

离散时间系统的时域与频域分析

内 容 提 要

本章主要介绍离散时间系统的基本概念及其数学模型——差分方程、线性时不变离散系统的时域分析、频域分析以及用 MATLAB 进行离散时间系统的时域与频域分析的基本方法。

5.1 离散时间系统

5.1.1 离散时间系统的基本概念

一个系统,若其输入信号和输出信号都是连续信号,则称为连续时间系统。与此类似,若系统的输入信号和输出信号都是离散信号,则称为离散时间系统(简称离散系统),通常可用图 5.1 所示的示意图来描述。大家熟悉的电子计算机、数据控制系统和数字通信系统的核心部分都是离散系统。由于离散系统在精度、可靠性、小型化等方面比连续系统有更大的优越性,所以,自 20 世纪 60 年代以后,离散系统的应用越来越广泛。

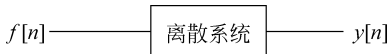


图 5.1 离散系统框图

图 5.1 中, $f[n]$ 为系统的输入(激励), $y[n]$ 为系统的输出(响应)。与连续系统一样,离散系统的响应 $y[n]$ 也可分为零输入响应 $y_{zi}[n]$ 和零状态响应 $y_{zs}[n]$,即

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

当系统具有多个初始状态时,若其零输入响应既是齐次的又是可加的,则称为零输入线性。当系统具有多个输入时,若其零状态响应既是齐次的又是可加的,则称为零状态线性。

一个离散系统,如果具有零输入线性和零状态线性,则称其为线性离散系统;否则称为非线性离散系统。

如果系统的输入延时 k_0 ,其零状态响应也延时 k_0 ,即当输入为 $f[n-k_0]$ 时,系统的零状态响应为 $y_{zs}[n-k_0]$,则称该系统为时不变离散系统。本书只讨论线性时不变离散系统。

响应不出现在激励之前的系统称为因果系统,就是说,对于因果系统,若在 $n < k_0$ 时,激励 $f[n]=0$,则在 $n < k_0$ 时,该激励所引起的响应 $y_{zs}[n]$ 也必然等于 0。

5.1.2 离散时间系统的描述

连续系统以微分方程描述,离散系统则以差分方程描述。描述线性时不变离散系统的

是常系数线性差分方程。

在离散系统中,信号的自变量 n 是离散变量,离散变量 n 一般取整数。差分方程由未知序列 $y[n]$ 及其序号增加和减少的移位序列 $(\dots, y[n+2], y[n+1], y[n-1], y[n-2], \dots)$, 以及已知的序列 $f[n]$ 所构成,有时还包括 $f[n]$ 的移位序列。下面以具体例子说明,如何用差分方程来描述离散系统。

【例 5-1】 一质点沿水平方向做直线运动,其在某一秒内所走过的距离等于前一秒所行距离的 2 倍,试列出描述该质点行程的方程式。

解 令 $y[n]$ 表示质点在第 n 秒末的行程,则根据题意,有

$$y[n+2] - y[n+1] = 2[y[n+1] - y[n]]$$

即

$$y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = 0$$

上式中待求变量的序号 $(n+2, n+1, n)$ 最多相差 2,称为二阶差分方程。

一般而言,描述线性时不变离散系统的差分方程为

$$y[n+k] + a_{k-1}y[n+k-1] + a_{k-2}y[n+k-2] + \dots + a_1y[n+1] + a_0y[n] \\ = b_m f[n+m] + b_{m-1}f[n+m-1] + \dots + b_1f[n+1] + b_0f[n]$$

或写作

$$\sum_{i=0}^k a_i y[n+i] = \sum_{j=0}^m b_j f[n+j] \quad (5.1)$$

对于因果系统,式中, $m \leq k$ 。方程中未知序列的序号 $(n+k, n+k-1, \dots, n)$ 最多相差 k ,则称该差分方程为 k 阶差分方程。即差分方程的阶数是未知序列的序号中最高与最低值之差。对于时不变系统,各未知函数的系数均为常数。

另外,差分方程中未知序列的序号是由 n 以递减方式列出的,称为后向形式的(或向右移序的)差分方程。可写作

$$\sum_{i=0}^k a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^m b_j f[n-j] \quad (5.2)$$

差分方程式(5.1)中未知序列的序号是以递增方式列出的,称为前向形式的(或向左移序的)差分方程。

【例 5-2】 如图 5.2 是电阻梯形网络。图中 α 为常数。各结点对地的电压为 $u[k]$,其中 $k=0, 1, 2, \dots, N$ 是各结点的序号,求任一结点电压应满足的差分方程。

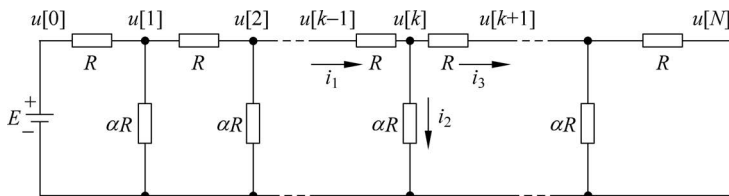


图 5.2 电阻梯形网络

解 根据基尔霍夫电流定律,对于结点 k 有

$$i_1 = i_2 + i_3$$

再将各电阻的伏安关系代入,可得方程

$$\frac{u[k-1] - u[k]}{R} = \frac{u[k]}{\alpha R} + \frac{u[k] - u[k+1]}{R}$$

整理后可得

$$\alpha u[k+1] - (2\alpha + 1)u[k] + \alpha u[k-1] = 0$$

这是二阶差分方程。显然,这里的离散自变量 k 并非时间,而是代表网络中结点顺序的编号。可见,离散自变量并不限于时间变量,其自变量将根据所描述的具体系统而异。

另外,对于离散时间系统的基本性质及其时域模拟已在第1章介绍过,在此不再赘述。

5.1.3 差分方程算子表示形式

定义算子 q 表示将序列向前(左)移一个时间间隔的运算,即有

$$qf[n] = f[n+1], \quad q^2 f[n] = f[n+2], \dots$$

定义算子 q^{-1} 表示将序列向后(右)移一个时间间隔的运算,即有

$$q^{-1} f[n] = f[n-1], \quad q^{-2} f[n] = f[n-2], \dots$$

则由此可得,差分方程式(5.1)、式(5.2)的算子形式分别为

$$\begin{aligned} (q^k + a_{k-1}q^{k-1} + \dots + a_1q + a_0)y[n] &= (b_mq^m + b_{m-1}q^{m-1} + \dots + b_1q + b_0)f[n] \\ (a_0 + a_1q^{-1} + \dots + a_{k-1}q^{-(k-1)} + a_kq^{-k})y[n] &= \\ (b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{m-1}q^{-(m-1)} + a_mq^{-m})f[n] & \end{aligned}$$

也可以分别写成以下形式:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{b_mq^m + b_{m-1}q^{m-1} + \dots + b_1q + b_0}{q^k + a_{k-1}q^{k-1} + \dots + a_1q + a_0} f[n] = \frac{N[q]}{D[q]} f[n] = H[q] f[n] \\ y[n] &= \frac{b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{m-1}q^{-(m-1)} + a_mq^{-m}}{a_0 + a_1q^{-1} + \dots + a_{k-1}q^{-(k-1)} + a_kq^{-k}} f[n] = \frac{N[q^{-1}]}{D[q^{-1}]} f[n] = H[q^{-1}] f[n] \end{aligned}$$

其中,定义 $H[q]$ 与 $H[q^{-1}]$ 为系统的转移算子。

5.2 离散时间系统的时域分析

离散系统的时域分析是对描述系统的差分方程或离散卷积和等时域数学模型的求解,以达到分析离散系统时间特性的目的。一般求解线性常系数差分方程方法有迭代法、经典解法,以及分别求零输入响应和零状态响应等方法。

5.2.1 迭代法

离散系统的输入、输出关系可以用一个线性常系数差分方程来描述。若已知输入和过去的输出就可以求出即时的输出。由于系统的输出与过去的历史状态有关,它们之间存在着迭代或递归的关系,所以对差分方程的求解可以直接采用递推的办法。

【例 5-3】 已知一阶差分方程为 $y[n] = ay[n-1] + f[n]$, 求该系统的单位响应 $h[n]$ 。

解 为了求解单位响应 $h[n]$, 令输入激励 $f[n] = \delta[n]$, 因为系统在冲激序列 $\delta[n]$ 的激励下的零状态响应就为单位响应 $h[n]$ 。即隐含初始条件为 $n < 0$ 时 $y[n] = 0$ 。则给定的差分方程变为

$$h[n] = ah[n-1] + \delta[n]$$

可依次迭代得

$$\begin{aligned} h[0] &= ah[-1] + \delta[0] = 1 \\ h[1] &= ah[0] + \delta[1] = a \\ h[2] &= ah[1] + \delta[2] = a^2 \\ &\vdots \\ h[n] &= ah[n-1] + 0 = a^n \end{aligned}$$

由初始条件可得差分方程所描述系统的单位响应是

$$h[n] = a^n \varepsilon[n]$$

从原则上说,用迭代法可以求得任意阶系统的单位响应,但对于二阶以上的系统,往往难以得到解析式解答。不过此方法概念清楚,步骤简便,常用来人工计算逐次代入求解或利用计算机求解。

5.2.2 经典解法

一般而言,一个线性时不变系统的激励为 $f[n]$,其全响应为 $y[n]$,那么描述该系统的是 k 阶差分方程(如式(5.1)或式(5.2)所示)。与连续系统的经典解法类似,差分方程的解由齐次解 $y_h[n]$ 和特解 $y_p[n]$ 构成,即

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

1. 齐次解

差分方程齐次解有两种情况:

1) 特征根均为单根

如果齐次方程的全部 k 个特征根都不相同,则差分方程的齐次解为

$$y_h[n] = A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \cdots + A_k p_k^n = \sum_{i=1}^k A_i p_i^n$$

式中,常数 $A_i (i=1, 2, \cdots, k)$ 由初始条件确定, p_i 为系统差分方程的特征根。

2) 特征根有重根

若 p_1 是特征方程的 r 重根,即有 $p_1 = p_2 = \cdots = p_r$,而其余 $k-r$ 个根是单根,则差分方程的齐次解为

$$y_h[n] = \sum_{i=1}^r A_i n^{r-i} p_1^n + \sum_{j=r+1}^k A_j p_j^n$$

式中, A_i, A_j 均由初始条件确定。

3) 特征根为复根

如果特征根为复根 p ,则一定有一对共轭复根,即有 $p = |p| e^{\pm j\theta}$,则差分方程的齐次解为

$$\begin{aligned} y_h[n] &= A_1 |p|^n e^{jn\theta} + A_2 |p|^n e^{-jn\theta} = |p|^n (A_1 \cos n\theta + jA_1 \sin n\theta + A_2 \cos n\theta - jA_2 \sin n\theta) \\ &= |p|^n [(A_1 + A_2) \cos n\theta + j(A_1 - A_2) \sin n\theta] = |p|^n [D_1 \cos n\theta + D_2 \sin n\theta] \end{aligned}$$

2. 特解

特解的函数形式与激励函数形式有关。表 5.1 列出了几种典型的激励所对应的特解。选定特解后,将它代入原差分方程,求出其待定系数 P_i ,就可得出方程的特解。

表 5.1 不同激励所对应的特解

激励 $f(n)$	特解 $y_p(n)$
n^m	$p_m n^m + p_{m-1} n^{m-1} + \cdots + p_1 n + p_0$ 所有特征根均不等于 1 时 $n^r [p_m n^m + p_{m-1} n^{m-1} + \cdots + p_1 n + p_0]$ 当有 r 重等于 1 的特征根时
a^n	pa^n 当 a 不等于特征根时 $p_1 na^n + p_0 a^n$ 当 a 是特征单根时 $p_r n^r a^n + p_{r-1} n^{r-1} a^n + \cdots + p_1 na^n + p_0 a^n$ 当 a 是 r 重特征根时
$\cos\beta n$ 或 $\sin\beta n$	$p \cos \beta n + q \sin \beta n$ 或 $A \cos(\beta n - \theta)$ 当所有特征根均不等于 $e^{\pm j\beta}$ 时 其中 $A e^{j\theta} = p + jq$

【例 5-4】 若描述某离散系统的差分方程为 $y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = f[n]$, 激励 $f[n] = 2^n, n \geq 0$, 初始条件 $y[0] = 0, y[1] = 2$, 试求系统的全解。

解 首先求齐次解。齐次差分方程为

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = 0$$

其特征方程为

$$p^2 + 3p + 2 = 0$$

其特征根 $p_1 = -1, p_2 = -2$ 。方程的齐次解为

$$y_h[n] = A_1(-1)^n + A_2(-2)^n$$

根据激励 $f[n]$ 的形式, 查表 5.1, 得方程的特解

$$y_p[n] = P(2)^n$$

将它代入原差分方程中, 得

$$P(2)^n + 3P(2)^{n-1} + 2P(2)^{n-2} = (2)^n$$

消去 $(2)^n$, 求得 $P = \frac{1}{3}$, 于是方程的特解为

$$y_p[n] = P(2)^n = \frac{1}{3}(2)^n$$

将齐次解与特解相加, 得方程的全解

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = A_1(-1)^n + A_2(-2)^n + \frac{1}{3}(2)^n$$

将已知的初始条件代入上式, 得

$$y[0] = A_1 + A_2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$y[1] = -A_1 - 2A_2 + \frac{2}{3} = 2$$

由以上两式可解得 $A_1 = \frac{2}{3}, A_2 = -1$ 。将它们代入全解式, 得

$$y[n] = \frac{2}{3}(-1)^n - (-2)^n + \frac{1}{3}(2)^n$$

此即为原差分方程的全解。一般差分方程的齐次解又称为系统的自由响应, 特解又称为系统的强迫响应。

5.2.3 零输入响应和零状态响应

线性非时变系统的完全响应 $y[n]$ 也可分为零输入响应和零状态响应。零输入响应是输入为零时仅由初始状态所引起的响应,用 $y_{zi}[n]$ 表示;零状态响应是系统的初始状态为零时,仅由输入信号 $f[n]$ 所引起的响应,用 $y_{zs}[n]$ 表示。这样线性非时变系统的完全响应 $y[n]$ 将是零输入响应与零状态响应之和,即

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

1. 零输入响应

在零输入的条件下,差分方程的右端的激励项均为 0,变成了齐次方程,可以利用求齐次解的方法求得零输入响应。

1) 特征根均为单根

即 k 个特征根都不相同,则差分方程的零输入响应为

$$y_{zi}[n] = A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \cdots + A_k p_k^n = \sum_{i=1}^k A_i p_i^n$$

式中,常数 A_i ($i=1,2,\dots,k$) 由初始条件确定, p_i 为系统差分方程的特征根。

2) 特征根有重根

若 p_1 是特征方程的 r 重根,即有 $p_1 = p_2 = \cdots = p_r$,而其余 $k-r$ 个根是单根,则差分方程的零输入响应为

$$y_{zi}[n] = \sum_{i=1}^r A_i n^{r-i} p_1^n + \sum_{j=r+1}^k A_j p_j^n$$

式中,各 A_i, A_j 均由初始条件确定。

3) 特征根为复根

如果特征根为复根 p ,则差分方程的零输入响应为

$$y_h[n] = |p|^n [D_1 \cos n\theta + D_2 \sin n\theta]$$

2. 零状态响应

求零状态响应所对应的差分方程是非齐次的,仍可以利用经典的方法求得,也可以利用卷积和来求出零状态响应。因为线性时不变离散系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 等于输入激励序列 $f[n]$ 与系统单位响应 $h[n]$ 的卷积和(后面将介绍)。

$$y_{zs}[n] = y_{zsh}[n] + y_{zsp}[n]$$

【例 5-5】 若描述某系统的差分方程为 $y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = f[n]$, 激励 $f[n] = 2^n, n \geq 0$, 初始状态 $y[-1] = 0, y[-2] = \frac{1}{2}$, 试求系统的全响应。

解 (1) 零输入响应:

差分方程的特征根为 $p_1 = -1, p_2 = -2$, 其零输入响应为

$$y_{zi}[n] = A_1 (-1)^n + A_2 (-2)^n$$

将初始条件 $y[-1] = 0, y[-2] = \frac{1}{2}$ 代入上式,得

$$y[-1] = y_{zi}[-1] = -A_1 - \frac{1}{2}A_2 = 0$$

$$y[-2] = y_{zi}[-2] = A_1 + \frac{1}{4}A_2 = \frac{1}{2}$$

解得 $A_1 = 1, A_2 = -2$, 则零输入响应为

$$y_{zi}[n] = (-1)^n - 2(-2)^n$$

(2) 零状态响应:

求零状态响应对应的非齐次的差分方程, 它的解是齐次解和特解之和, 在例 5-4 中已求出方程的特解为 $y_p[n] = \frac{1}{3}(2)^n$, 所以零状态响应为

$$y_{zs}[n] = A_3(-1)^n + A_4(-2)^n + \frac{1}{3}(2)^n$$

代入零状态条件, 有

$$\begin{cases} y_{zs}[-1] = -A_3 - \frac{1}{2}A_4 + \frac{1}{6} = 0 \\ y_{zs}[-2] = A_3 + \frac{1}{4}A_4 + \frac{1}{12} = 0 \end{cases}$$

解上式可以得到 $A_3 = -\frac{1}{3}, A_4 = 1$, 于是零状态响应为

$$y_{zs}[n] = -\frac{1}{3}(-1)^n + (-2)^n + \frac{1}{3}(2)^n$$

系统的全响应是零输入响应与零状态响应之和

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \frac{2}{3}(-1)^n - (-2)^n + \frac{1}{3}(2)^n, \quad n \geq 0$$

3. 离散系统初始状态讨论

正如连续系统中 0_+ 和 0_- 初始值不同一样, 离散系统的初始值也有两个, 即零输入初始值 $y_{zi}[0]$ 和系统的初始值 $y[0]$ 。其中, $y_{zi}[0]$ 表示激励信号作用之前(零输入)系统的初始条件, 它与系统的激励信号无关, 是系统的初始储能、历史的记忆, 即是系统真正的初始状态。 $y[0]$ 则表示系统在有了激励信号之后系统的初始条件, 它既有零输入时初始状态(初始储能), 又有激励信号的贡献。在离散系统中, 几个初始值的关系为

$$y[0] = y_{zi}[0] + y_{zs}[0]$$

其中, $y_{zs}[0]$ 表示零状态的初始值, 它仅由激励信号产生。

对于后向差分方程, 如

$$y[n] + ay[n-1] + by[n-2] = f[n]$$

当 $f[n]$ 在 $n=0$ 时刻作用于系统时, 即 $n=-1, -2$ 时激励为 0, 故有系统的初始状态为 $y[-1] = y_{zi}[-1], y[-2] = y_{zi}[-2]$, 而此时 $n=0$ 时激励已加入系统, 即有初始值 $y[0] \neq y_{zi}[0]$ 。

当 $f[n]$ 在 $n=-1$ 时刻作用于系统时, 即 $n=-2, -3$ 时激励为 0, 故有系统的初始状态为 $y[-2] = y_{zi}[-2], y[-3] = y_{zi}[-3]$, 而此时 $n=-1$ 时激励已加入系统, 即有初始值 $y[-1] \neq y_{zi}[-1]$ 。

对于前向差分方程, 如

$$y[n+2] + ay[n+1] + by[n] = f[n]$$

当 $f[n]$ 在 $n=0$ 时刻作用于系统时,令 $k=-1,0$, 则分别有

$$y[1] + ay[0] + by[-1] = 0 \quad y[2] + ay[1] + by[0] = f[0]$$

这说明 $y[1], y[0], y[-1]$ 与激励无关,故系统的初始状态为 $y[1] = y_{zi}[1], y[0] = y_{zi}[0]$, 此时 $y[2] \neq y_{zi}[2]$

当 $f[n]$ 在 $n=-1$ 时刻作用于系统时,令 $k=-2, -1$, 则分别有

$$y[0] + ay[-1] + by[-2] = 0 \quad y[1] + ay[0] + by[-1] = f[-1]$$

这说明 $y[0], y[-1], y[-2]$ 与激励无关,故系统的初始状态为 $y[0] = y_{zi}[0], y[-1] = y_{zi}[-1]$, 此时 $y[1] \neq y_{zi}[1]$

值得注意的是:在求零输入响应时,应采用零输入初始值 $y_{zi}[0]$ 。若系统给出的初始值是 $y[0]$,要判断并找出 $y_{zi}[0]$;在求零状态响应时,所谓零状态是指系统的初始储能为零,即 $y_{zs}[0] = 0$,而不是 $y[0] = 0$;在求全响应时,用初始条件确定常数,采用 $y[0]$,若系统给出的初始值是 $y_{zi}[0]$,要先求出 $y_{zs}[0]$,再根据 $y[0] = y_{zi}[0] + y_{zs}[0]$ 计算。

5.2.4 用卷积和求零状态响应

1. 卷积和定义

在连续时间系统中,利用卷积的方法求系统的零状态响应时,首先把激励信号分解为一系列的冲激函数,令每一冲激函数单独作用于系统求其冲激响应,然后把这些响应叠加即可得到系统对此激励信号的零状态响应,这个叠加的过程表现为求卷积积分。

在离散系统中,可以采用类似的方法进行分析,由于离散信号本身就是一个不连续的序列,因此,激励信号分解为一单位序列的工作很容易完成。如果系统的单位响应为已知,那么也不难求得每个单位序列单独作用于系统的响应。每一响应也是一个离散序列,把这些序列叠加即得零状态响应。因为离散量的叠加不需进行积分,因此,叠加过程表现为求“卷积和”。

1) 序列的时域分解

任意离散信号 $f[n]$ 可以表示为单位序列 $\delta[n]$ 的线性组合,对于任意序列 $f[n]$,可写为

$$f[n] = \cdots + f[-1]\delta[n+1] + f[0]\delta[n] + f[1]\delta[n-1] + f[2]\delta[n-2] + \cdots$$

$$\text{即} \quad f[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i]\delta[n-i] \quad (5.3)$$

2) 任意序列作用下的零状态响应

如果系统在单位序列 $\delta[n]$ 作用下的零状态响应即单位响应为 $h[n]$,那么根据线性时不变离散系统的性质可知,系统对 $f[i]\delta[n-i]$ 的响应为 $f[i]h[n-i]$ 。因此,由线性叠加性有 $\sum_{i \rightarrow -\infty}^{\infty} f[i]\delta[n-i]$ 的响应为 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i]h[n-i]$,即系统对序列 $f[n]$ 作用所引起的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 为

$$y_{zs}[n] = \cdots + f[-1]h[n+1] + f[0]h[n] + f[1]h[n-1] + f[2]h[n-2] + \cdots$$

$$\text{即} \quad y_{zs}[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i]h[n-i] \quad (5.4)$$

式(5.4)称为序列 $f[n]$ 与 $h[n]$ 的卷积和,也简称卷积。该式表明,线性非时变系统对于任意激励 $f[n]$ 的零状态响应是激励与系统单位响应 $h[n]$ 的卷积和。

3) 卷积和的一般定义

一般地,对于两个离散信号 $f_1[n], f_2[n]$,其卷积和定义为

$$f_1[n] * f_2[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1[i] f_2[n-i] \quad (5.5)$$

根据此定义,式(5.3)可以表示为

$$f[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i] \delta[n-i] = f[n] * \delta[n]$$

即序列 $f[n]$ 与单位序列 $\delta[n]$ 的卷积和就是序列 $f[n]$ 本身。

根据此定义,式(5.4)也可以表示为

$$y_{zs}[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i] h[n-i] = f[n] * h[n]$$

离散序列的卷积和服从交换律、分配律和结合律等代数性质:

交换律 $f_1[n] * f_2[n] = f_2[n] * f_1[n]$

分配律 $f_1[n] * [f_2[n] + f_3[n]] = f_1[n] * f_2[n] + f_1[n] * f_3[n]$

结合律 $f_1[n] * [f_2[n] * f_3[n]] = [f_1[n] * f_2[n]] * f_3[n]$

2. 单位序列响应

由式(5.4)可知,线性非时变系统对于任意激励 $f[n]$ 的零状态响应是激励与系统单位响应 $h[n]$ 的卷积和。故只要求得单位序列响应,就可以通过卷积和求得其零状态响应。

当线性时不变离散系统的输入信号为单位序列 $\delta[n]$ 时,系统的零状态响应称为单位序列响应,用 $h[n]$ 表示。它的作用与连续系统中的冲激响应 $h(t)$ 相类似,即求解系统的单位序列响应可用求解差分方程法。由于单位序列 $\delta[n]$ 仅在 $n=0$ 处等于 1,而在 $n>0$ 时,系统的单位序列响应与该系统的零输入响应的形式相同,这样就可将求解单位序列响应的问题转换为求解差分方程齐次解的问题,但又是零状态响应,故 $n=0$ 处的值 $h[0]$ 可按零状态响应的条件由差分方程确定。求解 $h[n]$ 的方法通常有以下几种。

1) 迭代法

其求解方法参见 5.2.1 节例 5-3。

2) 等效初始条件法

对于式(5.1),设方程右边仅为 $\delta[n]$ 时其单位序列响应为 $h_0[n]$, k 阶前向差分方程的初始值为

$$h_0[1] = h_0[2] = \cdots = h_0[k-1] = 0, \quad h_0[k] = \frac{1}{a_k}$$

由前面可知,设 $p_i (i=1, 2, \dots, k)$ 为差分方程的齐次方程的特征根,若为单根情况,则单位序列响应为

$$h_0[n] = \left(\sum_{i=1}^k C_i p_i^n \right) \epsilon[n-1]$$

其中, k 个常数 C_i 可由以上 k 个初始值确定。

同理,对于式(5.2) k 阶后向差分方程的初始值为

$$h_0[-1] = h_0[-2] = \cdots = h_0[-k+1] = 0, \quad h_0[0] = \frac{1}{a_k}$$

由前面可知,若 $p_i (i=1, 2, \dots, k)$ 为单根情况,则单位序列响应为

$$h_0[n] = \left(\sum_{i=1}^k C_i p_i^n \right) \varepsilon[n]$$

其中, k 个常数 C_i 可由以上 k 个初始值确定。

若特征根为重根或复根时,其单位序列响应可以参考前面 5.2.2 节形式得到。再根据线性系统的时不变特性,即可求得系统单位序列响应 $h[n]$ 。

3) 转移算子法

对于 k 阶系统(无重根情况),当式(5.1)中 $k > m$ 时,

$$\begin{aligned} H[q] &= \frac{N[q]}{D[q]} = q \frac{N[q]}{q^k + a_{k-1}q^{k-1} + \dots + a_1q + a_0} = q \frac{N[q]}{(q-p_1)(q-p_2)\dots(q-p_k)} \\ &= \frac{qC_1}{q-p_1} + \frac{qC_2}{q-p_2} + \dots + \frac{qC_k}{q-p_k} \end{aligned}$$

即单位序列响应为
$$h[n] = \left(\sum_{i=1}^k C_i p_i^n \right) \varepsilon[n]$$

当 $k \leq m$ 时,将 $H[q]$ 化为有理式, $H[q] = \frac{N[q]}{D[q]} = H_1[q] + \frac{N_1[q]}{D[q]}$,然后再将 $\frac{N_1[q]}{D[q]}$ 按照上述方法进行部分分式展开。

除此之外,单位函数响应还可以用 Z 变换的方法求取(详见第 6 章)。

【例 5-6】 已知离散时间系统的差分方程为

$$y[n] - y[n-1] - 2y[n-2] = f[n] - f[n-2]$$

试求系统的单位函数响应 $h[n]$ 。

解 1) 等效初始条件法

由离散时间系统的差分方程可得其特征根方程为 $p^2 - p - 2 = 0$,即特征根为 $p_1 = -1$, $p_2 = 2$,设方程右边仅有 $\delta[n]$ 时其单位序列响应为 $h_0[n]$,即有

$$h_0[n] - h_0[n-1] - 2h_0[n-2] = \delta[n]$$

其初始值为 $h_0[-1] = 0, h_0[0] = 1$,即可得 $h_0[1] = h_0[0] + 2h_0[-1] + \delta[1] = 1$,对于 $n > 0$ 时, $h_0[n]$ 满足齐次方程,即

$$h_0[n] = C_1[-1]^n + C_2[2]^n \quad n > 0$$

其初始值为 $h_0[0] = 1, h_0[1] = 1$ 代入上式即得 $C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{2}{3}$,即得

$$h_0[n] = \left\{ \frac{1}{3}[-1]^n + \frac{2}{3}[2]^n \right\} \varepsilon[n]$$

根据线性时不变性,得

$$\begin{aligned} h[n] &= h_0[n] - h_0[n-2] = \left\{ \frac{1}{3}[-1]^n + \frac{2}{3}[2]^n \right\} \\ &\quad \varepsilon[n] - \left\{ \frac{1}{3}[-1]^{n-2} + \frac{2}{3}[2]^{n-2} \right\} \varepsilon[n-2] \end{aligned}$$

2) 转移算子法

由差分方程可得转移算子为

$$H[q] = \frac{1 - q^{-2}}{1 - q^{-1} - 2q^{-2}} = \frac{q^2 - 1}{q^2 - q - 2} = 1 + \frac{1}{q - 2}$$

即得系统的单位序列响应为 $h[n] = \delta[n] + [2]^n \epsilon[n - 1]$

上述两种方法求得的结果从表面上看不一样,但是利用第1章所介绍的单位序列与阶跃序列之间的关系 $\epsilon[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = \sum_{j=0}^{\infty} \delta[k - j]$, $\delta[n] = \epsilon[n] - \epsilon[n - 1]$, 可以证明两者相同。

当线性时不变离散系统的激励为单位阶跃序列 $\epsilon[n]$ 时,系统的零状态响应为阶跃响应,用 $g[n]$ 表示。若已知系统的单位序列响应 $h[n]$,则根据 LTI 系统的线性性质和移位不变性,系统的阶跃响应为

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] = \sum_{j=0}^{\infty} h[k - j]$$

若已知系统的单位阶跃序列 $\epsilon[n]$,则系统的单位序列响应为

$$h[n] = g[n] - g[n - 1]$$

3. 卷积和的计算方法

卷积和的计算方法很多,下面主要介绍几种。

1) 图解算法

卷积和的图解算法是把取卷积的过程分解为反折、平移、相乘、求和 4 个步骤。具体求序列的卷积和 $f_1[n] * f_2[n]$ 按下述步骤进行:

(1) 将序列 $f_1[n]$ 、 $f_2[n]$ 的自变量用 i 替换,然后将序列 $f_2[i]$ 以纵坐标为轴线反折,成为 $f_2[-i]$;

(2) 将序列 $f_2[-i]$ 沿正 n 轴平移 n 个单位,成为 $f_2[n - i]$;

(3) 求乘积 $f_1[i]f_2[n - i]$;

(4) 按式(5.5)求出各乘积之和。

【例 5-7】 有两个序列

$$f_1[n] = \begin{cases} n + 1, & n = 0, 1, 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_2[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求两个序列的卷积和 $f[n] = f_1[n] * f_2[n]$ 。

解 将序列 $f_1[n]$ 、 $f_2[n]$ 的自变量用 i 替换,再将序列 $f_2[i]$ 以纵坐标为轴线反折,成为 $f_2[-i]$,如图 5.3(a)~(c)所示。按步骤(3)和步骤(4),分别令 $n = 0, 1, 2, 3$,计算乘积再求各乘积之和。其计算过程如图 5.4 所示。

当 $n < 0$ 时, $f[n] = f_1[n] * f_2[n] = 0$

当 $n = 0$ 时, $f[0] = f_1[0]f_2[0] = 1$

当 $n = 1$ 时, $f[1] = f_1[0]f_2[1] + f_1[1]f_2[0] = 3$

当 $n = 2$ 时, $f[2] = f_1[0]f_2[2] + f_1[1]f_2[1] + f_1[2]f_2[0] = 6$

当 $n = 3$ 时, $f[3] = f_1[0]f_2[3] + f_1[1]f_2[2] + f_1[2]f_2[1] + f_1[3]f_2[0] = 6$

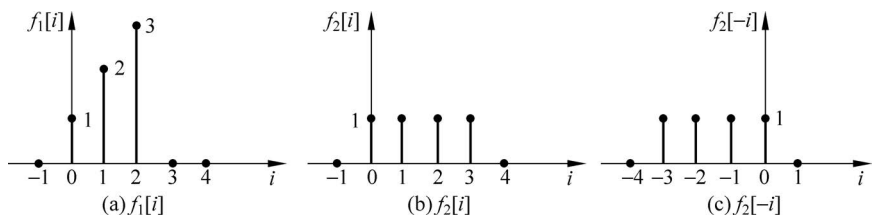


图 5.3 $f_1[i], f_2[i]$ 和 $f_2[-i]$ 的图形

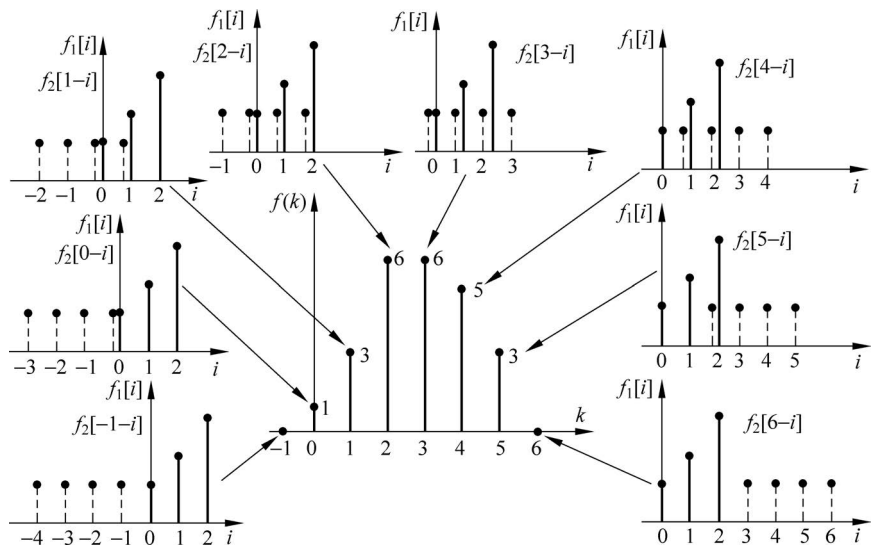


图 5.4 卷积和的计算过程

其卷积和计算结果如图 5.4 中间图形所示。

2) 阵列表法

对于有限长序列或无限长序列,都可以用阵列表法求卷积和,此方法较简单。举例说明如下。

【例 5-8】 设有两个无限长序列

$$f_1[n] = \{1, 3, 2, 4, \dots\} \quad (n \geq 0)$$

$$f_2[n] = \{2, 1, 3, 0, \dots\} \quad (n \geq 0)$$

求卷积和 $y[n] = f_1[n] * f_2[n]$ 。

解 首先画出序列阵表(见图 5.5),左部放 $f_1[n]$,上部放 $f_2[n]$,然后以 $f_1[n]$ 的每个数去乘 $f_2[n]$ 各数,并将结果放入相应的行,最后把虚斜线上的数分别相加即得卷积和结果序列。即

$$y[n] = f_1[n] * f_2[n] = \{2, 7, 10, 19, 10, 12, \dots\}$$

3) 解析法

利用阵列表法求卷积和比较简便,但无论是阵列表法或图解算法都难以得到闭合形式的解,用解析法可以解决这个问题。表 5.2 中列出了计算卷积和时常用的几种数列求和公式。表 5.3 中列出了几种常用序列的卷积和。

		$f_2[0]$	$f_2[1]$	$f_2[2]$	$f_2[3]$...
		2	1	3	0	...
$f_1[0]$	1	2	1	3	0	...
$f_1[1]$	3	6	3	9	0	...
$f_1[2]$	2	4	2	6	0	...
$f_1[3]$	4	8	4	12	0	...
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	...

图 5.5 序列阵表

表 5.2 常用的几种数列求和公式表

公 式	说 明
$\sum_{j=0}^k a^j = \begin{cases} \frac{1-a^{k+1}}{1-a}, & a \neq 1 \\ k+1, & a = 1 \end{cases}$	$k \geq 0$
$\sum_{j=k_1}^{k_2} a^j = \begin{cases} \frac{a^{k_1} - a^{k_2+1}}{1-a}, & a \neq 1 \\ k_2 - k_1 + 1, & a = 1 \end{cases}$	k_1, k_2 可为正或负整数, 但 $k_2 \geq k_1$
$\sum_{j=0}^{\infty} a^j = \frac{1}{1-a}, \quad a < 1$	
$\sum_{j=k_1}^{\infty} a^j = \frac{a^{k_1}}{1-a}, \quad a < 1$	k_1 可为正或负整数

表 5.3 几种常用序列的卷积和

$f_1(n)$	$f_2(n)$	$f_1(n) * f_2(n)$
$f(n)$	$\delta(n)$	$f(n)$
$f(n)$	$\epsilon(n)$	$\sum_{i=-\infty}^n f(i)$
$\epsilon(n)$	$\epsilon(n)$	$(n+1)\epsilon(n)$
$n\epsilon(n)$	$\epsilon(n)$	$\frac{1}{2}n(n+1)\epsilon(n)$
$a^n \epsilon(n)$	$\epsilon(n)$	$\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \epsilon(n), \quad a \neq 1$
$a_1^n \epsilon(n)$	$a_2^n \epsilon(n)$	$\frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{a_1 - a_2} \epsilon(n), \quad a_1 \neq a_2$
$a^n \epsilon(n)$	$a^n \epsilon(n)$	$(n+1)a^n \epsilon(n)$
$n\epsilon(n)$	$a^n \epsilon(n)$	$\frac{n}{1-a} \epsilon(n) + \frac{a(a^n - 1)}{(1-a)^2} \epsilon(n)$
$n\epsilon(n)$	$n\epsilon(n)$	$\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)\epsilon(n)$
$a_1^n \cos(\beta n + \theta)\epsilon(n)$	$a_2^n \epsilon(n)$	$\frac{a_1^{n+1} \cos[\beta(n+1) + \theta - \varphi] - a_2^{n+1} \cos(\theta - \varphi)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \beta}} \epsilon(n)$ $\varphi = \arctan \left[\frac{a_1 \sin \beta}{a_1 \cos \beta - a_2} \right]$

【例 5-9】 设序列 $f_1[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n \epsilon[n]$, $f_2[n] = \epsilon[n]$, 试求 $f_1[n] * f_2[n]$ 。

解
$$f_1[n] * f_2[n] = \sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^i \epsilon[n-i] = \sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^i$$

上式是公比为 $2/3$ 的等比级数求和问题。由表 5.2 可知其求和公式为

$$\sum_{i=0}^n a^i = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a \neq 1 \\ n+1, & a = 1 \end{cases}$$

所以
$$f_1[n] * f_2[n] = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right] \epsilon[n]$$

【例 5-10】 已知离散系统的输入序列 $f[n]$ 和单位响应 $h[n]$ 分别为

$$f[n] = \epsilon[n] - \epsilon[n-2], \quad h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \epsilon[n]$$

试求系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 。

解 由式(5.4)可得

$$y_{zs}[n] = f[n] * h[n] = \{\epsilon[n] - \epsilon[n-3]\} * h[n]$$

由分配律可得

$$y_{zs}[n] = \epsilon[n] * h[n] - \epsilon[n-3] * h[n]$$

其中,

$$\epsilon[n] * h[n] = \epsilon[n] * \left(\frac{1}{2}\right)^n \epsilon[n] = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \epsilon[n]$$

由时不变特性可知, $\epsilon[n-3] * h[n]$ 应比 $\epsilon[n] * h[n]$ 的结果右移 3 位, 即得

$$\epsilon[n-3] * h[n] = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \right] \epsilon[n-3]$$

最后, 由线性可得

$$y_{zs}[n] = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \epsilon[n] - \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \right] \epsilon[n-3]$$

5.3 离散时间信号与系统的频域响应

5.3.1 周期离散时间信号的离散傅里叶级数表示

一个周期的离散时间信号满足

$$x[n] = x[n+N] \quad (5.6)$$

式中, N 是某一正整数, 是 $x[n]$ 的周期。

我们来研究复指数序列 $e^{j(2\pi/N)n}$, 因为它是周期序列, 其周期为 N , 基波频率为

$$\omega_0 = 2\pi/N \quad (5.7)$$

成谐波关系的复指数序列集

$$\varphi_k[n] = e^{jk2\pi n/N}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.8)$$

也是周期序列, 其中每个分量的频率是 ω_0 的整数倍。

值得注意的是, 在一个周期为 N 的复指数序列中, 只有 N 个复指数序列是独立的, 即

只有 $\varphi_0[n], \varphi_1[n], \dots, \varphi_{N-1}[n]$ 等 N 个是互不相同的。这是因为

$$\varphi_k[n] = \varphi_{k+N}[n] = \varphi_{k+rN}[n], \quad r \text{ 为整数} \quad (5.9)$$

即当 k 变化一个 N 的整倍数时,可以得到一个完全一样的序列, $\varphi_N[n] = \varphi_0[n], \varphi_{N+1}[n] = \varphi_1[n], \dots$ 。这与连续时间复指数函数集 $\{e^{jk\omega_0 t}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ 中有无限多个互不相同的复指数函数是不同的。

利用这一重要特性,对于任一基波周期为 N 的周期序列 $x[n]$ 可用 N 个成谐波关系的复指数序列的加权和表示。即

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k \varphi_k[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k e^{jk2\pi n/N} \quad (5.10)$$

这里求和限 $k \in \langle N \rangle$ 表示求和仅需包括 N 项, k 既可取 $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, 也可以取 $k = 3, 4, \dots, N+1, N+2$, 等等, 无论怎样取法, 由于式(5.9)关系存在, 式(5.10)右边求和结果都是相同的。

将周期序列表示成式(5.10)的形式, 即一组成谐波关系的复指数序列的加权和, 就称为离散傅里叶级数表达。而系数 c_k 则称为离散傅里叶系数。

下面介绍离散傅里叶系数的两种求解方法。

1. 解联立方程法

如果已知 $x[n]$ 在任一基波周期 N 内的 N 个值(样本), 即 $x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]$, 则由式(5.10)可得 N 个方程:

$$\begin{aligned} x[0] &= \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k = c_0 + c_1 + \dots + c_{N-1} \\ x[1] &= \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k e^{jk(2\pi/N)} = c_0 + c_1 e^{j2\pi/N} + \dots + c_{N-1} e^{j2\pi(N-1)/N} \\ &\vdots \\ x[N-1] &= \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k e^{j2\pi k(N-1)/N} = c_0 + c_1 e^{j2\pi(N-1)/N} + \dots + c_{N-1} e^{j2\pi(N-1)^2/N} \end{aligned} \quad (5.11)$$

联解这一组方程, 就可得系数 c_k 。

2. 正交函数系数法

与连续傅里叶系数求和类似, 将式(5.10)两边乘 $e^{-jr(2\pi/N)n}$, 并在周期 N 内求和, 即

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} &= \sum_{n \in \langle N \rangle} \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k \exp[j(k-r)(2\pi/N)n] \\ &= \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k \sum_{n \in \langle N \rangle} \exp[j(k-r)(2\pi/N)n] \end{aligned} \quad (5.12)$$

因为

$$\sum_{n \in \langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k-r=0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.13)$$

所以式(5.12)右边内层对 n 求和仅当 $k-r=0$ 或 N 的整倍数时不为 0。如果把 r 值的变化范围选成与外层求和 k 值的变化范围一样, 而在该范围内选择 r 值, 则式(5.13)右边在 $k=r$ 时, 就等于 $N c_k$, 在 $k \neq r$ 时就等于 0, 即

$$\sum x[n] \exp[-jk(2\pi/N)n] = c_k N \quad (5.14)$$

所以

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.15)$$

故

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (5.16)$$

式(5.15)和式(5.16)确定了周期离散时间信号 $x[n]$ 和其傅里叶系数 c_k 之间的关系, 可记为

$$x[n] \leftrightarrow c_k \quad (5.17)$$

因离散信号的频谱记为 $X(e^{j\omega})$, 这里 $\omega = \Omega T$, 它给出了模拟频率 Ω 和数字信号频率 ω 之间的关系。

傅里叶系数 c_k 也称为 $x[n]$ 的频谱系数。可以简单证明:

$$c_k = c_{k+N} \quad (5.18)$$

由于 $\omega = 2\pi k/N$, 可以说 c_k 以 2π 为周期, 或者说它是以 N 为周期的离散频率序列, 这表明周期的离散时间函数对应于频域为周期的离散频率函数。且当 $x[n]$ 为实序列时, 对所有的 k 值, 存在关系 $c_{-k} = c_k^*$ 。

【例 5-11】 已知 $x[n] = 1 + \sin(2\pi/N)n + 3\cos(2\pi/N)n + \cos(4\pi n/N + \pi/2)$, 式中 N 为整数, 求其频谱。

解 这个信号是周期的, 其周期为 N 。将 $x[n]$ 直接展开成复指数形式, 得

$$\begin{aligned} x[n] = & 1 + [e^{j(2\pi/N)n} - e^{-j(2\pi/N)n}]/2j + 3[e^{j(2\pi/N)n} + e^{-j(2\pi/N)n}]/2 \\ & + [e^{j(4\pi/N + \pi/2)n} + e^{-j(4\pi/N + \pi/2)n}]/2 \end{aligned}$$

将相应项归并后, 得

$$\begin{aligned} x[n] = & 1 + (3/2 + 1/2j)e^{j(2\pi/N)n} + (3/2 - 1/2j)e^{-j(2\pi/N)n} \\ & + (e^{j\pi/2}/2)e^{j2(2\pi/N)n} + (e^{-j\pi/2}/2)e^{-j2(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

与式(5.15)比较, 可得

$$\begin{aligned} c_0 = & 1, \quad c_1 = 3/2 + 1/2j = 3/2 - j1/2, \quad c_{-1} = 3/2 + j1/2 = c_1^* \\ c_2 = & j1/2, \quad c_{-2} = -j1/2 = c_2^* \end{aligned}$$

而在长度为 N 的周期内, 其余系数均为 0。再次指出, 这些系数是周期的, 其周期为 N 。例如, $c_N = c_{2N} = c_{-N} = c_0 = 1$, $c_{1+N} = c_{1+2N} = c_{1-2N} = c_1 = 3/2 - j1/2$, $c_{2+N} = c_{2+2N} = c_{2-N} = c_2 = j1/2$ 等。

【例 5-12】 已知一个周期矩形序列如图 5.6 所示, 求其频谱。

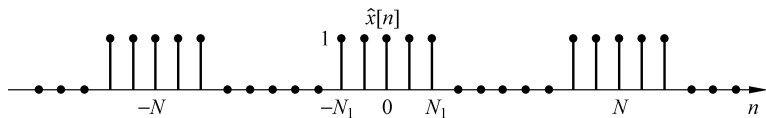


图 5.6 一个周期矩形序列

解 从图中可见, 这个序列是对 $n=0$ 轴对称的, 因此, 求和时选择一个对称区间比较方便。故

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (5.19)$$

令 $m = n + N_1$, 则

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m}$$

利用有限项几何级数求和公式

$$\sum_{m=0}^{M-1} a^m = \begin{cases} M, & a = 1 \\ \frac{1-a^M}{1-a}, & a \neq 1 \end{cases} \quad (5.20)$$

可进一步写成: 当 $e^{jk(2\pi/N)m} \neq 1$, 即 $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ 时, 可得

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \left(\frac{1 - e^{-jk(2\pi/N)(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right) \\ &= \frac{1}{N} e^{j(2\pi N_1/N)} \frac{e^{j2\pi(N_1+1/2)} \left(e^{j2\pi k(N_1+1/2)/N} - e^{-j2\pi k(N_1+1/2)/N} \right)}{e^{-j2\pi k/2N} \left(e^{j2\pi k/2N} - e^{-j2\pi k/2N} \right)} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin \left[2\pi k \left(N_1 + \frac{1}{2} \right) / N \right]}{\sin(\pi k / N)} \end{aligned}$$

当 $e^{jk(2\pi/N)m} = 1$, 即 $k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ 时, 可得

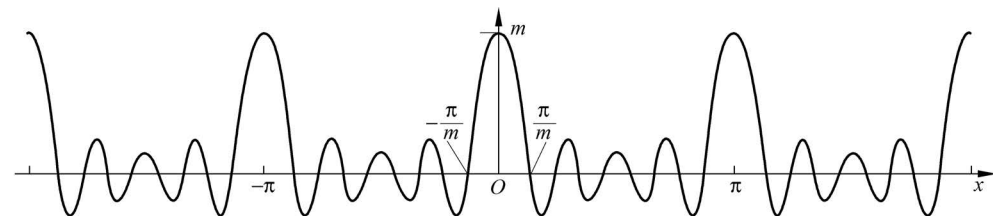
$$c_k = \frac{2N_1 + 1}{2}$$

这里定义如下函数:

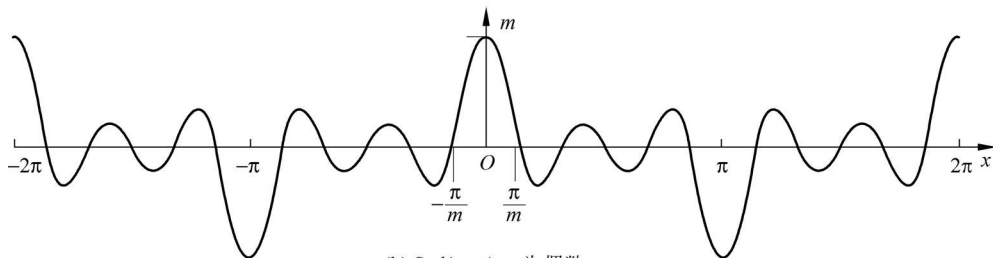
$$\text{Sad}(x, m) = \frac{\sin mx}{\sin x}, \quad \text{整数 } m > 1 \quad (5.21)$$

图 5.7(a)和(b)中画出了 m 为奇数和偶数时的函数图形。该函数有如下的性质: 首先, 它是一个周期函数, 周期为 2π ; 且有

$$\lim_{x \rightarrow l\pi} \text{Sad}(x, m) = \lim_{x \rightarrow l\pi} \frac{\sin m\pi}{\sin x} = \begin{cases} m, & m = 2k + 1, \\ (-1)^l m, & m = 2k \end{cases}, \quad m > 1 \quad (5.22)$$



(a) $\text{Sad}(x, m)$, m 为奇数



(b) $\text{Sad}(x, m)$, m 为偶数

图 5.7 $\text{Sad}(x, m)$ 函数图形

和

$$\text{Sad}\left(\frac{\pi}{m}l, m\right) = \frac{\sin(l\pi)}{\sin(l\pi/m)} = 0, \quad l \neq 0, \pm m, \pm 2m, \dots, m > 1 \quad (5.23)$$

这个函数可看作抽样函数 $\text{Sa}(x)$ 在离散时间中的一个对偶。为了绘制频谱方便,令 $\omega = 2\pi k/N$, 利用函数 $\text{Sad}(x, m)$, 则上面求得的周期矩形序列的 DFS 系数统一写为

$$c_k = \frac{1}{N} \frac{\sin[(2N_1 + 1)\omega/2]}{\sin(\omega/2)} \quad (5.24)$$

由式(5.24)可以看出, c_k 的包络具有 $\text{Sad}(x, m)$ 的形状, 将此包络以 $\frac{2\pi}{N}$ 为间隔取离散样本并乘以 $1/N$ 就可得到 c_k 。因此在绘制频谱时, 首先将 $0 \sim 2\pi$ 的频率范围按 $2N_1 + 1$ 等分, 作出包络线, 再将包络以 $\frac{2\pi}{N}$ 为间隔取样并乘以 $1/N$ 即可。设 $2N_1 + 1 = 5$, 按式(5.24)分别令 $N = 10, 20$ 和 40 三种情况作图, 得三种不同周期的周期方波序列的频谱如图 5.8 所示。从图中可见, 周期性矩形脉冲序列的频谱是离散的, 而且是以 N (或者对 ω 而言是以 2π) 为周期的。当脉冲宽度, 即 N_1 不变时, 频谱包络的样子不变, 只是幅度随 N 的增大而减小, 谱线的间隔随着 N 的增大而减小。如果脉冲宽度 N_1 改变, 则频谱包络的样子将会发生变化。例如图 5.6 的信号如果 $N = 10, N_1 = 3$, 则其频谱将如图 5.9 所示。由图中可知, N_1 越大, 则频谱包络的主瓣宽度越窄。由以上分析可知, 周期性矩形脉冲序列当周期与脉冲宽度改变时, 对频谱带来的影响与连续时间周期矩形脉冲信号的情况是相似的。但离散时间周期矩形脉冲信号的频谱具有周期性, 则与连续时间情况完全不同。

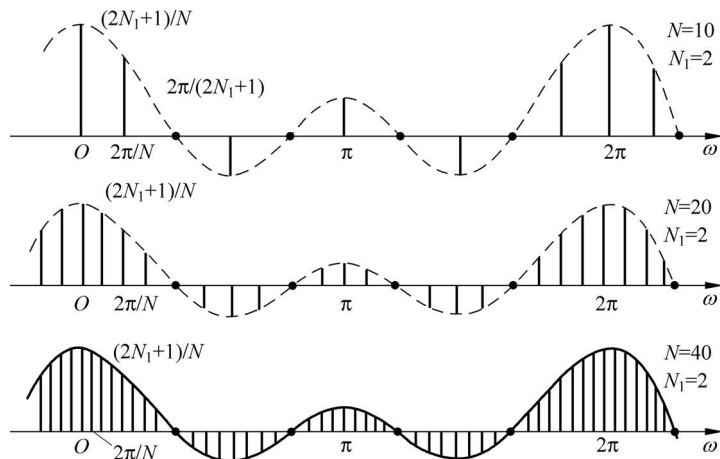


图 5.8 3 种不同周期的周期方波序列的频谱

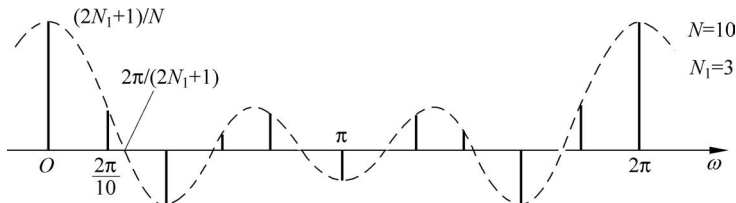


图 5.9 $N_1 = 3, N = 10$ 时矩形脉冲序列的频谱

值得一提的是,周期的离散时间信号的离散傅里叶级数表达,不存在任何收敛问题,也不存在吉伯斯现象。这是一般情况,因为任何离散时间周期序列都是由有限个(N 个)参数来表征的,即一个周期内的 N 个序列值。相比之下,一个连续时间周期信号在一个周期内有一个连续取值问题,这就要求用无限多项级数来表示它。因此,自然就会产生收敛问题了。

5.3.2 非周期离散时间信号的离散时间傅里叶变换

从前面讨论周期性矩形脉冲序列的频谱时可看到,当周期 N 增大时,频谱的谱线间隔将随之而减小。随着 N 趋向于无穷大,在时域周期信号将演变成非周期信号;与此同时,在频域谱线将无限密集,从而过渡为连续频谱。这一过程与连续时间信号的情况是完全类似的。在此将采用与连续时间情况下完全相同的步骤,来建立非周期离散时间信号的傅里叶变换表示。即非周期序列的傅里叶变换表示法,也可以从周期序列的离散傅里叶级数表示法推广而来。为此,假设任意一个有限长的非周期序列 $x[n]$,该序列具有有限持续期 $2N_1$, N_1 是一个正整数,即在 $|n| > N_1$ 时, $x[n]=0$,如图5.10(a)所示。可以用它构造出一个周期序列 $\tilde{x}[n]$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN] \quad (5.25)$$

其中选择周期为 N ,如图5.10(b)所示。因此, $x[n]$ 也可看成是从 $\tilde{x}[n]$ 中截取的一个周期或看成是当 $N \rightarrow \infty$ 时 $\tilde{x}[n]$ 的极限,即

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \quad (5.26)$$

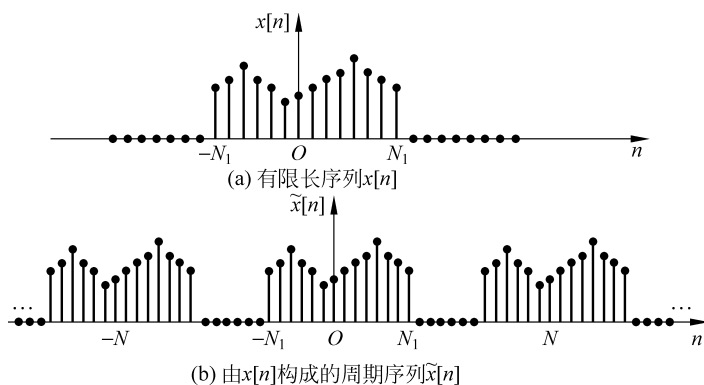


图 5.10 序列图

因周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的离散傅里叶级数为

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.27)$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (5.28)$$

因为 $\tilde{x}[n]=x[n]$, $n \in \langle N_1 \rangle$,而 $x[n]=0$, $n \notin \langle N_1 \rangle$,所以将式(5.28)的求和区间 $\langle N \rangle$ 取在该周期内,则可将式(5.24)写为

$$Nc_k = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)kn} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn} x[n] \quad (5.29)$$

如果将 $N \rightarrow \infty$ 时, Nc_k 的极限表示为 $X(e^{j\omega})$, 则在 $N \rightarrow \infty$ 时, 由于 $(2\pi/N)k \rightarrow \omega$, 再考虑到 $|n| \geq N_1$ 时, $x[n] = 0$, 因此式(5.29)变为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (5.30)$$

$X(e^{j\omega})$ 就定义为信号 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换。与连续时间情况一样, 也称 $X(e^{j\omega})$ 为非周期序列 $x[n]$ 的频谱。上述 c_k 可由 $X(e^{j\omega})$ 样本值给出

$$c_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) \Big|_{\omega_0 = 2\pi/N}$$

或

$$Nc_k = X(e^{jk\omega_0}) \quad (5.31)$$

式中, $\omega_0 = 2\pi/N$ 。这表明: 周期性离散时间信号的傅里叶级数就是与其对应的非周期信号的离散时间傅里叶变换的样本; 非周期序列的离散时间傅里叶变换就是与其相对应的周期信号傅里叶级数系统的包络。

根据式(5.31), 可将式(5.27)改写为

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k \in \langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \quad (5.32)$$

由于 $\omega_0 = 2\pi/N$, 所以 $1/N = \omega_0/2\pi$, 于是式(5.27)可写为

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0 \quad (5.33)$$

在极限的情况下, $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} \rightarrow d\omega$, $k\omega_0 \rightarrow \omega$, $\tilde{x}[n] \rightarrow x[n]$, 上式中的求和将转换为求积分。

另外, 从式(5.30)可以看出, $X(e^{j\omega})$ 对 ω 是以 2π 为周期的。当式(5.33)中的求和在长度为 N 的区间上进行时, 就相应于 ω 在 2π 长度的区间上变化, 故式(5.33)在 $N \rightarrow \infty$ 的极限情况下为

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (5.34)$$

正由于 $X(e^{j\omega})$ 和 $e^{j\omega n}$ 都是以 2π 为周期的, 因此式(5.34)的积分区间可以是任何一个长度为 2π 的区间。此式表明: 离散时间非周期信号可以分解成无数多个频率从 $0 \sim 2\pi$ 连续分布的复指数序列的线性组合, 每个复指数分量的幅度为 $\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$ 。至此, 得到了一对关系式:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (5.35)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (5.36)$$

就是非周期序列 $x[n]$ 的傅里叶变换对, 它是连续傅里叶变换的离散时间对偶。式(5.35)称为傅里叶正变换, 式(5.36)称为傅里叶反变换。

正如上面所说的, 非周期序列 $x[n]$ 可以看作周期为无限的周期序列, 如果序列的长度

有限,则因为有限持续期内序列绝对可和,因此也不存在任何收敛问题。但若序列长度为无限长,那么就必须要考虑式(5.30)无限项求和的收敛问题了,显然,如果 $x[n]$ 绝对可和,即

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$, 则式(5.30)一定收敛。即离散时间傅里叶变换的收敛条件为序列绝对可和。

注意,对于非周期序列的离散傅里叶变换,是把周期序列 $x[n]$ 在周期 $N \rightarrow \infty$ 的极限情况下导出的,所以开拓周期序列的离散傅里叶级数和非周期序列的离散时间傅里叶变换之间是有密切联系的。

5.3.3 周期序列的离散时间傅里叶变换

如同在连续时间情况下一样,前面讨论了周期性序列的离散时间傅里叶级数和非周期序列的离散时间傅里叶变换。当周期序列的周期趋于无穷大时,周期序列就变为非周期序列,傅里叶级数变成了傅里叶变换,而频谱由周期离散谱变成了周期连续谱。在此,先讨论一个周期序列的傅里叶级数表示式中的系数如何可以从该序列一个周期的傅里叶变换来得到,然后将周期序列的离散时间傅里叶变换表示成频域中的冲激序列,并确定它与傅里叶级数的关系。

1. 傅里叶级数系数作为一个周期内信号的傅里叶变换的抽样

若一个周期序列 $\tilde{x}[n]$, 其周期为 N , 而 $x[n]$ 表示 $\tilde{x}[n]$ 的一个周期, 即

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & M \leq n \leq M + N - 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.37)$$

其中, M 为任意值。由式(5.31)可知: 在式(5.37)中, 无论 M 取何值, 上式都是成立的。虽然由于 M 的变化 $x[n]$ 和 $X(e^{jk\omega_0})$ 都会有明显的变化, 但是 $X(e^{jk\omega_0})$ 在抽样频率点 $2\pi k/N$ 上的值与 M 无关。

2. 周期序列的傅里叶变换

下面来确定周期序列的傅里叶变换表示。为此先讨论如下信号:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \quad (5.38)$$

在连续时间情况下, 有

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

但在离散时间情况下, 由于对任意整数 r , 有

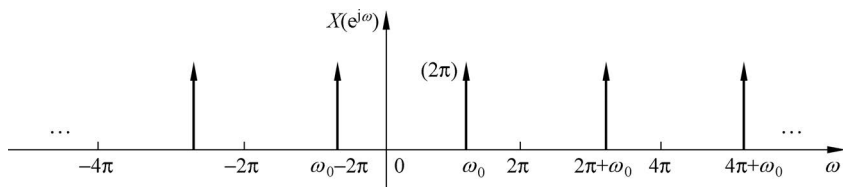
$$e^{j\omega_0 n} = e^{j(\omega_0 + 2\pi r)n} \quad (5.39)$$

使得离散时间傅里叶变换对 ω 来说总是周期的, 且周期为 2π , 由此可以想到, 式(5.38)中 $x[n]$ 的傅里叶变换应该是在 $\omega = \omega_0, \omega_0 \pm 2\pi, \omega_0 \pm 4\pi, \dots$ 处的冲激函数。实际上, $x[n]$ 的傅里叶变换正是如下的冲激序列:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) \quad (5.40)$$

如图 5.11 所示。为了验证式(5.40), 求出式(5.40)的反变换是否为 $e^{j\omega_0 n}$ 。由式(5.36)有

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) e^{j\omega n} d\omega$$

图 5.11 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换

注意,在任意一个长度为 2π 的积分区间内只包括和式(5.40)中的一个冲激,因此,如果所选择的积分区间包含 $\omega_0 + 2\pi r$ 处的冲激,则

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = e^{j(\omega_0 + 2\pi r)n} = e^{j\omega_0 n} \quad (5.41)$$

即

$$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

因此,如果一个周期性序列表示为离散时间傅里叶级数

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = 2\pi/N \quad (5.42)$$

则根据式(5.40)及其变换对,可以得到

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k \left[2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l) \right], \quad \omega_0 = 2\pi/N \quad (5.43)$$

如果将 k 的取值范围选为 $k=0 \sim N-1$,则式(5.43)可展开为

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= 2\pi c_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l) + 2\pi c_1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \cdots \\ &\quad + 2\pi c_{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[\omega - (N-1)\omega_0 - 2\pi l], \quad \omega_0 = 2\pi/N \end{aligned} \quad (5.44)$$

在式(5.44)中,每一项中的和式只是为了保证这一项所表示的冲激是以 2π 为周期的。如果注意到 c_k 本身也是以 N 为周期(也就是对 ω 以 2π 为周期)的,当将 k 的取值范围扩大到所有整数时,式(5.44)就可以写成更简单的形式,即

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0), \quad \omega_0 = 2\pi/N \quad (5.45)$$

在式(5.45)中, k 取 $0 \sim N-1$ 各项就对应了式(5.44)中 $l=0$ 的各项, k 取 $N \sim 2N-1$ 各项就对应了式(5.44)中 $l=1$ 的各项……,以此类推。

至此,得到了离散时间周期序列的离散时间傅里叶变换表示。即:如果一个以 N 为周期的离散时间信号,其离散时间傅里叶级数的系数为 c_k ,则它的离散时间傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (5.46)$$

该式与连续时间周期信号的傅里叶变换表示式是完全对应的。

5.3.4 离散时间傅里叶变换的性质

离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶变换一样,也具有很多重要的性质。这些性质不仅深刻揭示了离散时间信号的时域特性与频域特性的关系,而且简化了一个信号正变换

和反变换的求取。通过本节的讨论,将会发现离散时间傅里叶变换的性质与连续时间傅里叶变换的性质有许多相似之处,但也有若干明显的差别。为了方便起见,采用如下的符号表示变换对:

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

1. 周期性

离散时间傅里叶变换对于 ω 来说总是以 2π 为周期的。这一点与连续时间傅里叶变换有较大区别。

2. 线性

$$\text{若 } x_1[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \quad x_2[n] \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$$

则有

$$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \quad (5.47)$$

3. 共轭对称性

如果 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则由式(5.36)可得

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{j\omega}) \quad (5.48)$$

若 $x[n]$ 是一实数序列, 那么 $x^*[n] = x[n]$, 于是有

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad (5.49)$$

由此可知: $X(e^{j\omega})$ 的实部是 ω 的偶函数, 虚部是 ω 的奇函数; $X(e^{j\omega})$ 的模是 ω 的偶函数, 相位是 ω 的奇函数。如果把 $X(e^{j\omega})$ 分解成偶部 $x_{ev}[n]$ 与奇部 $x_{od}[n]$, 则可得

$$\begin{cases} x_{ev}[n] \leftrightarrow \text{Re}[X(e^{j\omega})] \\ x_{od}[n] \leftrightarrow \text{jIm}[X(e^{j\omega})] \end{cases} \quad (5.50)$$

因此, 实偶信号的傅里叶变换是 ω 的实偶函数; 实奇信号的傅里叶变换是 ω 的虚奇函数。这些结论及它们的推证方法都与连续时间傅里叶变换的情况相同。

4. 时移和频移特性

若

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

那么

$$x[n - n_0] \leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0} \quad (5.51)$$

而且

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (5.52)$$

式(5.51)表明信号在时域的平移不会改变其幅频特性, 只会给相频特性附加一个线性的相移。

5. 时域差分与求和

离散时间下求和就相应于连续时间情况下的积分。而一阶差分就相应于连续时间情况下的一阶微分。考虑一阶差分信号 $x[n] - x[n - 1]$, 根据线性和时移性质, 若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则其傅里叶变换为

$$x[n] - x[n - 1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (5.53)$$

离散时间的时域求和与连续时间的时域积分相对应,可得到

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \leftrightarrow \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \quad (5.54)$$

由此式可见,离散时间傅里叶变换中的 $(1 - e^{-j\omega})$ 就相对于连续时间傅里叶变换中的 $j\omega$ 。

6. 时域和频域的尺度变换

由于离散时间信号在时间上的离散性,因此时域和频域的尺度变换和连续时间情况下稍有不同。所谓离散时间信号的尺度变换只是对序列的长度变化而言的,其实质是对信号的抽取或内插。一般而言,由于对信号进行抽取的过程是不可逆的,因此抽取所得信号的傅里叶变换与原信号的傅里叶变换没有必然的联系,这里仅对信号在内插时的情况加以讨论。假设 k 为整数,定义一个信号

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & n \text{ 是 } k \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.55)$$

图 5.12 画出了 $k=3$ 时的 $x_{(3)}[n]$ 。显然, $x_{(k)}[n]$ 是在 $x[n]$ 的连续值之间插入 $k-1$ 个零点而得到的。当然在 k 为负整数时, $x_{(k)}[n]$ 除了有上述内插过程外,还要进行一次反转。根据式(5.55)的定义,显然有

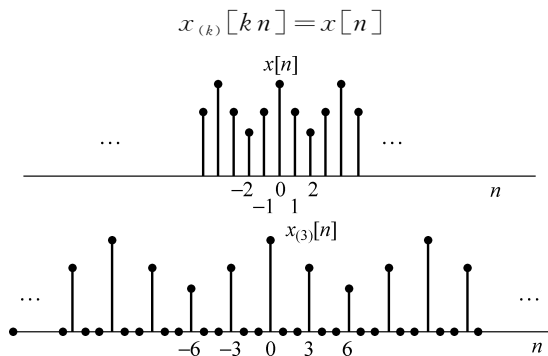


图 5.12 在序列 $x[n]$ 的每一个值之间插入两个零值而得到的序列 $x_{(3)}[n]$

也就是说式(5.55)定义的内插过程是可逆的。即有

$$\begin{aligned} X_{(k)}(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n] e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[rk] e^{-j\omega rk} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] e^{-j\omega rk} = X(e^{jk\omega}) \end{aligned} \quad (5.56)$$

即

$$x_{(k)}[n] \leftrightarrow X(e^{jk\omega}) \quad (5.57)$$

式(5.57)又一次表明了时域和频域之间的反比关系。若 $k > 1$,则信号在时域中扩展了,随时间的变化减慢了,而它的傅里叶变换就压缩了。由于 $X(e^{j\omega})$ 是周期的,且周期为 2π ,因而 $X(e^{jk\omega})$ 也是周期的,其周期为 $2\pi/|k|$ 。图 5.13 通过一个矩形脉冲序列的例子来说明这个性质。

作为特例,当 $k = -1$ 时,则有

$$x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega}) \quad (5.58)$$

此式表明:信号在时间域中的反折相应于在频域中其频谱的反折。

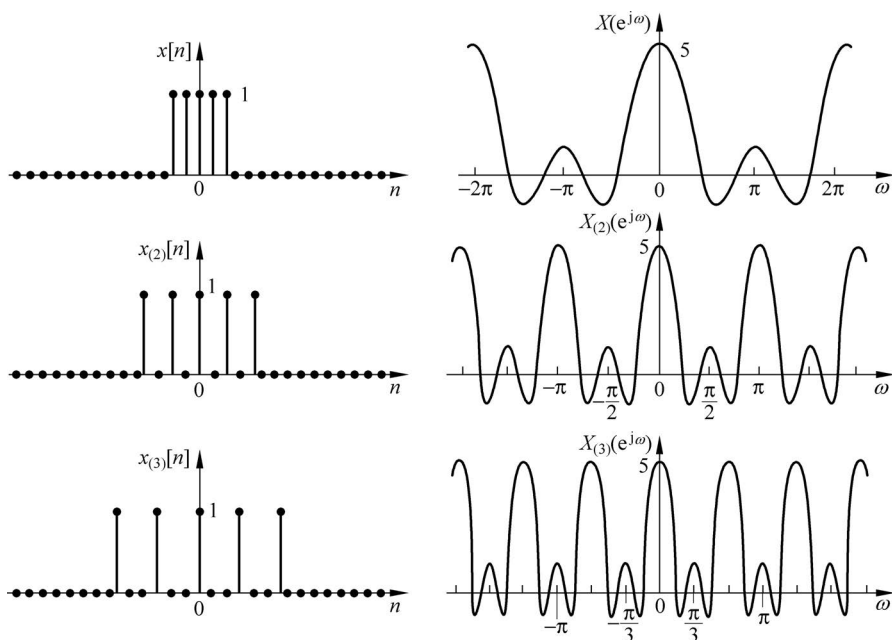


图 5.13 时域与频域的尺度变换特性

7. 频域微分特性

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 根据式(5.36), 将其两边对 ω 求微分可得

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} jn x[n] e^{-j\omega n} \quad (5.59)$$

显然上式右边就是 $-jn x[n]$ 的傅里叶变换, 两边都乘以 j 可得到

$$n x[n] \leftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \quad (5.60)$$

8. 巴什瓦尔定理

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (5.61)$$

对于周期信号则有

$$\frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k \in \langle N \rangle} |c_k|^2 \quad (5.62)$$

式(5.61)和式(5.62)与连续时间情况的巴什瓦尔定理很类似, 其推导过程也完全类似。 $|X(e^{j\omega})|^2$ 称为 $x[n]$ 的能量谱密度, $|c_k|^2$ 称为周期信号的功率谱。

9. 卷积性质

1) 时域卷积

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, $h[n] \leftrightarrow H(e^{j\omega})$, 则有

$$x[n] * h[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \quad (5.63)$$

这一性质的证明过程与连续时间傅里叶变换卷积特性的证明完全相似。卷积特性提供了对离散时间 LTI 系统进行频域分析的理论基础。

2) 频域卷积(调制特性)

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, $y[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega})$, 则有

$$x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (5.64)$$

由于 $X(e^{j\omega})$ 与 $Y(e^{j\omega})$ 都是以 2π 为周期的, 因此式(5.64)中的卷积是周期卷积, 它与普通的非周期卷积的区别仅在于积分区间是在一个周期的区间上进行的。由于参与周期卷积的两个函数必须具有相同的周期, 因而卷积的结果也一定是周期的, 而且和参与卷积的函数具有相同的周期。

5.3.5 离散时间 LTI 系统的频域分析

1. 离散时间 LTI 系统的频域分析

如果一个离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应为 $h[n]$, 输入信号为 $x[n]$, 则根据离散时间傅里叶变换的卷积性质和时域分析方法, 即系统的输出响应 $y[n]$ 为

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (5.65)$$

则

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \quad (5.66)$$

其中, $X(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 分别是 $x[n]$, $h[n]$ 和 $y[n]$ 的傅里叶变换。 $H(e^{j\omega})$ 也称为系统的频率响应。由于 $H(e^{j\omega})$ 与 $h[n]$ 是一一对应的, 因此它可以完全表征离散时间 LTI 系统。从式(5.66)可知: 只要知道 LTI 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$, 就可以通过对 $x[n]$ 作离散时间傅里叶变换得到 $X(e^{j\omega})$, 再根据此式求出 $Y(e^{j\omega})$ 并对其求傅里叶反变换即得系统的输出响应, 这就是对离散时间 LTI 系统进行频域分析的基本方法。

1) LTI 离散时间系统对复指数序列的响应

与连续时间情况一样, 用复指数序列作为基本信号是因为它是 LTI 离散时间系统的特征函数。若 LTI 系统的输入为 z^n , 则输出为

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} = H(z) z^n \quad (5.67)$$

式中,

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \quad (5.68)$$

是一个常复数, 是与特征函数 z^n 有关的特征值。可见, 若 $x[n]$ 是一个复指数序列 z^n , 则输出 $y[n]$ 就是同样的复指数序列 z^n 乘以常数 $H(z)$ 。

如果系统的单位抽样响应为 $h[n]$, 而输入为 $x[n] = z^n = e^{j\omega n}$, 式中 $z = e^{j\omega}$, ω 为数字频率, 可得系统输出 $y[n]$ 为

$$y[n] = H(z) e^{j\omega n} = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \quad (5.69)$$

由此可见, LTI 系统对复指数序列的响应是一个同频率的复指数序列, 在幅度上的变化 $|H(e^{j\omega})|$ 和在相位上的变化 $\angle H(e^{j\omega})$ 是不同的。

2) LTI 离散时间系统对周期序列的响应

下面, 用频域分析方法求解系统对任意周期序列的响应。

根据系统的线性时不变的性质, 如果已知系统对复指数序列 z^n 的响应为 $H[z]z^n$, 就

可以求出该系统对所有不同频率复指数序列以及不同频率复指数序列线性组合的响应,即若 $z_k^n \rightarrow H(z_k)z_k^n$ 。根据 LTI 系统的齐次性,有 $c_k z_k^n \rightarrow c_k H(z_k)z_k^n$, 式中, $k=0,1,2,\dots,N-1$ 。而基波周期为 N 的周期序列 $x[n]$ 可用 N 个成谐波关系的复指数序列的加权和来表示,即

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k e^{j(2\pi/N)kn} \quad (5.70)$$

根据 LTI 系统的叠加性质,且令 $z_k = e^{j2\pi k/N}$, 有

$$\sum_{k \in \langle N \rangle} c_k e^{jk2\pi n/N} \leftrightarrow \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k H(e^{j2\pi k/N}) e^{jk2\pi n/N} \quad (5.71)$$

则系统对周期序列 $x[n]$ 的响应 $y[n]$ 为

$$y[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k H(e^{j(2\pi/N)k}) e^{j(2\pi/N)kn} \quad (5.72)$$

可见,系统的输出也是以 N 为周期的,也是 N 个成谐波关系复指数序列的加权和,每一个复指数序列的系数是相应的输入序列的系数 c_k 乘以 $H(e^{j2\pi k/N})$ 。即 $c_k H(e^{j(2\pi/N)k})$ 是 $y[n]$ 的傅里叶级数系数, $H(e^{j(2\pi/N)k})$ 是系统与各谐波分量相对应的特征值。

可见,当离散系统的输入是角频率为 ω , 取样周期为 T 的复指数序列(或正弦序列)时,系统的稳态响应也是同频率、同取样周期的复指数序列(或正弦序列)。但它的模被乘上了在点 $z = e^{j\omega T}$ 上计算的 $H(e^{j\omega T})$ 的模,它的相位增加了同一点上计算的 $H(e^{j\omega T})$ 的附加相位。即当输入信号为

$$x[n] = A \sin(\omega T n) \cdot \varepsilon[n]$$

其中, $\omega = 2\pi f$, f 是输入信号频率, T 是取样信号周期。

系统的稳态输出为

$$y[n]_{\text{稳态}} = A |H(e^{j\omega T})| \sin[\omega T n + \angle H(e^{j\omega T})] \cdot \varepsilon[n] \quad (5.73)$$

3) LTI 离散时间系统对非周期序列的响应

非周期序列 $x[n]$ 输入到单位冲激响应为 $h[n]$ 的离散时间系统,由式(5.35)可知, $x[n]$ 可看成 $e^{j\omega n}$ 的一个连续线性组合,即

$$x[n] = \int_{2\pi} \frac{X(e^{j\omega}) d\omega}{2\pi} e^{j\omega n} \quad (5.74)$$

如前面所述,离散时间 LTI 系统对 $e^{j\omega n}$ 的响应为 $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$, 根据 LTI 系统的线性叠加性质,输出信号(即系统响应) $y[n]$ 为

$$y[n] = \int_{2\pi} \frac{X(e^{j\omega}) d\omega}{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \quad (5.75)$$

可改写为

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} Y(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (5.76)$$

由此可得

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

这是频域分析中离散时间 LTI 系统的输入输出关系表达式。此式表明:系统对输入序列的作用,表现为以 $H(e^{j\omega})$ 与输入频谱 $X(e^{j\omega})$ 相乘,从而使输出的频谱的振幅和相位变化。因此,从频域角度,LTI 系统的作用是一个频谱振幅和相位的变换器,通过它可以实现频谱的振幅和相位,使输出的波形符合人们的要求。

2. 系统的频率响应

对于一个线性时不变系统,其输出 $y[n]$ 和输入 $x[n]$ 之间满足如下形式的线性常系数的差分方程:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^M b_r x[n-r] \quad (5.77)$$

式中, a_k 和 b_r 都是常数。对上式两边进行离散时间傅里叶变换,并应用傅里叶变换的线性和时移性质,即得

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{r=0}^M b_r e^{-j\omega r} X(e^{j\omega}) \quad (5.78)$$

由此可得系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r e^{-j\omega r}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (5.79)$$

式(5.79)表明:由线性常系数差分方程描述的离散时间 LTI 系统的频率响应是一个关于 $e^{-j\omega}$ 的有理函数。由式(5.75)与式(5.79)相比可见, $H(e^{j\omega})$ 分子多项式的系数就是差分方程右边各项的系数,分母多项式的系数就是差分方程左边各项的系数。因此,根据式(5.75)就可以直接确定系统的频率响应。

【例 5-13】 某离散系统的系统函数 $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$, 试求其系统频率响应。

解 由 $H(z)$ 的表示式可知,其收敛域为 $|0.5z^{-1}| < 1$, 系统的频率响应(频率特性)

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{1+e^{-j\omega T}}{1-0.5e^{-j\omega T}} \\ &= \frac{1+\cos \omega T - j\sin \omega T}{1-0.5\cos \omega T + j0.5\sin \omega T} \\ &= \frac{\sqrt{(1+\cos \omega T)^2 + \sin^2 \omega T} e^{j\psi}}{\sqrt{(1-0.5\cos \omega T)^2 + (0.5\sin \omega T)^2} e^{j\theta}} \end{aligned}$$

若令 $1+e^{-j\omega T} = B e^{j\psi}$, $1-0.5e^{-j\omega T} = A e^{j\theta}$, 可得

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{(1+\cos \omega T)^2 + \sin^2 \omega T} = \sqrt{2(1+\cos \omega T)} \\ A &= \sqrt{(1-0.5\cos \omega T)^2 + (0.5\sin \omega T)^2} = \sqrt{1.25 - \cos \omega T} \\ \psi &= \arctan \frac{-\sin \omega T}{1+\cos \omega T} \\ \theta &= \arctan \frac{0.5\sin \omega T}{1-0.5\cos \omega T} \end{aligned}$$

若令系统的频率响应

$$H(e^{j\omega T}) = H_d(\omega) e^{j\varphi(\omega)_d}$$

则

$$H_d(\omega) = \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{2(1+\cos \omega T)}{1.25 - \cos \omega T}}$$

$$\begin{aligned}\varphi_d(\omega) &= \psi - \theta = \arctan \frac{-\sin \omega T}{1 + \cos \omega T} - \arctan \frac{0.5 \sin \omega T}{1 - 0.5 \cos \omega T} \\ &= -\arctan \frac{3 \sin \omega T}{1 + \cos \omega T}\end{aligned}$$

由幅频和相频特性的表示式可见,它们都以 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 周期性地重复变化。

【例 5-14】 一个 LTI 系统,其 $h[n] = a^n \varepsilon[n]$, $-1 < a < 1$, 输入 $x[n] = \cos(2\pi n/N)$, 求系统响应。

解 将 $x[n]$ 写成离散傅里叶级数的形式,即

$$x[n] = (e^{j(2\pi/N)n} + e^{-j(2\pi/N)n})/2$$

先求出

$$H[z] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k (e^{j2\pi/N})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (ae^{-j2\pi/N})^k$$

根据无穷项几何级数求和公式 $\sum_{m=0}^{\infty} r^m = \frac{1}{1-r}$ 得到

$$H(e^{j2\pi/N}) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi/N}}$$

求系统响应,由式(5.72)得

$$\begin{aligned}y[n] &= \frac{1}{2}H(e^{j2\pi/N})e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2}H(e^{-j2\pi/N})e^{-j(2\pi/N)n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi/N}} e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - ae^{j2\pi/N}} e^{-j(2\pi/N)n}\end{aligned}$$

若令 $\frac{1}{1 - ae^{-j2\pi/N}} = r e^{j\theta}$, 则

$$y[n] = \frac{1}{2}r e^{j(2\pi n/N + \theta)} + \frac{1}{2}r e^{-j(2\pi n/N + \theta)} = r \cos(2\pi n/N + \theta)$$

设 $N=4$, $\frac{1}{1 - ae^{-j2\pi/4}} = \frac{1}{1 + ja}$, 则 $r = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, $\theta = -\arctan a$, 所以

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cos(2\pi n/N - \arctan a)$$

【例 5-15】 一个 LTI 离散系统,系统函数 $H(z) = \frac{0.4(1+z^{-1})}{1-0.2z^{-1}}$, 系统的输入为幅度等于 10V、频率为 100Hz 的正弦序列,设抽样频率为 1200Hz,求其稳态输出。

解 根据系统函数 $H(z) = \frac{0.4(1+z^{-1})}{1-0.2z^{-1}}$ 可得

$$H(e^{j\omega T}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{0.4(1+(e^{j\omega T})^{-1})}{1-0.2(e^{j\omega T})^{-1}}$$

又因输入信号幅度 $A=10\text{V}$, 输入频率 $f=100\text{Hz}$, 抽样频率 $1/T=1200\text{Hz}$, 故 $\omega T = 2\pi fT = 2\pi/12$, 所以输入信号表达为

$$x[n] = 10 \sin(2\pi n/12) \cdot \varepsilon[n]$$

将 $\omega T = 2\pi fT = 2\pi/12$ 代入 $H(e^{j\omega T}) = \frac{0.4(1+(e^{j\omega T})^{-1})}{1-0.2(e^{j\omega T})^{-1}}$, 求出

$$|H(e^{j\omega T})| = 0.924, \quad \text{和} \quad \angle H(e^{j\omega T}) = -21.9^\circ$$

故系统的正弦稳态输出 $y[n] \Big|_{\text{稳态}} = 9.24 \sin \left[\frac{2\pi}{12}n - 21.9^\circ \right] \cdot \varepsilon[n]$

5.4 用 MATLAB 进行离散时间系统的时域与频域分析

5.4.1 用 MATLAB 实现离散时间序列卷积

下面是利用 MATLAB 计算两离散序列卷积和 $f[k] = f_1[k] * f_2[k]$ 的实用函数 `dconv()`, 该程序在计算出卷积和 $f[k]$ 的同时, 还绘出序列 $f_1[k]$, $f_2[k]$ 和 $f[k]$ 的时域波形图, 并返回 $f[k]$ 的非零样值点的对应向量。

```
function [f,k] = dconv(f1,f2,k1,k2)
% The function of computer f = f1 * f2
% f: 卷积和序列 f(k)对应的非零样值向量
% k: 序列 f(k)的对应序号向量
% f1: 序列 f1(k)的非零样值向量
% f2: 序列 f2(k)的非零样值向量
% k1: 序列 f1(k)的对应序号向量
% k2: 序列 f2(k)的对应序号向量
f = conv(f1,f2) % 计算序列 f1 与 f2 的卷积和 f
k0 = k1(1) + k2(1); % 计算序列 f 非零样值的起点位置
k3 = length(f1) + length(f2) - 2; % 计算卷积和 f 的非零样值的宽度
k = k0:k0 + k3 % 确定卷积和 f 非零样值的序号向量
subplot 221
stem(k1,f1) % 在子图 1 绘序列 f1(k)时域波形图
title('f1(k)')
xlabel('k')
ylabel('f1(k)')
subplot 222
stem(k2,f2) % 在图 2 绘序列 f2(k)时域波形图
title('f2(k)')
xlabel('k')
ylabel('f2(k)')
subplot 223
stem(k,f); % 在子图 3 绘序列 f(k)的波形图
title('f(k) = f1(k) * f2(k)')
xlabel('k')
ylabel('f(k)')
h = get(gca,'position');
h(3) = 2.3 * h(3);
set(gca,'position',h) % 将第三个子图的横坐标范围扩为原来的 2.3 倍
```

【例 5-16】 试用 MATLAB 计算如下两序列 $f_1[k]$, $f_2[k]$ 的卷积和 $f[k]$, 绘出它们的时域波形, 并说明序列 $f_1[k]$, $f_2[k]$ 的时域宽度与序列 $f[k]$ 的时域宽度的关系。

$$f_1[k] = \begin{cases} 1, & k = -1 \\ 2, & k = 0 \\ 1, & k = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_2[k] = \begin{cases} 1, & -2 \leq k \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

解 利用上述函数 dconv() 实现卷积和的 MATLAB 程序如下:

```
% 离散时间序列卷积实现程序
f1 = [1 2 1];
k1 = [-1 0 1];
f2 = ones(1,5);
k2 = -2:2;
[f,k] = dconv(f1,f2,k1,k2)
```

程序运行结果如下:

```
f =
    1     3     4     4     4     3     1
k =
   -3    -2    -1     0     1     2     3
```

程序绘制的序列时域波形图如图 5.14 所示。

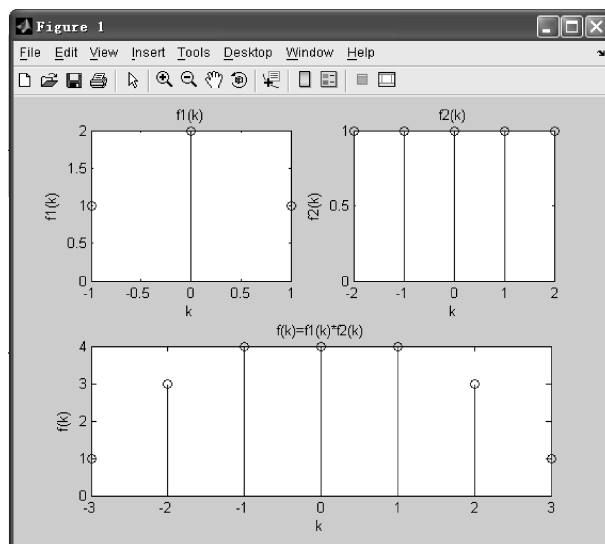


图 5.14 离散序列卷积和

由程序运行结果及绘制的波形可以看出,序列 $f[k]$ 的时域宽度等于序列 $f_1[k]$, $f_2[k]$ 的时域宽度之和减一。

【例 5-17】 试用 MATLAB 计算如下两序列 $f_1[k]$, $f_2[k]$ 的卷积和 $f[k]$ 图解法方法的实现过程。并绘出变换的时域波形。

$$f_1[k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_2[k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

解 实现上述过程的程序如下:

```
% 离散卷积图解法方法的实现程序
n = [-10:10];
x = zeros(1,length(n));
```

```

x([find((n>=0)&(n<=4))]) = 1;
h = zeros(1,length(n));
h([find((n>=0)&(n<=5))]) = 1;
subplot 321; stem(n,x,'*k');
subplot 322; stem(n,h,'k');
n1 =fliplr(-n); h1 =fliplr(h);
subplot 323; stem(n,x,'*k'); hold on; stem(n1,h1,'k');
h2 = [0,h1]; h2(length(h2)) = []; n2 = n1;
subplot 324; stem(n,x,'*k'); hold on; stem(n2,h2,'k');
h3 = [0,h2]; h3(length(h3)) = []; n3 = n2;
subplot 325; stem(n,x,'*k'); hold on; stem(n3,h3,'k');
n4 = -n; nmin = min(n1) - max(n4); nmax = max(n1) - min(n4); n = nmin:nmax;
y = conv(x,h);
subplot 326; stem(n,y,'.k');

```

程序运行结果如图 5.15 所示。

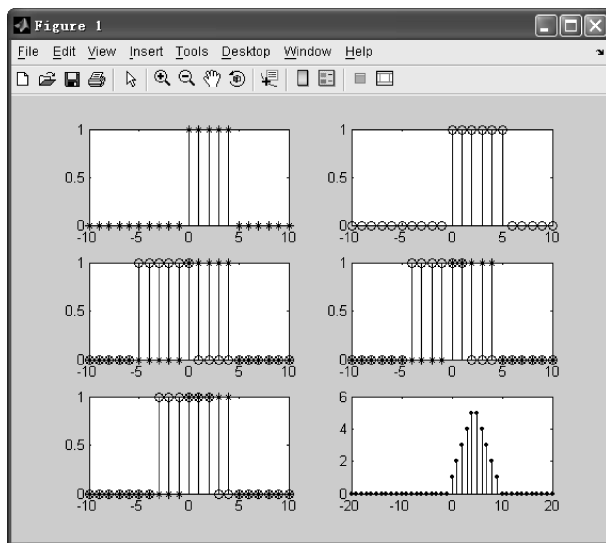


图 5.15 离散卷积图解法方法过程图

5.4.2 用 MATLAB 实现离散时间系统的单位响应

在 MATLAB 中,函数 `impz()` 能够绘出由式(5.2)向量 `a` 和 `b` 定义的离散系统在指定时间范围内单位响应的时域波形,并能求出系统单位响应在指定时间范围内的数值解。函数 `impz()` 调用格式有:

```
impz(b,a)
```

该调用格式以默认方式绘出由向量 `a` 和 `b` 定义的离散系统在指定时间范围内单位响应的时域波形。

```
impz(b,a,n)
```

该调用格式将绘出由向量 `a` 和 `b` 定义的离散系统在 $0 \sim n$ (n 必须为整数)离散时间范围内单位响应的时域波形。

```
impz(b,a,n1:n2)
```

该调用格式将绘出由向量 a 和 b 定义的离散系统在 $n_1 \sim n_2$ (n_1, n_2 必须为整数, 且 $n_1 < n_2$) 离散时间范围内单位响应的时域波形。

```
y = impz(b,a,n1;n2)
```

该调用格式并不绘出系统单位响应的时域波形, 而是求出由向量 a 和 b 定义的离散系统在 $n_1 \sim n_2$ (n_1, n_2 必须为整数, 且 $n_1 < n_2$) 离散时间范围内的系统单位响应的数值解。

【例 5-18】 已知描述某离散时间系统差分方程为 $y[k] - y[k-1] - 2y[k-2] = f[k]$, 试用 MATLAB 绘出该系统 $0 \sim 50$ 时间范围内单位响应的波形。

解 实现上述过程的 MATLAB 程序如下:

```
% 离散系统的单位响应实现程序
a=[2 -2 1];
b=[1 3 2];
impz(b,a)
```

程序运行结果如图 5.16 所示。

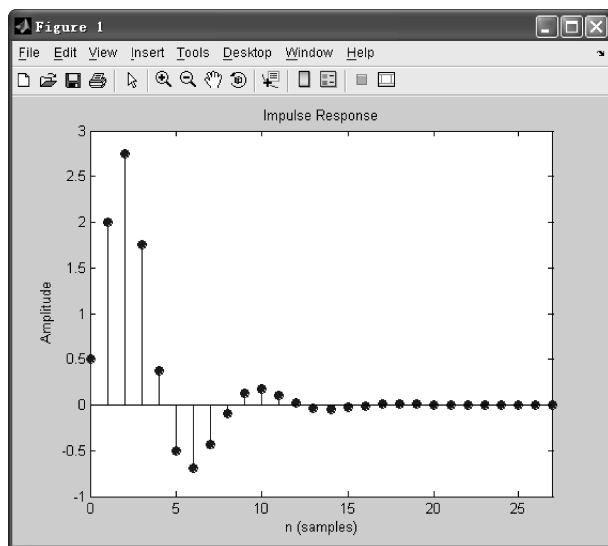


图 5.16 离散系统的单位响应曲线

5.4.3 用 MATLAB 求 LTI 离散系统的响应

MATLAB 提供了求 LTI 离散系统响应的函数 `filter()`。该函数能求出由差分方程描述的离散系统在指定时间范围内的输入序列所产生的响应序列的数值解。其调用格式为

```
y = filter(b,a,x)
```

其中, a 和 b 是由描述系统的差分方程的系数决定的表示离散系统的两个行向量(与 5.5.1 节相同), x 是包含输入序列非零样值点的行向量。则该调用格式为求出系统在与 x 的取样时间点相同的输出序列样值, 即输出向量 y 包含了与输入向量 x 所在样本同一区间上的样本。

【例 5-19】 已知描述某离散时间系统差分方程如下:

$$y[k] - \frac{1}{4}y[k-1] + \frac{1}{2}y[k-2] = f[k] + f[k-1]$$

且知该系统输入序列为 $f[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^k \epsilon[k]$, 试用 MATLAB 绘出输入序列的时域波形, 求出该系统 $[0, 20]$ 区间的样值, 画出系统的零状态响应波形。

解 用 MATLAB 实现上述过程的程序如下:

```
% LTI 离散系统的响应实现程序
a = [1 -0.25 0.5];
b = [1 1];
k = 0:20;
x = (1/2).^k;
y = filter(b,a,x)
subplot 211
stem(k,x)
title('输入序列')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
subplot 212
stem(k,y)
title('响应序列')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```

绘制的系统输入及响应序列波形如图 5.17 所示。

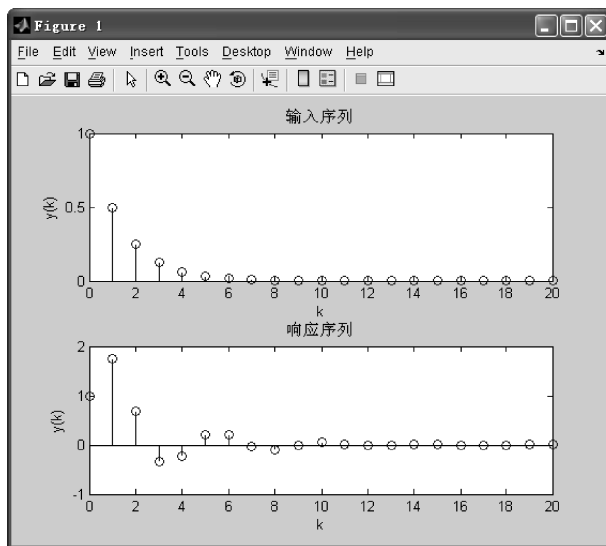


图 5.17 离散系统的输入及响应序列

程序运行结果为

```
y =
Columns 1 through 9
    1.0000    1.7500    0.6875   -0.3281   -0.2383    0.1982    0.2156   -0.0218   -0.1015
Columns 10 through 18
   -0.0086    0.0515    0.0187   -0.0204   -0.0141    0.0069    0.0088   -0.0012   -0.0047
Columns 19 through 21
   -0.0006    0.0022    0.0008
```

【例 5-20】 已知描述某离散时间系统差分方程为

$$y[k] + y[k-1] + \frac{1}{4}y[k-2] = f[k]$$

试用 MATLAB 绘出该系统单位阶跃响应 $g[k]$ 的时频波形。

解 用 MATLAB 实现上述过程的程序如下：

```
% LTI 离散系统的单位阶跃响应
a = [1 1 1/4];
b = [1];
k = 0:15;
x = ones(1,length(k));
y = filter(b,a,x);
stem(k,y);
title('离散系统单位阶跃响应')
xlabel('k');
ylabel('g(k)')
```

程序运行结果如图 5.18 所示。

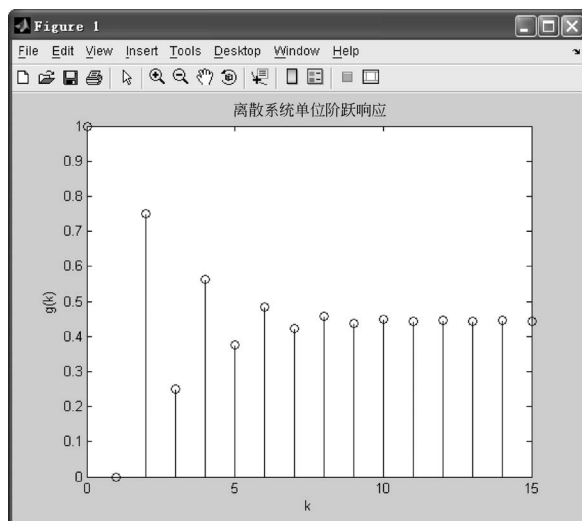


图 5.18 离散系统单位阶跃响应曲线

利用 `dconv()` 函数卷积和求解离散系统的零状态响应。

【例 5-21】 已知某 LTI 离散系统,其单位响应 $h[k] = \epsilon[k] - \epsilon[k-4]$,求该系统在激励为 $f[k] = \epsilon[k] - \epsilon[k-3]$ 时的零状态响应 $y[k]$,并绘出其时域波形图。

解 利用函数 `dconv()` 实现零状态响应的 MATLAB 程序如下：

```
% 利用 dconv() 求解零状态响应
f1 = ones(1,4);
k1 = 0:3;
f2 = ones(1,3);
k2 = 0:2;
[f,k] = dconv(f1,f2,k1,k2)
```

程序运行结果为

```
f =
    1    2    3    3    2    1
k =
    0    1    2    3    4    5
```

程序绘制的序列时域波形图如图 5.19 所示。

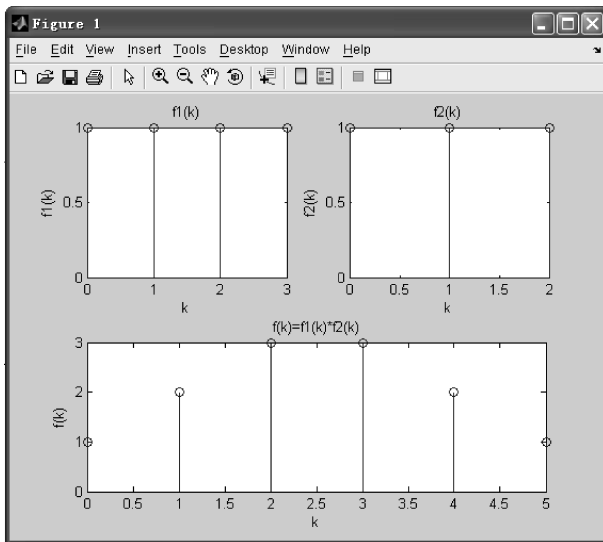


图 5.19 程序绘制的序列时域波形图

5.4.4 用 MATLAB 求离散信号的频谱分析

【例 5-22】 如图 5.20 所示, 试用 MATLAB 计算周期矩形波序列的 DFS 系数。

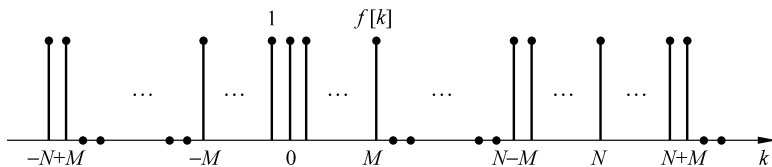
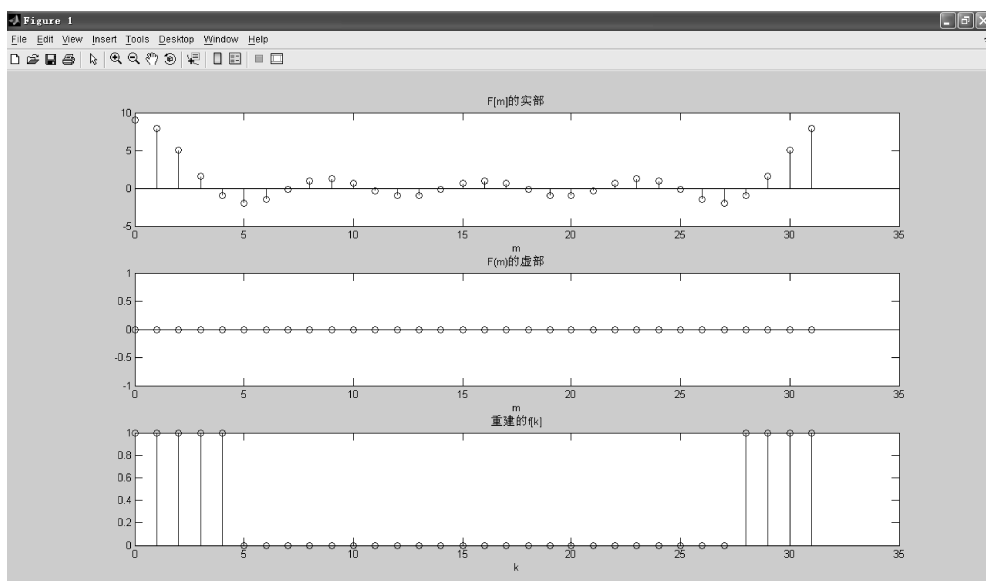


图 5.20 周期矩形波序列

解 实现上述过程的 MATLAB 程序如下:

```
% 周期矩形波序列的傅里叶级数实现程序
N = 32; M = 4; % 定义周期矩形波序列的参数
f = [ones(1, M + 1) zeros(1, N - 2 * M - 1) ones(1, M)]; % 产生序列
F = fft(f); % 计算 DFS 系数
m = 0: N - 1;
subplot 311
stem(m, real(F));
title('F[m]的实部');
xlabel('m');
subplot 312;
stem(m, imag(F));
title('F(m)的虚部');
xlabel('m');
fr = ifft(F); % 重建的 f[k]
subplot 313;
stem(m, real(fr));
xlabel('k');
title('重建的 f[k]');
```

程序运行结果如图 5.21 所示。

图 5.21 $N=32$ 、 $M=4$ 的周期脉冲序列的 DFS 系数

【例 5-23】 已知一个有限长脉冲序列 $x[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M, M=4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 用 FFT 计算

其频谱。

解 利用 FFT 计算其频谱的 MATLAB 程序如下：

```
% 有限长脉冲序列的频谱实现程序
N = 32; M = 4;          % 定义周期脉冲序列的参数
k = -N/2:(N/2-1);
x = [ones(1,M+1) zeros(1,N-2*M-1) ones(1,M)]; % 产生序列
X = fft(x,N);
subplot 211;
stem(k,fftshift(x));
ylabel('x[k]');
xlabel('k');
omega = 2 * pi/N * k;
subplot 212;
stem(omega,real(fftshift(X)));
ylabel('X[\Omega]');
xlabel('\Omega/\pi');
```

程序运行结果如图 5.22 所示。

【例 5-24】 有一个信号为 $x[k] = \cos\left(\frac{7\pi}{16}k\right) + 2\cos\left(\frac{9\pi}{16}k\right)$, 试用 FFT 计算其频谱。

解 利用 FFT 计算其频谱的 MATLAB 实现程序(使用海宁窗函数)如下：

```
% 求信号  $x(k) = \cos(7 * \pi/16 * k) + 2 * \cos(9 * \pi/16 * k)$  的频谱
M = 80; k = 0:M-1;
w = 0.5 * (1 - cos(2 * pi * k/M)); % 海宁窗函数
x = (cos(7 * pi/16 * k) + 2 * cos(9 * pi/16 * k)) .* w;
N = 256;
X = fft(x,N);
omega = 2 * pi/N * [(0:N-1) - N/2];
```

```

subplot 211;
stem(k,x); xlabel('k'); ylabel('x(k)');
subplot 212;
plot(omega,abs(X));
axis([-pi,pi,0,M/2+3]);
xlabel('\Omega/\pi'); ylabel('X[\Omega]');

```

运行结果如图 5.23 所示。

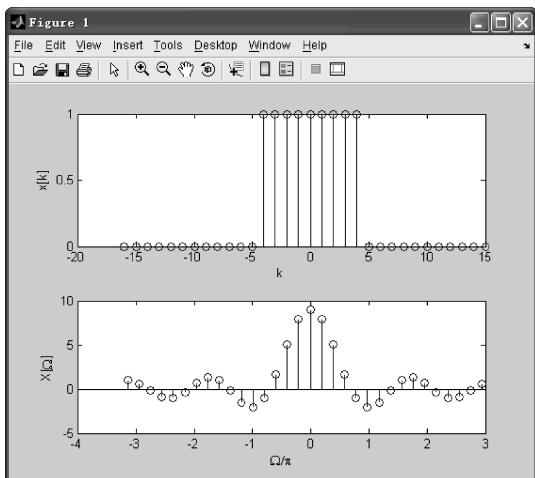


图 5.22 序列及其幅度频谱

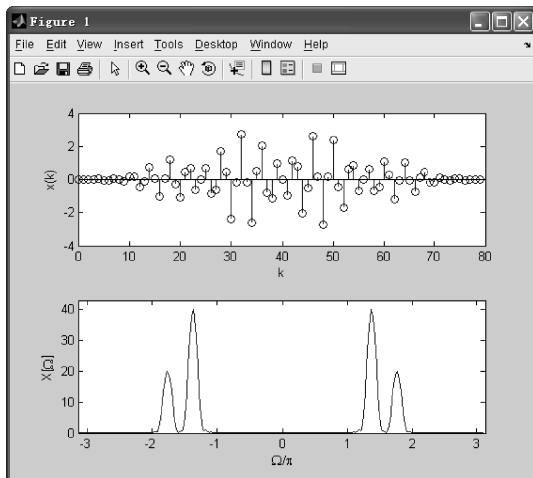


图 5.23 海宁窗, 宽度 $M=80$ 点的 $x(k)$ 和 $X(\Omega)$

利用 FFT 计算其频谱的 MATLAB 实现程序(使用时窗函数)如下:

```

% 求信号 x(k) = cos(7 * pi/16 * k) + 2 * cos(9 * pi/16 * k) 的频谱
M = 80; k = 0:M-1;
x = (cos(7 * pi/16 * k) + 2 * cos(9 * pi/16 * k));
N = 256;
X = fft(x,N);
omega = 2 * pi/N * [(0:N-1) - N/2];
subplot 211;
stem(k,x); xlabel('k'); ylabel('x(k)');
subplot 212;
plot(omega,abs(X));
axis([-pi,pi,0,M/2+3]);
xlabel('\Omega/\pi'); ylabel('X[\Omega]');

```

运行结果如图 5.24(a)所示。 $M=20$ 时,其运行结果如图 5.24(b)所示。

【例 5-25】 有一个信号为 $x[k] = \cos\left(\frac{7\pi}{16}k\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{16}k\right)$, 试用 FFT 计算其频谱。

解 利用 FFT 计算其频谱的 MATLAB 实现程序(使用海宁窗函数)如下:

```

% 求信号 x(k) = cos(7 * pi/16 * k) + cos(9 * pi/16 * k) 的频谱
M = 80; k = 0:M-1;
w = 0.5 * (1 - cos(2 * pi * k/M));
x = (cos(7 * pi/16 * k) + cos(9 * pi/16 * k)) .* w;
N = 256;
X = fft(x,N);
omega = 2 * pi/N * [(0:N-1) - N/2];
subplot 211;
stem(k,x); xlabel('k'); ylabel('x(k)');

```

```
subplot 212;
plot(omega,abs(X));
axis([-pi,pi,0,M/2+3]);
xlabel('\Omega/\pi'); ylabel('X[\Omega]');
```

时窗长度分别为 $M=80, 20$ 的海宁窗, 其运行结果分别如图 5.25(a) 和(b) 所示。

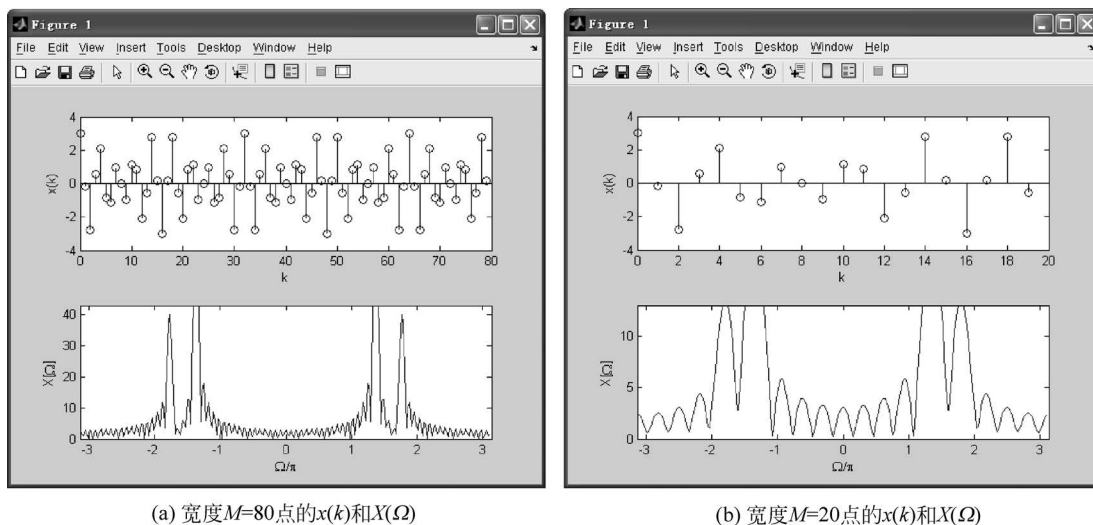


图 5.24 序列及其幅度频谱(时窗)

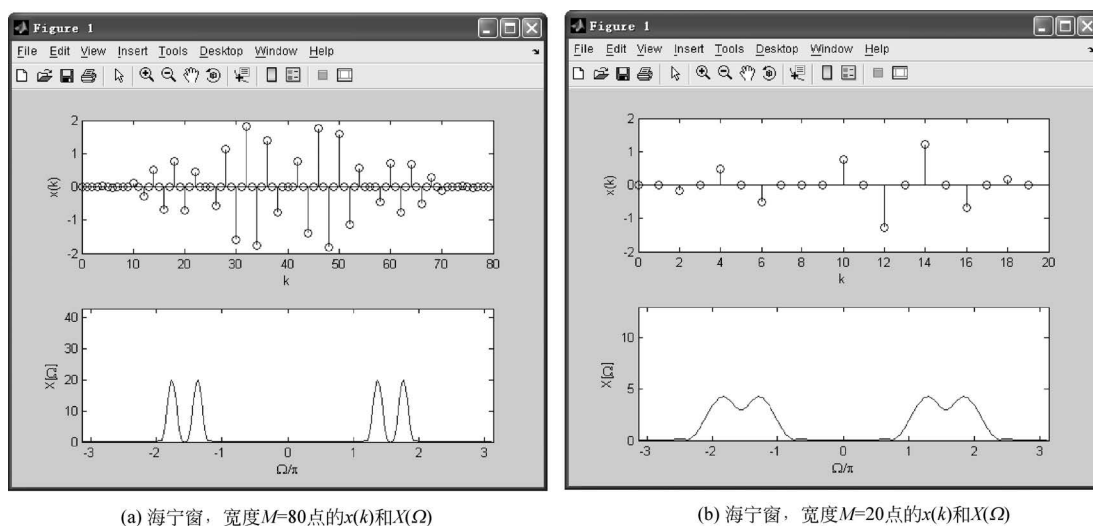


图 5.25 序列及其幅度频谱

习 题

- 5.1 设信号 $f(t)$ 为包含 $0 \sim \omega_m$ 的频带有限信号, 试确定 $f(3t)$ 的抽样频率。
- 5.2 若电视信号占有的频带为 $1 \sim 6\text{MHz}$, 电视台每秒发送 25 幅图像, 每幅图像又分为 625 条水平扫描线, 问每条水平线至少要有多少个抽样点?

5.3 设有差分方程为 $y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = f[n]$, 初始状态 $y[-1] = -\frac{1}{2}$, $y[-2] = \frac{5}{4}$, 试求系统的零输入响应。

5.4 设有离散系统的差分方程为 $y[n] + 4y[n-1] + 3y[n-2] = 4f[n] + f[n-1]$, 试画出其时域模拟图。

5.5 设有一阶系统为

$$y[n] - 0.8y[n-1] = f[n]$$

(1) 试求单位响应 $h[n]$;

(2) 试求阶跃响应 $g[n]$ 。

5.6 设离散系统的单位响应为 $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \epsilon[n]$, 输入信号为 $f[n] = 2^n$, 试求 $f[n] * h[n]$ 。

5.7 已知系统的响应

$$h[n] = a^n \epsilon[n], \quad 0 < a < 1$$

输入信号 $f[n] = \epsilon[n] - \epsilon[n-6]$, 试求系统的零状态响应。

5.8 描述某线性非时变离散系统的差分方程为 $y[n] - 2y[n-1] = f[n]$, 若已知初始状态 $y[-1] = 0$, 激励为单位阶跃序列, 即 $f[n] = \epsilon[n]$, 试求 $y[n]$ 。

5.9 如有齐次差分方程为 $y[n] + y[n-1] - 6y[n-2] = 0$, 已知 $y[0] = 3, y[1] = 1$, 试求其齐次解。

5.10 如有齐次差分方程为 $y[n] + 4y[n-1] + 4y[n-2] = 0$, 已知 $y[0] = y[1] = -2$, 试求其齐次解。

5.11 解下列非齐次差分方程:

(1) $y[n] + 2y[n-1] = f[n], f[n] = (n-2)\epsilon[n], f[0] = 1$

(2) $y[n] - 2y[n-1] = f[n], f[n] = 2\epsilon[n], y[0] = 0$

(3) $y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = f[n], f[n] = \frac{4}{3}(3)^n \epsilon[n], y[0] = y[-1] = 0$

5.12 对如习题图 5.1 所示各系统, 试求:

(1) 单位响应;

(2) 当 $f[n] = \epsilon[n]$ 时, 系统的零状态响应。

5.13 各序列的图形如习题图 5.2 所示, 试求下列卷积和。

(1) $f_1[n] * f_2[n]$ (2) $f_2[n] * f_3[n]$ (3) $f_3[n] * f_4[n]$

5.14 已知系统的激励 $f[n]$ 和单位响应 $h[n]$ 如下, 试求系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$, 并画出其图形。

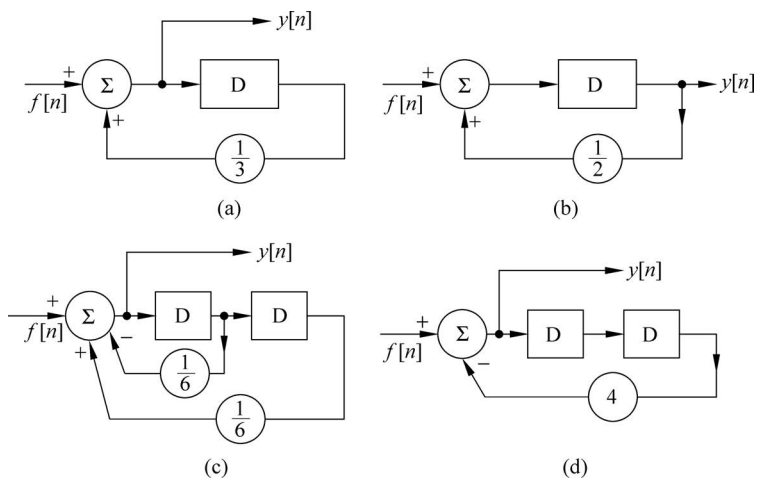
(1) $f[n] = h[n] = \epsilon[n]$

(2) $f[n] = \epsilon[n], h[n] = \delta[n] - \delta[n-3]$

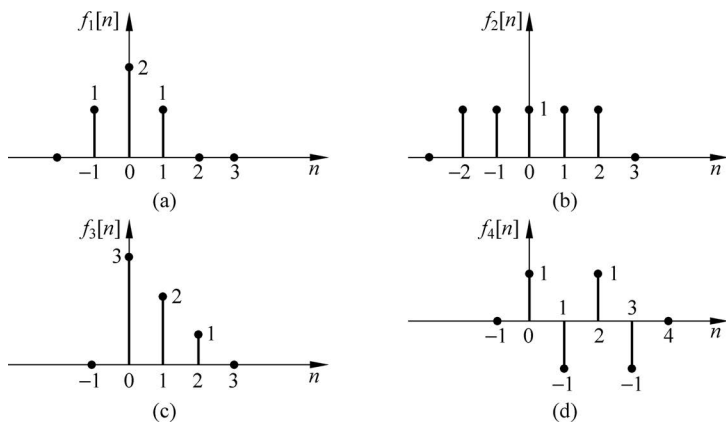
(3) $f[n] = h[n] = \epsilon[n] - \epsilon[n-4]$

5.15 对于线性非时变系统:

(1) 已知系统的单位响应 $h[n]$, 求阶跃响应 $g[n]$ (阶跃响应是激励为单位阶跃序列时, 系统的零状态响应);



习题图 5.1 系统模拟图

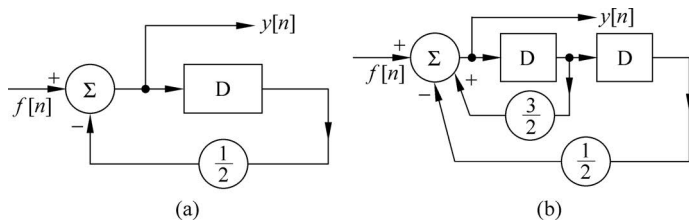


习题图 5.2

(2) 已知系统的阶跃响应 $g[n]$, 求系统的单位响应 $h[n]$ 。

5.16 对以习题图 5.3 为系统的模拟图, 当输入 $f[n]$ 时, 试分别求下列各式的零状态响应。

- (1) $f(n) = \epsilon[n]$ (2) $f[n] = n\epsilon[n]$



习题图 5.3

5.17 已知某线性非时变系统的输入为

$$f[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 4, & n = 1, 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其零状态响应为

$$y_{zs}[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 9, & n \geq 0 \end{cases}$$

试求此系统的单位响应。

5.18 已知离散时间系统的差分方程为 $y[n] - 0.5y[n-1] = f[n]$, 试用迭代法求其单位响应。

5.19 系统差分方程式为 $y[n] - 3y[n-1] + 3y[n-2] - y[n-3] = f[n]$, 用经典法求系统的单位响应。

5.20 已知系统的差分方程模型为 $y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = f[n] - 3f[n-2]$, 试求系统的单位响应。

5.21 已知如下两个序列:

$$f[n] = \begin{cases} 3, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

试用阵列表法求它们的卷积。

5.22 系统的单位响应为 $h[n] = a^n \epsilon[n]$, 其中 $0 < a < 1$ 。若激励信号为一矩形序列, 即 $f[n] = \epsilon[n] - \epsilon[n-N]$, 试求响应 $y[n]$ 。

5.23 已知 $x[n] = 1 + \sin(2\pi/N)n + 3\cos(2\pi/N)n + \cos(4\pi n/N + \pi/2)$, 式中 N 为整数, 试求其频谱。

5.24 某离散系统的系统函数 $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$, 试求其系统频率响应。

5.25 一个 LTI 系统, 其 $h[n] = a^n \epsilon[n]$, $-1 < a < 1$; 输入 $x[n] = \cos(2\pi n/N)$, $N=8$, 试求系统响应。

5.26 一个 LTI 离散系统, 系统函数 $H(z) = \frac{0.4(1+z^{-1})}{1-0.2z^{-1}}$, 系统的输入为幅度等于 10V、频率为 200Hz 的正弦序列, 设抽样频率为 1000Hz, 求其稳态输出。

5.27 用计算机对测量所得的数据 $f(k)$ 进行平均处理。当收到一个测量数据后, 计算机就把这一次输入的数据与前三次输入的数据进行平均, 求这一数据处理过程的频率响应。

5.28 求周期抽样序列串 $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$ 的傅里叶频谱。

5.29 一个 LTI 离散时间系统, 已知 $h[n] = \delta[n-m]$, $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 用频域分析法求 $x[n]$ 通过系统后的波形变化。

5.30 有 LTI 系统, 已知 $h[n] = a^n \epsilon[n]$, $x[n] = \beta^n \epsilon[n]$, 试求系统响应。

5.31 已知描述离散系统的差分方程为 $y[n] - ay[n-1] = x[n]$, $0 < a < 1$, 试求该系统的频响特性。

5.32 已知离散系统激励 $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \epsilon[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \epsilon[n-1]$, 零状态响应 $y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \epsilon[n]$, 试求该系统的频响特性 $H(e^{j\omega})$ 。

MATLAB 实验

M5.1 设系统冲激响应为 $h[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 输入信号为 $f[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 求:

(1) 输出 $y_1[n] = f[n] * h[n]$;

(2) 输出 $y_2[n] = f[n] * h[n+5]$ 。

M5.2 设 $h[n] = (0.9)^n \epsilon[n]$, 输入 $f[n] = \epsilon[n] - \epsilon[n-10]$, 求系统输出 $y[n] = f[n] * h[n]$ 。

M5.3 设离散系统可由下列差分方程表示:

$$y[n] - y[n-1] + 0.9y[n-2] = f[n]$$

试计算 $n = [-20 : 100]$ 时的系统冲激响应和阶跃响应。

M5.4 求以下有限时宽序列 $f[n]$ 的傅里叶变换 $F(e^{j\omega})$ 。

(1) $f[n] = [0.9e^{j\frac{\pi}{3}}]^n, 0 \leq n \leq 10$

(2) $f[n] = 2^n, -10 \leq n \leq 10$

M5.5 对于实序列 $f[n] = \sin\left[\frac{\pi n}{2}\right], -5 \leq n \leq 10$, 求出 $F(e^{j\omega})$ 的实部和虚部, 同时分别求出 $f[n]$ 奇偶分解后的奇部和偶部对应的 $F_o(e^{j\omega})$ 和 $F_e(e^{j\omega})$ 。

M5.6 对于模拟信号 $f(t) = 2\sin 4\pi t + 5\cos 8\pi t$, 以 $t = 0.01n$ ($n = [0 : N-1]$) 进行抽样。求 N 点 DFT 的幅值谱 (N 分别取 45, 50, 55, 60)。