第 1 章　绪　　论

1.1　研究背景和意义

自 20 世纪 50 年代第一颗人造地球卫星成功发射以来，浩瀚太空成为人类活动的“第四疆域”。从 20 世纪 60 年代实现载人航天和登月，到 70 年代发射空间站与“旅行者”号探测器（Voyager），丰富多样的空间探测活动取得了大量的科学技术成果。现如今，人类的足迹遍布太阳系内各大行星系统和大量小天体，各类探测对揭示太阳系起源与演化、探寻地外生命等科学问题具有重要意义，航天技术在人们的日常生活和科技发展中发挥着不可替代的作用。

随着宇航推进技术的不断发展，航天器的轨道机动方式不断更新换代。早期任务大多应用传统的化学推进系统，该系统可以提供较大的推力，短时间的机动即可实现所需的速度增量，在任务设计时可以当作脉冲模型近似处理。例如，“伽利略”号探测器（Galileo）的近木点制动所需速度增量约为 630 m/s，机动时间约为 49 min，远小于绕木轨道上百天的周期[1]。早在 1964 年，苏联便开发了离子电推进发动机，用于 Zond-2 探测器的姿态控制[2]。1998 年，“深空 1 号”探测器（Deep Space-1）验证了离子电推进技术（NSTAR 发动机）的轨道机动能力[3]。相比于传统化学推进系统，电推进系统的比冲更高，约为化学推进比冲的 5~10 倍，因此更加节省燃料，能够显著降低任务消耗或增加有效载荷；但其推力量级较小，需要长时间的作用才能产生明显的速度增量，开机工作时间较长。ESA 于 2003 年发射了 SMART-1 探测器，历时十五个月，利用太阳能电推进（PPS1350-G 发动机）将探测器转移至环月轨道，成功使用电推进实现了地月转移。同年 JAXA 发射了 Hayabusa 任务，应用 μ10 电推

进发动机于 2005 年对小行星 Itokawa 进行着陆采样，并于 2010 年返回地球，首次实现了小行星采样返回。Hayabusa2 探测器于 2019 年实现了小行星 Ryugu 的着陆采样，于 2020 年返回地球。2007 年，NASA 发射了 Dawn 探测器，装备了 3 个 NSTAR 电推进发动机，先后探访了小行星带中的灶神星（小行星 Vesta）和谷神星（矮行星 Ceres）[4]，实现了谷神星的环绕探测。

近年来，电推进技术应用于多个深空探测和地球卫星任务。由 ESA 和 JAXA 合作的 BepiColombo 水星探测任务于 2018 年发射升空，任务中两个探测器均采用太阳能电推进系统（T6 发动机），经过多次地球、金星和水星引力辅助后，预计将于 2025 年到达水星[5]。NASA 于 2021 年发射了 DART 探测器，采用化学–电混合推进系统，其中电推进采用 NEXT 发动机[6]，其于 2022 年以大约 6.6 km/s 的相对速度撞击 Didymos 双小行星系统中较小的卫星 Dimorphos，该任务是人类首个行星防御实验任务。电推进技术不仅适用于轨道周期长、转移圈数少的深空探测任务，在环境更加复杂、轨道周期更短的地球卫星任务中同样适用，已广泛用于地球卫星位置保持和轨道转移任务，如地球重力场与稳态洋流探测器卫星（GOCE）、实践-9A 和实践-20 卫星[7]、Eutelsat 172B 卫星[8] 和 Boeing 702-SP 卫星平台[9-10] 等。“星链”星座将由具备电推进轨道机动能力的上万颗小卫星组成，构建这类由小卫星组成的具备灵活机动能力的星座是未来各国空间任务的发展趋势[11]。此外，利用太阳光压驱动的太阳帆任务也从任务设想逐步进入工程验证阶段，如 JAXA 的 IKAROS 任务、NASA 的 NanoSail-D 任务以及我国的 SIASAIL-I 任务[12] 等。

未来，核电推进、太阳帆等新型推进系统的技术突破和性能提升将会进一步推动空间探测活动的发展。我国也在积极加快新型推进系统的研制，缩小和国际顶尖水平的差距，以期在未来大量地球卫星、各大行星探测和小行星探测任务实施中降低燃料消耗，提升经济效益。随着电推进航天器的增多，相应的轨道设计与优化至关重要。在复杂多样的空间环境下，面向不同的空间目标采用不同机动方式，轨道动力学规律也有所差异，轨道设计与优化则要充分利用系统的动力学特性，以最小的资源消耗实现特定的任务目标。例如在 1984 年，Robert Farquhar 创造性地借用即将退役的国际日地探测卫星 3 号（ISEE-3，后更名为国际彗

星探测器，ICE）进行了人类第一次彗星近距离观测，该探测器原计划于 2014 年回到近地轨道，虽点火失败但仍成为空间探测史上的传奇[13]。2005 年，ESA 发起了第 1 届国际空间探测轨迹优化大赛（Global Trajectory Optimisation Competition，GTOC），旨在提升航天任务设计水平和轨迹优化能力。受 GTOC 的启发，2009 年我国开始举办中国空间轨道设计竞赛（China Trajectory Optimisation Competition，CTOC）。至 2022 年 7 月，两项赛事均已举办 11 届，其参赛队伍和面对的任务场景有所不同，但均取得了一系列的技术突破和方案成果[14]。

与离散的脉冲机动方式不同，电推进发动机持续地作用于航天器，产生连续推力轨迹。在一般情形下，连续推力的大小和方向是待优化的复杂非线性函数，连续推力作用的轨道动力学方程难以解析积分，这些问题使得其轨迹优化更加困难。如表 1.1 和表 1.2 所示，在以往数届 GTOC 和 CTOC 中（尤其是 2005—2015 年的竞赛）连续推力轨迹优化问题均有涉及。竞赛举办至今，清华大学团队优化单条轨迹的计算耗时已从数天降至几十毫秒，并获得了 GTOC11 的冠军。然而，连续推力轨迹优化仍有一系列难题急需解决，这类优化问题的求解大多依赖于数值优化方法，能否得到最优解依赖于初值的好坏，在任务设计中数值优化的适应性和计算效率均有所不足；大行星附近的多圈连续推力轨迹非线性强，多圈的轨道积分和优化造成计算负担重，同时轨迹的最优性难以保证。

表 1.1　含连续推力轨迹优化的各届 GTOC 及简介

GTOC	时间	题目	问题简介
1	2005 年	Asteroid deflection	多次引力辅助小行星撞击
2	2006 年	Multiple asteroid rendezvous	多次引力辅助多目标交会
3	2007 年	Multiple sample return	多次引力辅助多目标采样返回
4	2009 年	Asteroids billiard	多次飞越和末次交会
5	2010 年	Penetrators delivered	多目标小行星撞击和交会
6	2012 年	Galilean moons global mapping	木卫遍游飞越探测
7	2014 年	Multi-spacecraft exploration	多航天器多目标交会
8	2015 年	Long-baseline interferometry mapping	地月空间三星 VLBI 观测
11	2021 年	“Dyson Sphere” building	多航天器戴森球建造问题

表 1.2 含连续推力轨迹优化的各届 CTOC 及简介

CTOC	时间	问题简介
1	2009 年	近地小行星采样返回
2	2010 年	火星和多目标探测
3	2011 年	多目标多任务行星和小天体探测
4	2012 年	多目标多任务小天体探测
5	2013 年	载人近地小行星探测
6A	2014 年	多体引力场中近地小行星取样返回
7B	2015 年	近地轨道卫星编队重构任务
8A	2016 年	多目标太阳同步轨道空间碎片清除

本书研究连续推力轨迹优化的协态初值估计与同伦延拓方法，在间接法的理论基础上进行新的理论分析，发展新的优化方法，解决间接法的初值敏感性、多圈轨迹强非线性和局部最优解众多等核心问题。针对间接法的初值猜测，从理论角度分析协态变量和轨道之间的映射关系，初步解决协态变量无明确物理意义这一难题；发展可以解析初始化的同伦延拓方法，建立解析解到最优解之间的联系。针对多圈轨迹强非线性问题，分析多圈轨迹的典型特征，建立合适的近似模型和优化问题，初步刻画局部解的规律。本书在上述目标的指导下以期发展高效、稳健的间接优化方法，提高轨迹优化能力，服务于高水平的任务设计，为未来电推进或太阳帆航天器的任务实施提供有效的理论支撑和方法支持。

1.2 研究现状综述

在连续推力轨迹优化问题中，控制可以在所考察的全过程中持续存在，连续地影响受控对象的状态，经典的“最速降线问题”即是一个典型的例子[15]。这一类问题的目标是寻找某个轨迹，在满足某些初始和末端时刻边界条件以及过程中路径约束的同时，使某性能指标达到最小（或最大）[16]。轨迹描述了全过程中系统的状态，满足所有条件的轨迹是该问题的可行解，具有最小性能指标的可行解称为“最优解”。本书所考虑的受控对象为连续推力作用下的航天器[16]，系统的动力学微分方程根据具体问题的不同稍有差异。随着连续推进系统的不断发展与应用，国内外

学者已在连续推力轨迹优化领域开展了丰富的研究，主要的推力模型为定比冲定推力模型[17-20]、变比冲模型[21-24] 以及太阳帆模型[25-28] 等；所处的动力学环境主要有太阳中心引力场[26,29]、地球中心引力场[30-32]、小行星附近不规则引力场[33-35] 以及限制性三体引力场[36-38] 等。本节首先介绍连续推力轨迹优化方法的研究现状，然后依次介绍间接法中的协态初值猜测和同伦延拓方法的相关研究，最后介绍连续推力多圈轨迹优化方法的研究现状。

1.2.1　连续推力轨迹优化方法

连续推力轨迹优化问题本质上是一个最优控制问题，此问题可以利用变分法或极大值原理[39] 推导一阶必要条件[40]，构造求解算法进行求解，以此为基础发展的方法统称为“间接法”[41-43]。此方法可以用协态变量表达出理论上的最优控制规律，得到某类问题解的一般规律，如燃料最优控制通常为砰砰控制[44]、时间最优控制为推力满推[45] 等。因此，求解满足一阶必要条件的协态变量即可得到相应的最优控制规律和最优轨迹。与之相比，另一类方法称为“直接法”[46-48]，其通过引入离散网格将连续优化问题离散化后建模为非线性规划问题（nonlinear programming，NLP）进行求解。此方法构造简单、形式统一，可以处理复杂约束，但通常需要大量的优化变量来精准刻画连续优化问题[41]。在数值求解时，直接法数值迭代的目标是直接最小化（或最大化）性能指标函数，而间接法则是为了求解满足一阶必要条件的协态变量，两种方法的命名体现了这两种求解思路上的区别。此外，混合法[49-50] 将协态变量与状态变量一同离散化，并建立非线性规划问题进行求解，用协态变量表示最优控制，在一定程度上减少了优化变量个数，提升了计算效率，但在一般问题的应用上少于前两种方法。动态规划[51] 和进化类算法[41] 在连续推力轨迹优化方面也有一些应用研究。下面主要介绍直接法和间接法的研究现状。

1.2.1.1　直接法

直接法的构造形式和种类较多，但其基本思想是引入离散网格，按照网格节点值离散控制变量和/或状态变量，将动力学微分方程、边界条件和路径约束转化为离散变量的代数约束条件，从而使连续轨迹优化问题

建模为大量离散变量的非线性规划问题。非线性规划问题的求解通常采用大规模参数优化求解器，如 SNOPT[52]、NPSOL[53] 和 IPOPT[54] 等。按照求解方法的不同，直接法通常分为直接配点法（direct collocation method，又称“直接转录法”，direct transcription method）和直接打靶法（direct shooting method），直接打靶法又分为单步打靶法和多步打靶法[55]。具体而言，配点法根据网格节点离散控制和状态变量，采用数值微分方法将微分方程转化为代数约束方程，此方法对应的常用轨迹优化软件为 GPOPS[56] 和 DITAN[46] 等；而打靶法在区间内只离散控制变量，采用数值积分方法将微分方程转化为代数方程，单步打靶法考虑终端状态约束，而多步打靶则考虑多个子区间的终端状态约束，常见的软件为 GALLOP[57] 和 MALTO[58]。

直接法中配点法的研究较多，根据数值微分格式的不同发展了各类配点法[16]。例如，在离散控制和状态变量后，可以采用欧拉格式或中心差分格式构造代数约束[59]。Hargraves 等[60] 使用三次埃尔米特插值将微分方程约束转化为网格中间节点处的代数约束，整理得到代数约束即为辛普森公式，该方法称为“埃尔米特–辛普森方法”。代数约束的形式为隐式积分公式，各类不同数值微分格式下的配点法具有不同的隐式积分公式[61]。Herman 等[62] 提出了高阶的高斯–洛巴托方法，使用了非均匀的网格构造形式，在相同个数的离散网格下具有更高的近似精度。Coverstone 等[63-64] 提出了微分包含方法，将配点法中显式的控制变量移除，大幅减少了优化变量的个数，求解了地球–火星定比冲问题、地球–金星–火星变比冲引力辅助问题。Fahroo 等[65] 以切比雪夫正交多项式的零点决定离散网格点，并将它们作为高斯积分点，提出了切比雪夫伪谱法。伪谱法是一类特殊的配点法，相比基于差分格式的配点法，其通常具有更高的计算效率。依据正交多项式和积分点的不同，文献中提出了不同形式的伪谱法[66-67]。除配点法的研究外，Conway 等[61,68] 使用数值积分方法，以较少的区间个数构造多步打靶法，由于控制变量的网格节点个数是状态变量离散节点个数的数倍，该方法容易处理控制变量变化显著快于状态变量的问题。Huntington 等[69] 对比了不同区间个数的直接打靶法的仿真精度和计算效率。此外，将控制变量参数化[70-72]、用协态表示控制律[49] 或基于李雅普诺夫反馈控制[73] 等方法可以进一步降低优化变量的个数，但这

些方法仅能求解预设控制律下的近优解，复杂控制律的参数化表示困难且需要较多参数才能逼近最优解。

直接法的构造不依赖于最优控制问题的一阶必要条件，提高了处理复杂问题的稳健性，同时不必引入并离散协态变量，降低了待优化变量的个数，但无法保证结果的最优性。在伪谱法中，乘子等价映射给出了非线性规划问题和最优控制问题的一阶必要条件的等价性[74]，因此可以由伪谱法优化结果给出协态变量的离散值。直接法的初始化仅需要提供相对容易给出的状态和控制变量的初值，具有较好的收敛特性，同时稀疏非线性规划问题求解器的发展也进一步为直接法的求解和应用提供了良好的工具。直接法不需要推导最优控制规律和复杂的协态微分方程，程序实现简单，能够处理复杂的约束条件，容易改变部分条件重新计算，并且不明显依赖于良好的初值猜测[16]。但是，直接法的求解（或非线性规划问题的求解）仍然依赖于初值的好坏，在实际计算中合理而准确的初值猜测是必须的，问题的离散化也导致仅能求解节点处控制和状态的值，精度依赖于网格个数，且无法精确表示砰砰控制[75-76]。通常可以用精度较低（或网格较少）的方法的结果作为初步解[46]（如形函数方法[77-78] 和 Sims-Flanagan Transcription（SFT）方法[79] 等），并以此为初值进一步求解高精度的最优解。

1.2.1.2　间接法

间接法的理论基础是变分法[80]，引入协态变量和待定乘子（均为拉格朗日乘子法中的乘子）将最优控制问题转换为泛函极值问题，依据变分法或极大值原理给出一阶必要条件（包括欧拉–拉格朗日方程、最优控制、各个静态条件和横截条件等），具体推导过程可以参考文献 [15]。据此，最优控制问题可以转化为两点边值问题（two-point boundary value problem，TPBVP）或多点边值问题（multi-point boundary value problem，MPBVP）[81-82]，进一步采用非线性方程求解算法进行求解。常用的求解方法为单步打靶法，即假设初始状态和协态给定，在最优控制下积分状态和协态微分方程得到终端时刻的状态和协态，迭代求解合适的初始协态等打靶变量使所有一阶必要条件最终得到满足，大多数求解器（如 SEPTOP[83]）采用了这种方法。

在一阶必要条件中，最优控制由极大值原理给出，当控制力大小和方

向无约束时，最优控制选取使哈密顿函数对控制偏导数为零的值；而当控制力大小或方向有约束时，则需要通过哈密顿函数得到切换函数（switching function），通过判断切换函数值来确定最优控制的取值。当出现奇异情况时，利用摄动法或将切换函数作为约束[84]等方法，可以确定最优控制规律，但此种情况出现较少，一般无须考虑。若进一步考虑解的最优性，Jo 等[85]提出了利用二阶充分条件判断最优解的方法，但在现有研究中，通常认为求解得到满足一阶必要条件的解即为最优解[17,86]。当存在路径约束时，需要引入互补松弛条件和刚性条件[87]进行求解，此时间接法的构造十分复杂[88]，相比之下直接法更具优势。在打靶求解时，非线性方程组依赖于数值迭代方法[89]，通常难以求解，原因主要有以下三点：① 数值迭代需要合理的初值猜测，而协态变量的物理意义并不明确，难以估计它们的正负和量级；② 较少的打靶变量和问题本身的复杂性使得问题的求解对协态变量初值极其敏感；③ 对某些受约束的问题，控制量和协态均可能存在突变，进一步增加了数值积分和求解的难度[16,90]。

间接法的研究主要集中在协态初值猜测[91]、切换函数检测[92]、雅可比矩阵的求解[93]以及砰砰控制的平滑化[86]等方面。其中协态初值猜测中部分方法可以直接给出协态的估计值，也称为“协态初值估计方法”。Pontani 等[94]采用粒子群优化算法优化性能指标和边界条件，求解了地球–火星交会问题。Casalino 等[95]采用遗传算法结合间接法搜索最小化边界条件的协态初值估计值，进一步采用梯度类算法打靶求解。Russell[38]采用协态–控制变换（adjoint-control transformation，ACT）[96]提供初值，采用主矢量方法求解了圆形限制性三体问题中的轨迹优化问题。协态初值猜测方法的详细研究将在 1.2.2 节中再次介绍和分析。Jiang 等[17]给出了笛卡儿坐标系下采用龙格–库塔定步长积分时的切换函数检测方法，并进一步扩展应用到变步长积分中[97-98]。Topputo 等[36]采用解析雅可比矩阵代替数值差分近似，提高了算法的稳健性和仿真精度。Casalino 等[99]预设了推力弧段求解燃料最优问题，对比了选取固定弧段和优化弧段参数的仿真效果，此方法简化了原优化问题但难以保证结果的最优性。Haberkorn 等[100]使用同伦延拓方法以能量最优问题的解作为初值，通过同伦参数的数值迭代逐步求解燃料最优问题，避免了预设控制律的问题。Gergaud 等[101]运用同伦延拓方法研究了连续推力轨迹和脉冲轨迹

的联系和对比；Pan 等[102] 进一步研究了同伦函数的零点路径跟踪问题；Taheri 等[20,103] 进一步扩展了同伦函数的形式。同伦延拓方法的详细研究进展将在 1.2.3 节中介绍。

此外，在求解初值敏感问题时，为避免长时间的积分所带来的误差累积，可以采用多步打靶法求解，以增多打靶变量的个数为代价降低积分区间的长度。该方法在一定程度上减小了初值敏感性，但增加了猜测变量的个数以及非线性方程的维度。Park 等[104-105] 根据哈密顿–雅可比理论，通过构造生成函数和正则变换，得到一般边界条件下的最优反馈控制律及其最优轨迹，该方法依赖于生成函数的构造，难以在一般非线性轨迹优化问题中应用。相比直接法，间接法可以保证一阶必要条件并给出最优控制规律，打靶变量个数较少。但是，间接法的初值猜测十分困难，难以应对复杂约束，改变边界条件后一阶必要条件需要重新推导。

1.2.2 间接法协态初值猜测研究

直接法和间接法均依赖于数值迭代方法求解，虽然两者所考虑的变量和所采用的求解算法均不同，但均需要提供相应的初值猜测[106]。本节首先介绍一些解析轨迹优化方法，通常这些方法均对非线性问题做了一定简化，如固定推力方向[107-108] 或限制在近圆轨道[109-110] 等。解析解可以快速求解，既能简单地为直接法提供初值猜测，也可以和数值优化方法结合进行全局设计。间接法的协态变量一般无法由解析解直接给出，其初值猜测需要一定的技巧。

当初始轨道为圆轨道时，Tsien[111-112] 首先提出了常值径向推力下的显式解析解和常值周向推力下的近似解。针对椭圆初始轨道的常值径向推力问题，Prussing 等[107] 用势能的方法分析了航天器径向位置的变化规律，并给出了逃逸条件；Mengali 等[113] 进一步分析了该方法在椭圆初始轨道任务中的应用。Battin[112] 给出了以椭圆积分表达的显示解；Mengali 等[114] 给出了基于傅里叶级数展开的解析解。Bombardelli 等[115] 用渐近展开的方法，给出了此问题的近似解；Izzo 等[116] 引入新的状态变量构造了此问题的显式解析解。针对常值周向推力问题，Quarta 等[117-118] 用摄动法研究了此问题下的近似解，讨论了近似解在圆和椭圆初始轨道条件下的应用。针对切向推力问题，Benney[119] 探讨了常值推力下的逃逸

问题，给出了近似解；Boltz[108] 求解了推力大小与引力之比为常数的问题。Bombardelli 等[120] 采用渐进展开的方法提出了常值切向推力的一阶近似解；Roa 等[121] 给出了切向推力与轨道半径成平方反比问题下的解析解。

上述解析方法均预先假设了推力形式，通常不考虑轨道转移或交会问题的边界条件。Edelbaum[122] 考虑异面圆轨道间的恒定加速度转移问题，假设每圈推力方向角恒定，推导了该问题的解析速度增量和飞行时间。Kechichian[109] 用最优控制理论研究了 Edelbaum 问题的时间最优转移，推导了半长轴、倾角以及控制力方向随时间变化的解析表达式。Casalino 等[123] 减少了 Edelbaum 方法的简化条件，研究了不同推力模型下的转移估计问题。Kluever、Casalino 和 Kechichian 等[124-126] 分别研究考虑地球阴影区情况下的 Edelbaum 问题。此外，Ruggiero 等[127] 分析了改变单个轨道根数的最优控制方向；Gao[50] 给出了轨道平均化模型下轨道转移或交会问题近优解析控制律的参数化描述。

形函数方法在处理一般情形下的行星际交会和转移问题时更为有效。Bacon[128] 首先提出了对数螺旋线形式的连续推力轨迹，推导了沿轨迹运动航天器的加速度表达式。Petropoulos 等[77] 提出了用指数正弦函数设计连续推力引力辅助轨迹的方法，Izzo[129] 随后研究了该形函数形式下兰伯特问题的解法。Vasile 等[130-131] 提出了春分点轨道根数形函数法求解引力辅助问题，并分析了该方法的最优性。Wall 等[132] 提出了分别用 5 次或 6 次逆多项式函数设计连续推力轨道转移和交会的方法，该法适宜处理行星际近平面问题，随后对小倾角情形进行了修正[133]。Taheri 等[37,134-135] 采用傅里叶级数方法研究了二维和三维轨道设计与优化问题；Novak 等[136] 探讨了形函数构造方法的一般形式，并提出了球坐标形式的形函数方法，Xie 等[137] 进一步研究了该方法对大倾角问题的应用。Zeng 等[138] 提出了轨道根数插值的方法，探究了轨道安全性问题；Huo 等[139] 研究了电帆模型下的贝塞尔曲线形函数近似；Bassetto 等[140] 探讨了已知轨迹时推进系统的参数设计。

在上述初步设计方法的基础上，间接法的协态初值猜测方法大致有如下几类：一是使用合理的猜测策略限制协态变量变化范围；二是构造轨道和协态变量之间的关系；三是借助优化算法估计协态值。Grigoriev