统与理想低通滤波器的某种组合。上面已经讨论了无失真传输系统,下面着重讨论理想低通滤波器。

由于理想低通滤波器的幅频响应和相频响应分别为

$$|H(\omega)| = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right), \quad \varphi(\omega) = -\omega\tau \quad (3-32)$$

因此,理想低通滤波器的冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) e^{-j\omega\tau} \right] e^{j\omega t} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - \tau)] \quad (3-33)$$

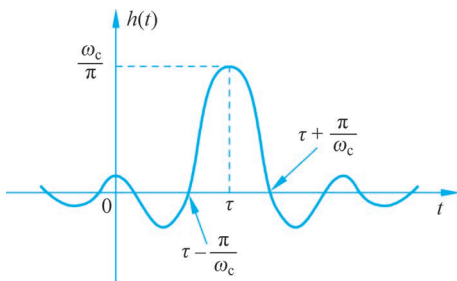


图 3-14 理想低通滤波器的冲激响应

式(3-33)的推导中分别利用了抽样信号  $\text{Sa}(\cdot)$  的傅里叶变换和傅里叶变换的时移特性。理想低通滤波器冲激响应  $h(t)$  波形如图3-14所示。

由图3-14可见,理想低通滤波器的冲激响应  $h(t)$  是一个抽样信号,它不同于系统的输入信号  $\delta(t)$ ,存在失真现象。原因是理想低通滤波器是一个频率范围有限的系统,而输入的冲激信号  $\delta(t)$  的频谱范围却是无穷大的。

减小失真的方法是增大理想低通滤波器的截止频率  $\omega_c$ 。因为理想低通滤波器冲激响应  $h(t)$  的主瓣宽度为  $\frac{2\pi}{\omega_c}$ ，若  $\omega_c$  越小，则失真越大；若  $\omega_c$  趋向于无穷大，则  $h(t)$  趋向于  $\delta(t)$ ，此时理想低通滤波器也就变为无失真传输系统。

还可以看出， $h(t)$  出现最大值的时刻  $t = \tau$  比输入信号  $\delta(t)$  的作用时刻  $t = 0$  延迟了一段时间  $\tau$ ，这个  $\tau$  就是理想低通滤波器相频特性的斜率。显然，不管  $\tau$  取多大的值， $h(t)$  在  $t < 0$  时总不为零，这就说明理想低通滤波器不是一个因果系统，也就是说它不是一个物理可实现系统。

**【例 3-6】** 求阶跃信号  $u(t)$  通过理想低通滤波器的输出  $y(t)$ 。

**解** 由于有

$$F[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}, \quad H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) e^{-j\omega\tau}$$

可以得到

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \left[ \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) e^{-j\omega\tau} \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \pi\delta(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \delta(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\cos\omega(t-\tau)}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{j\sin\omega(t-\tau)}{j\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\cos\omega(t-\tau)}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin\omega(t-\tau)}{\omega} d\omega \end{aligned}$$

由于  $\omega$  和  $\sin\omega(t-\tau)$  是关于  $\omega$  的奇信号， $\cos\omega(t-\tau)$  是关于  $\omega$  的偶信号，则  $\frac{\cos\omega(t-\tau)}{\omega}$  是关于  $\omega$  的奇信号， $\frac{\sin\omega(t-\tau)}{\omega}$  是关于  $\omega$  的偶信号，于是可以推导出

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin\omega(t-\tau)}{\omega} d\omega$$

令  $x = \omega(t-\tau)$ ，则有  $\omega = \frac{x}{t-\tau}$ ， $d\omega = \frac{1}{t-\tau} dx$ ，于是可以得到

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-\tau)} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-\tau)} \text{Sa}(x) dx$$

定义正弦积分 (Sine Integral, 可用数值方法制成标准函数表)  $\text{Si}(x)$  为

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \text{Sa}(\tau) d\tau$$

所以

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t-\tau)]$$

根据  $\text{Sa}(\cdot)$  的特性，容易证明  $\text{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2}$ ， $\text{Si}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ ，于是可以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

阶跃信号  $u(t)$  通过理想低通滤波器的输出信号  $y(t)$  波形如图 3-15 所示。

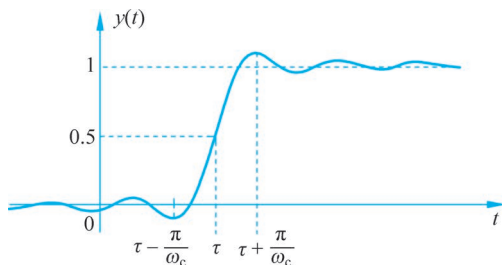


图 3-15 阶跃信号  $u(t)$  通过理想低通滤波器的输出信号波形

从图 3-15 可以看出,理想低通滤波器的阶跃响应  $y(t)$  比输入的阶跃信号  $u(t)$  延迟了一段时间  $\tau$ ,这个  $\tau$  就是理想低通滤波器相频特性的斜率。阶跃响应(Step Response)从最小值上升到最大值所需的时间,称为阶跃响应的上升时间(Rise Time),记为

$$t_r = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f_c} \quad (3-34)$$

可见,上升时间  $t_r$  与理想低通滤波器的截止频率  $\omega_c$  成反比。 $\omega_c$  越大,上升时间  $t_r$  就越短;当  $\omega_c$  趋于无穷大(此时理想低通滤波器就变为无失真传输系统)时, $t_r$  就趋于零。

也有将上升时间  $t_r$  定义为从输出最终值的 10% 上升到 90% 所需的时间,即

$$t_r = \frac{0.44}{f_c} \quad (3-35)$$

其实,在  $t_r$  的两种定义中,上升时间与截止频率成反比的特性并没有改变。

从图 3-15 中还可以看到吉布斯现象,即在间断点前后出现波形的振荡,其振荡的最大峰值约为阶跃突变值的 9%,且该值并不随理想低通滤波器的截止频率的增大而减小。

**【例 3-7】** 求信号  $x(t) = \text{Sa}(t) \cos 2t$  通过理想低通滤波器的输出  $y(t)$ 。

**解** 由于有

$$F[\text{Sa}(t)] = \pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad F[\cos(2t)] = \pi\delta(\omega - 2) + \pi\delta(\omega + 2)$$

所以

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \{F[\text{Sa}(t)] * F[\cos(2t)]\} = \frac{\pi}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega - 2}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega + 2}{2}\right)$$

前面已求出理想低通滤波器的频率响应为  $H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) e^{-j\omega\tau}$ ,于是有

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \left[ \frac{\pi}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega - 2}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega + 2}{2}\right) \right] \left[ \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) e^{-j\omega\tau} \right]$$

根据如图 3-16 所示的  $X(\omega)$  和  $H(\omega)$ ,可以得到输出如下。

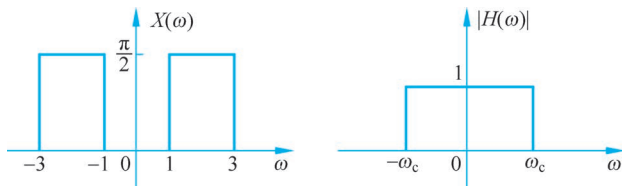


图 3-16 例 3-7 的  $X(\omega)$  和  $H(\omega)$

当  $\omega_c > 3$  时,有

$$Y(\omega) = \left[ \frac{\pi}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega - 2}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega + 2}{2}\right) \right] e^{-j\omega\tau}$$

所以

$$y(t) = \text{Sa}(t - \tau) \cos 2(t - \tau)$$

当  $\omega_c < 1$  时,输入信号的所有频率分量都不能通过系统,即

$$Y(\omega) = 0, \quad y(t) = 0$$

当  $1 \leq \omega_c \leq 3$  时,只有  $[1, \omega_c]$  频率范围内的信号成分能通过系统,于是有

$$Y(\omega) = \left[ \frac{\pi}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega - \frac{\omega_c + 1}{2}}{\omega_c - 1}\right) + \frac{\pi}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega + \frac{\omega_c + 1}{2}}{\omega_c - 1}\right) \right] e^{-j\omega\tau}$$

利用  $\text{rect}(\cdot)$  的傅里叶逆变换和傅里叶变换的时移特性,可以得到

$$y(t) = \frac{\omega_c - 1}{2} \text{Sa} \left[ \frac{\omega_c - 1}{2} (t - \tau) \right] \cos \left[ \frac{\omega_c + 1}{2} (t - \tau) \right]$$

### 3.4.3 移相器(希尔伯特变换器)

如图 3-17 所示,如果一个移相器(Phase Shifter)的幅频响应和相频响应分别为

$$|H(\omega)| = 1, \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases} \quad (3-36)$$

那么这个移相  $90^\circ$  的系统也称为希尔伯特变换器(Hilbert Transform)。

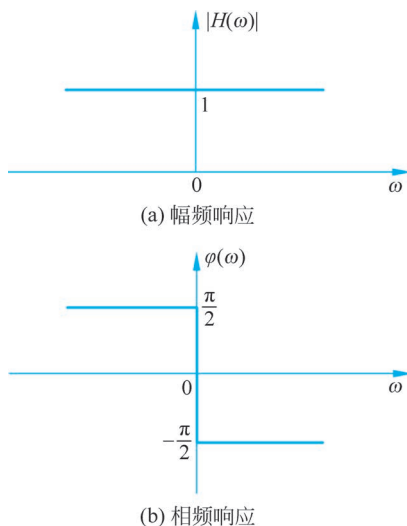


图 3-17 移相器幅频响应和相频响应

可见,希尔伯特变换器并不改变系统输入信号的振幅谱,而只改变其相位谱,所以当系统的输入信号为能量信号时,系统输出信号的能量谱相对输入信号是不变的,故其能量也是不变的;当系统的输入信号为功率信号时,系统输出信号的功率谱相对输入信号是不变的,



第 34 集  
微课视频



第 35 集  
微课视频



第 36 集  
微课视频



第 37 集  
微课视频

故其功率也是不变的。

希尔伯特变换器的频率响应可以写为

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & \omega > 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}}, & \omega < 0 \end{cases} = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases} = -j\text{Sgn}(\omega)$$

从物理意义上看,进行两次希尔伯特变换,即做了两次  $90^\circ$  移相,相当于共做了  $180^\circ$  移相,因此相当于对原信号进行了时间的翻转。这一点也可以从两个串联的希尔伯特变换器的等效系统的频率响应来证明,即

$$H_{\text{等效}}(\omega) = H(\omega)H(\omega) = [-j\text{Sgn}(\omega)][-j\text{Sgn}(\omega)] = -1$$

根据  $\text{Sgn}(\cdot)$  的傅里叶变换和傅里叶变换的互易对称性,可以得到希尔伯特变换器的冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (3-37)$$

所以,一个信号  $x(t)$  通过希尔伯特变换器的输出信号  $\hat{x}(t)$  为

$$\hat{x}(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau \quad (3-38)$$

若信号  $z(t)$  为两个信号  $x(t)$  和  $y(t)$  的卷积,即  $z(t) = x(t) * y(t)$ , 可以推出其希尔伯特变换为

$$\hat{z}(t) = \hat{x}(t) * y(t) = x(t) * \hat{y}(t)$$

**证明**

$$\begin{aligned} \hat{z}(t) &= z(t) * \frac{1}{\pi t} = [x(t) * y(t)] * \frac{1}{\pi t} = \left[ x(t) * \frac{1}{\pi t} \right] * y(t) = \hat{x}(t) * y(t) \\ &= x(t) * \left[ y(t) * \frac{1}{\pi t} \right] = x(t) * \hat{y}(t) \end{aligned}$$

证毕。

由式(3-38)很容易得出,实信号的希尔伯特变换依然是实信号。进一步还可以得出,实信号  $x(t)$  与其希尔伯特变换  $\hat{x}(t)$  是正交的,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)dt = 0 \quad (3-39)$$

**证明**

实信号  $x(t)$  与其希尔伯特变换  $\hat{x}(t)$  的互相关为

$$R_{x\hat{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t-\tau)dt$$

根据维纳-辛钦定理,可以推导出

$$R_{x\hat{x}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [X(\omega)\hat{X}^*(\omega)]e^{j\omega\tau} d\omega$$

取  $\tau=0$ , 可以得到

$$\begin{aligned} R_{x\hat{x}}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\hat{X}^*(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\{X(\omega)[-j\text{Sgn}(\omega)]\}^* d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)X^*(\omega)[j\text{Sgn}(\omega)]d\omega \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 [j\text{Sgn}(\omega)] d\omega$$

对于实信号  $x(t)$ ,  $|X(\omega)|^2$  是关于  $\omega$  的偶信号, 而  $\text{Sgn}(\omega)$  是关于  $\omega$  的奇信号, 所以  $|X(\omega)|^2 [j\text{Sgn}(\omega)]$  是关于  $\omega$  的奇信号, 于是可以推导出

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 [j\text{Sgn}(\omega)] d\omega = 0$$

证毕。

还可以定义希尔伯特反变换器, 其频率响应可表达为

$$\hat{H}(\omega) = \frac{1}{H(\omega)} = j\text{Sgn}(\omega)$$

进一步得到希尔伯特反变换器的冲激响应为

$$\hat{h}(t) = -\frac{1}{\pi t}$$

**【例 3-8】** 求信号  $x(t) = \cos\omega_0 t$  的希尔伯特变换  $\hat{x}(t)$ 。

**解** 由于

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

于是有

$$\hat{X}(\omega) = X(\omega)[-j\text{Sgn}(\omega)] = -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

所以

$$\hat{x}(t) = \sin\omega_0 t$$

进一步, 可以得到

$$H(\sin\omega_0 t) = -\cos\omega_0 t, \quad H[\delta(t)] = \frac{1}{\pi t}, \quad H\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -\delta(t)$$

**【例 3-9】** 若信号  $x(t)$  的傅里叶变换为  $X(\omega)$ , 求信号  $y(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$  的傅里叶变换  $Y(\omega)$ 。

**解** 由于信号  $\hat{x}(t)$  的傅里叶变换为

$$\hat{X}(\omega) = X(\omega)[-j\text{Sgn}(\omega)]$$

所以信号  $y(t)$  的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega) + j\hat{X}(\omega) = X(\omega) + j[X(\omega)][-j\text{Sgn}(\omega)] = X(\omega)[1 + \text{Sgn}(\omega)] \\ &= \begin{cases} 2X(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} = 2X(\omega)U(\omega) \end{aligned}$$

可见,  $Y(\omega)$  为  $X(\omega)$  的  $\omega > 0$  部分, 即具有单边频谱(Unilateral Spectrum)的特性。若  $x(t)$  为实信号, 信号  $y(t)$  称为  $x(t)$  的解析信号(Analytic Signal)。

**【例 3-10】** 对于窄带信号  $x(t) = a(t)\cos\omega_0 t$ , 其中  $a(t)$  相对  $\cos\omega_0 t$  而言是慢变化信号, 即其最高频率  $\omega_c \ll \omega_0$ , 求其希尔伯特变换  $\hat{x}(t)$ 。

**解** 假设  $a(t)$  的傅里叶变换为  $A(\omega)$ , 可以得到

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} A(\omega) * [\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{2} A(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} A(\omega + \omega_0)$$

由于  $a(t)$  的最高频率为  $\omega_c$ , 所以当  $|\omega| > \omega_c$  时,  $A(\omega) = 0$ 。同时, 由于  $\omega_c \ll \omega_0$ , 则  $A(\omega - \omega_0)$  的频率范围为  $(0, 2\omega_0)$ ,  $A(\omega + \omega_0)$  的频率范围为  $(-2\omega_0, 0)$ 。于是有

$$\begin{aligned}\hat{X}(\omega) &= X(\omega)[-j\text{Sgn}(\omega)] = -\frac{j}{2}A(\omega - \omega_0) + \frac{j}{2}A(\omega + \omega_0) \\ &= \frac{1}{2\pi}[-j\pi A(\omega - \omega_0) + j\pi A(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2\pi}A(\omega) * [-j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)]\end{aligned}$$

所以

$$\hat{x}(t) = a(t)\sin\omega_0 t$$

可见,窄带信号(Narrowband Signal)的希尔伯特变换只需对其快变化信号进行。

### 3.5 离散时间线性时不变系统时间域分析

与连续时间线性时不变系统的推导类似,任意离散时间信号  $x[n]$  均可以分解为单位冲激信号  $\delta[n]$  的累加,即

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$$

如图 3-18 所示,如果定义单位冲激函数  $\delta[n]$  通过线性时不变系统的输出  $h[n]$  为该系统的单位冲激响应(Unit Impulse Response),那么根据线性时不变系统的性质,可以得到信号  $x[n]$  通过该系统的输出  $y[n]$ 。

如图 3-19 所示,由于定义了  $\delta[n]$  通过线性时不变系统的输出为  $h[n]$ ,因此可以推导出:  $\delta[n-m]$  通过该系统的输出为  $h[n-m]$ ;  $x[m]\delta[n-m]$  通过该系统的输出为  $x[m]h[n-m]$ ,于是得到信号  $x[n]$  通过该系统的输出  $y[n]$  为

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \quad (3-40)$$

即

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (3-41)$$

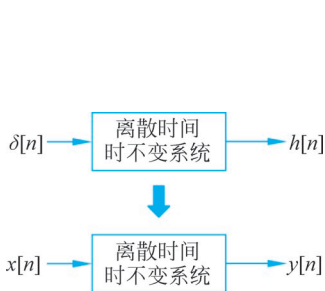


图 3-18 离散时间线性时不变系统冲激响应

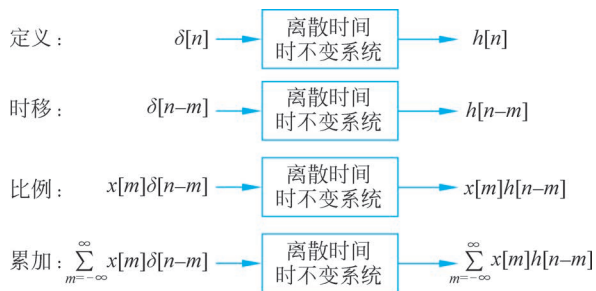


图 3-19 离散时间线性时不变系统时间域分析

可见,信号  $x[n]$  通过线性时不变系统的输出  $y[n]$  是  $x[n]$  与系统单位冲激响应  $h[n]$  的卷积。这就是离散时间线性时不变系统的时间域分析公式。

**【例 3-11】** 求  $u[n]$  通过线性时不变系统  $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$  的输出。

**解** 将  $u[n]$  和  $h[n]$  代入式(3-41),可以得到

$$y[n] = u[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[n-m] \left(\frac{1}{3}\right)^m u[m]$$

当  $n < 0$  时,有

$$y[n] = 0$$

当  $n = 0$  时,有

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

当  $n > 0$  时,有

$$y[n] = \sum_{m=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

所以

$$y[n] = \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n]$$

可见,离散时间线性时不变系统在时间域上可唯一地用单位冲激响应  $h[n]$  来描述,模型如图 3-20 所示。

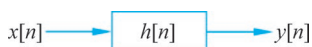


图 3-20 离散时间线性时不变系统的时间域模型

### 3.6 离散时间线性时不变系统频率域分析

同样,可以将离散时间线性时不变系统单位冲激响应  $h[n]$  的傅里叶变换  $H(e^{j\Omega})$  称为该系统的频率响应,即

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} \quad (3-42)$$

$H(e^{j\Omega})$  同样是离散时间线性时不变系统在频率域上的唯一描述,一般可以写为

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| e^{j\varphi(e^{j\Omega})} \quad (3-43)$$

其中,  $|H(e^{j\Omega})|$  称为该离散时间系统的幅频响应;  $\varphi(e^{j\Omega})$  称为该离散时间系统的相频响应。

对式(3-41)的两边分别作傅里叶变换,利用傅里叶变换的时间域卷积特性,可以得到

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}) \quad (3-44)$$

也就是说,离散时间系统输出信号  $y[n]$  的傅里叶变换是输入信号  $x[n]$  的傅里叶变换与系统频率响应  $H(e^{j\Omega})$  的相乘。这就是离散时间线性时不变系统的频率域分析公式。

**【例 3-12】** 用频率域分析法重新求解例 3-11。

**解** 由于有

$$U(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2k\pi), \quad H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

代入式(3-44),可以得到

$$\begin{aligned}
Y(e^{j\Omega}) &= X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) = \left[ \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2k\pi) \right] \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}} \\
&= \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}} \delta(\Omega - 2k\pi) \\
&= \frac{\frac{3}{2}}{1 - e^{-j\Omega}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}} \delta(\Omega - 2k\pi) \\
&= \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2k\pi) \right] - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}
\end{aligned}$$

所以

$$y[n] = \frac{3}{2}u[n] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] = \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n]$$

可见,例 3-11 的时间域分析法和例 3-12 的频率域分析法所得的系统输出结果是完全一致的。

显而易见,离散时间线性时不变系统的时间域分析法和频率域分析法与连续时间线性时不变系统是一样的,只是此时的卷积是离散时间信号的卷积,此时的傅里叶变换是离散信号的傅里叶变换。

### 3.7 离散时间线性时不变系统的差分方程

类似地,离散时间线性时不变系统的输入信号  $x[n]$  和输出信号  $y[n]$  的关系还可以用差分方程来描述。一般而言,这个差分方程是  $N$  阶的线性常系数差分方程,即

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (3-45)$$

其中,  $a_k$  和  $b_k$  为差分方程的常系数;  $M < N$ 。

可以推导出

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k] \quad (3-46)$$

可见,通过递推的方法,系统的输出信号  $y[n]$  可以由输入信号  $x[n]$  及其前  $M$  个值和  $y[n]$  的前  $N$  个值得到。

**【例 3-13】** 已知激励  $x[n] = \delta[n]$ ,  $y[-1] = 2$ , 求系统  $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = \frac{3}{4}x[n]$  的响应。

**解** 对于  $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = \frac{3}{4}x[n]$ , 可以得到

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{3}{4}x[n]$$

由于  $y[-1]=2, x[n]=\delta[n]$ , 因此可以推导如下。

当  $n=0$  时, 有

$$y[0] = \frac{1}{4}y[-1] + \frac{3}{4}x[0] = \frac{1}{4} \times 2 + \frac{3}{4} \times 1 = \left(\frac{1}{4}\right) \times 2 + \frac{3}{4}$$

当  $n=1$  时, 有

$$y[1] = \frac{1}{4}y[0] + \frac{3}{4}x[1] = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left[\left(\frac{1}{4}\right) \times 2 + \frac{3}{4}\right] + \frac{3}{4} \times 0 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 2 + \left(\frac{1}{4}\right) \times \frac{3}{4}$$

当  $n=2$  时, 有

$$\begin{aligned} y[2] &= \frac{1}{4}y[1] + \frac{3}{4}x[2] = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 2 + \left(\frac{1}{4}\right) \times \frac{3}{4}\right] + \frac{3}{4} \times 0 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} \end{aligned}$$

当  $n=3$  时, 有

$$\begin{aligned} y[3] &= \frac{1}{4}y[2] + \frac{3}{4}x[3] = \left(\frac{1}{4}\right) \times \left[\left(\frac{1}{4}\right)^3 \times 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4}\right] + \frac{3}{4} \times 0 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{3}{4} \end{aligned}$$

...

当  $n \geq 0$  时, 可以得到

$$y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \times 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{3}{4} = \frac{5}{4^{n+1}}$$

对于  $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = \frac{3}{4}x[n]$ , 还可以得到

$$y[n-1] = 4y[n] - 3x[n]$$

当  $n=-1$  时, 有

$$y[-2] = 4y[-1] - 3x[-1] = 4 \times 2 - 3 \times 0 = 4 \times 2$$

当  $n=-2$  时, 有

$$y[-3] = 4y[-2] - 3x[-2] = 4 \times [4 \times 2] - 3 \times 0 = 4^2 \times 2$$

当  $n=-3$  时, 有

$$y[-4] = 4y[-3] - 3x[-3] = 4 \times [4^2 \times 2] - 3 \times 0 = 4^3 \times 2$$

...

当  $n < 0$  时, 可以得到

$$y[n] = 4^{-n-1} \times 2 = \frac{2}{4^{n+1}}$$

所以

$$y[n] = \frac{2}{4^{n+1}} + \frac{3}{4^{n+1}}u[n]$$

类似于微分方程的经典解法, 差分方程的解也可以分解为齐次解和特解, 即

$$y[n] = y_c[n] + y_p[n] \tag{3-47}$$

或分解为零输入响应和零状态响应, 即

$$y[n] = y_s[n] + y_x[n] \quad (3-48)$$

**【例 3-14】** 已知  $x[n]=n, y[-1]=2$ , 分别用齐次解和特解的分解方法、零输入响应和零状态响应的分解方法求解差分方程  $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = \frac{3}{4}x[n]$  的解。

**解** 特征方程为

$$\lambda - \frac{1}{4} = 0$$

特征根为

$$\lambda = \frac{1}{4}$$

(1) 齐次解和特解的分解方法。

齐次解为

$$y_c[n] = c \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

由于输入信号  $x[n]=n$ , 选特解  $y_p[n]$  具有  $An+B$  的形式, 代入差分方程, 有

$$An + B - \frac{1}{4}[A(n-1) + B] = \frac{3}{4}n$$

于是有

$$A - \frac{1}{4}A = \frac{3}{4}, \quad B + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}B = 0$$

则有

$$A = 1, \quad B = -\frac{1}{3}$$

即

$$y[n] = c \left(\frac{1}{4}\right)^n + n - \frac{1}{3}$$

将  $y[-1]=2$  代入后, 可以得到

$$c = \frac{5}{6}$$

所以

$$y[n] = \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + n - \frac{1}{3}$$

(2) 零输入响应和零状态响应的分解方法。

零输入响应可以写为

$$y_s[n] = c_s \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

将  $y[-1]=2$  代入后, 可以得到

$$c_s = \frac{1}{2}$$

则零输入响应为

$$y_s[n] = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

根据特征根和  $y_p[n]$  的表达式, 零状态响应可以记为

$$y_x[n] = c_x \left(\frac{1}{4}\right)^n + n - \frac{1}{3}$$

将零状态, 即  $y[-1]=0$  代入后, 可以得到

$$c_x = \frac{1}{3}$$

则零状态响应为

$$y_x[n] = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n + n - \frac{1}{3}$$

所以

$$y[n] = y_s[n] + y_x[n] = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n + n - \frac{1}{3}$$

与微分方程的经典求解类似, 差分方程特解或零状态响应的求解有时也是比较烦琐的。好在对于零状态响应的求解, 依然可以根据系统的线性时不变特性借助离散信号的卷积运算来解决。事实上, 3.5 节介绍的离散时间线性时不变系统时域分析方法所求出的响应就是系统的零状态响应。

### 习题 3

**3-1** 当  $x(t) = u(t)$  输入一个线性时不变系统时, 输出为  $y(t) = 5tu(t-2) - 10u(t-2)$ , 试求系统的冲激响应  $h(t)$ 。如果输入变成  $x(t) = e^{-|t|}$ , 那么输出  $y(t)$  是什么?

**3-2** 将信号  $x(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$  输入一个线性时不变系统, 已知该系统的冲激响应为  $h(t) = \sum_{i=0}^4 \left(1 - \frac{i}{5}\right) \delta(t-i)$ , 试画出系统的输出波形。

**3-3** 已知线性时不变系统的冲激响应为  $h(t) = \frac{\sin^2(3\pi t)}{\pi t^2}$ , 求信号  $x(t) = \cos 2\pi t + \sin \pi t$  通过该系统的输出  $y(t)$ 。

**3-4** 已知一个线性时不变系统的频率响应为  $H(\omega) = \frac{1}{3+j\omega}$ , 如果该系统的输出信号为  $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$ , 试求此时输入系统的信号  $x(t)$ 。

**3-5** 一个线性时不变系统如图 3-21 所示, 如果  $h_1(t) = u(t)$ ,  $h_2(t) = \delta(t-1)$ ,  $h_3(t) = -2\delta(t)$ , 求系统的等效冲激响应  $h(t)$ 。

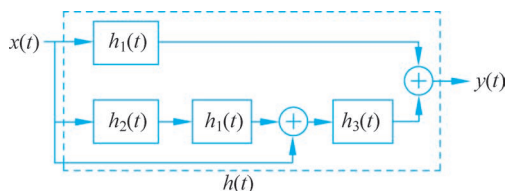


图 3-21 习题 3-5 线性时不变系统

**3-6** 已知两个线性时不变系统的频率响应分别为  $H_1(\omega)$  和  $H_2(\omega)$ , 求如图 3-22 所示的反馈互连(Feedback Interconnection)系统的频率响应。

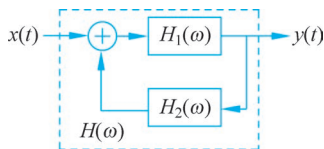


图 3-22 习题 3-6 反馈互连系统

**3-7** 已知系统的微分方程为  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$ , 初始状态为  $y(0^-) = 1, \frac{dy(0^-)}{dt} = 2$ , 求信号  $x(t) = e^{-3t} u(t)$  激励该系统的响应。

**3-8** 将信号  $x(t) = 20 \cos 100t \cos^2(10000t)$  通过一个理想低通滤波器, 滤波器的频率响应为  $H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{240}\right) e^{-5j\omega}$ , 求滤波器的输出信号  $y(t)$ 。

**3-9** 若  $R(\omega)$  和  $I(\omega)$  分别为实信号  $x(t)$  傅里叶变换  $X(\omega)$  的实部和虚部, 且当  $t < 0$  时,  $x(t) = 0$ , 请证明:  $I(\omega) = -R(\omega) * \frac{1}{\pi\omega}$ 。

**3-10** 若信号  $x(t) = a(t) \sin[\omega_0 t + \theta(t)]$ , 其中  $a(t)$  和  $\theta(t)$  相对  $\sin \omega_0 t$  而言都是慢变化的信号, 即它们的最高频率均远小于  $\omega_0$ , 求  $x(t)$  的希尔伯特变换。

**3-11** 将信号  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$  输入一个线性时不变系统, 已知该系统的单位冲激响应为  $h[n] = u[n] - u[n-3]$ , 试求此时系统的输出信号  $y[n]$ 。

**3-12** 若信号  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$  激励一个线性时不变系统的响应为  $y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ , 求该系统的单位冲激响应  $h[n]$  和频率响应  $H(e^{j\Omega})$ 。

**3-13** 已知一个系统的差分方程为  $y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n]$ , 其初始状态为  $y[-1] = -1, y[-2] = 1$ , 求该系统的零输入响应和零状态响应。