第5章

逆 矩 阵

通过前面几章的学习，我们知道矩阵可以进行加减法和乘法运算，那么矩阵有类似于“除法”的运算吗？这个问题涉及逆矩阵的知识。在这一章里，我们将通过初等矩阵引入逆矩阵，并深入了解和讨论逆矩阵概念以及求法。

5.1 矩阵乘法和初等变换的纽带：初等矩阵

5.1.1 初等变换

在求解线性方程组时，需要对矩阵进行初等行变换化矩阵为阶梯矩阵。矩阵的初等行变换分为三种：①交换两行的位置；②给某一行乘以一个非零常数 k；③把某一行的 k 倍加到另一行上。事实上，矩阵除了初等行变换以外，还有**初等列变换**(elementary column transformation)。和初等行变换类似，初等列变换也分为三种：①交换两列的位置；②给某一列乘以一个非零常数 k；③把某一列的 k 倍加到另一列上。矩阵的初等行变换和初等列变换统称为**初等变换**(elementary transformation)。

我们知道，初等行变换不改变矩阵的秩，这个结论对初等列变换是同样适用的，即初等列变换也不改变矩阵的秩。因此更广泛的结论是：初等变换不改变矩阵的秩。理论上，单纯利用初等行变换就完全可以求出矩阵的秩，但很多时候如果使用初等列变换加以辅助则会起到事半功倍的效果。

例 5-1：求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})$。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10 & 13 & 1\\ 23 & 36 & 2\\ 32 & 45 & 3\end{bmatrix} \tag{5.1}$$

解：这里可以看出，$\boldsymbol{A}$ 每行开头的数字都比较大，如果使用初等行变换会出现很多分数或大数字运算，显得复杂。因此尝试使用初等列变换和初等行变换综合求 $r(\boldsymbol{A})$。以下变换中 c_i 表示第 i 列(其中 c 是英语 column 的缩写)。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10 & 13 & 1\\ 23 & 36 & 2\\ 32 & 45 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow[-13c_3+c_2]{-10c_3+c_1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 10 & 2\\ 2 & 6 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 10 & 3\\ 3 & 6 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{-3c_3+c_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{-2r_1+r_2\\-3r_1+r_3}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&2\end{bmatrix} \tag{5.2}$$

可以看出 $r(\boldsymbol{A})=3$。

在这个例子中,前三步的初等列变换将比较大数值的矩阵化简为比较小的数值的矩阵,最后只需要一步初等行变换即可得出矩阵的秩。

5.1.2　初等矩阵

如果初等变换的对象是单位阵 $\boldsymbol{E}$,经过一次初等变换就可以得到**初等矩阵**(elementary matrix),即初等矩阵是对单位阵 $\boldsymbol{E}$ 仅做一次初等变换得到的矩阵。注意此处只能做一次初等变换,否则就不是初等矩阵了。由于初等变换有三种类型,所以初等矩阵也有三种类型,这里通过一个例题认识这三种初等矩阵。

例 5-2:请判断:以下三个矩阵是初等矩阵吗?如果是初等矩阵,则是单位阵经过怎样的初等变换得到的?

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{5.3}$$

解:根据初等矩阵的定义,$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 都是初等矩阵。

(1) $\boldsymbol{F}_1$ 可以看作是 3 阶单位阵 $\boldsymbol{E}$ 交换第 1 行和第 2 行得到的,也可以看作是交换第 1 列和第 2 列得到的。$\boldsymbol{F}_1$ 这样的初等矩阵叫作**交换阵**,有些文献上称作置换阵。

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[]{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\(c_1\leftrightarrow c_2)}}\boldsymbol{F}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{5.4}$$

(2) $\boldsymbol{F}_2$ 可以看作是 3 阶单位阵 $\boldsymbol{E}$ 第 2 行乘以常数 3 得到的,也可以看作是第 2 列乘以常数 3 得到的。$\boldsymbol{F}_2$ 这样的初等矩阵叫作**数乘阵**。

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[]{\substack{3r_2\\(3c_2)}}\boldsymbol{F}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{5.5}$$

(3) $\boldsymbol{F}_3$ 可以看作是 3 阶单位阵 $\boldsymbol{E}$ 第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到的,也可以看作是第 2 列的 2 倍加到第 1 列得到的。$\boldsymbol{F}_3$ 这样的初等矩阵叫作**倍加阵**。

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[]{\substack{2r_1+r_2\\(2c_2+c_1)}}\boldsymbol{F}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{5.6}$$

一个矩阵和单位阵 $\boldsymbol{E}$ 相乘的结果还是它本身,而初等矩阵是单位阵经过一次初等变换得到的,那么初等矩阵和一个矩阵相乘会得到什么结果呢?

例 5-3:已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和交换阵 $\boldsymbol{F}_1$、数乘阵 $\boldsymbol{F}_2$ 和倍加阵 $\boldsymbol{F}_3$ 如下:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{5.7}$$

求以下三组乘积，并分析初等矩阵和 $\boldsymbol{A}$ 相乘时起到了什么作用。

(1) $\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_1$；(2)$\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_2$；(3)$\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_3$。

解：(1) $\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_1$ 计算如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{A}&=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_1&=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&3\\5&4&6\\8&7&9\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.8}$$

给 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{A}$ 的第 1 行和第 2 行发生了交换；给 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{A}$ 的第 1 列和第 2 列发生了交换。

(2) $\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_2$ 的计算如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{A}&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\12&15&18\\7&8&9\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_2&=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6&3\\4&15&6\\7&24&9\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.9}$$

给 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{A}$ 的第 2 行变为原先的 3 倍；给 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{A}$ 的第 2 列变为原先的 3 倍。

(3) $\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_3$ 的计算如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{A}&=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\6&9&12\\7&8&9\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_3&=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2&3\\14&5&6\\23&8&9\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.10}$$

给 $\boldsymbol{A}$ 左乘倍加阵 $\boldsymbol{F}_3$，$\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到了第 2 行上；给 $\boldsymbol{A}$ 右乘倍加阵 $\boldsymbol{F}_3$，$\boldsymbol{A}$ 的第 2 列的 2 倍加到了第 1 列上。

通过这个例子可以得出结论：给矩阵左乘一个初等矩阵，相当于给这个矩阵进行了一次相应的初等行变换；给矩阵右乘一个初等矩阵，相当于给这个矩阵进行了一次相应的初等列变换。可见，初等矩阵是连接矩阵乘法和初等变换的重要纽带。

一个矩阵和初等矩阵相乘时，初等矩阵的左右位置很重要。如上例中的 $\boldsymbol{F}_1$ 既可以视为交换单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 1 行和第 2 行得到的，也可以视为交换单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 1 列和第 2 列得到的。如果 $\boldsymbol{F}_1$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的左边，那么就要视 $\boldsymbol{F}_1$ 为行交换得到的初等矩阵；如果 $\boldsymbol{F}_1$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的右边，那么就要视 $\boldsymbol{F}_1$ 为列交换得到的初等矩阵。$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 也可以做类似的分析。

5.1.3 矩阵的连续初等变换

对一个矩阵进行一次初等变换，就相当于对这个矩阵左乘或右乘一个相应的初等矩

阵。如果对矩阵连续进行多次初等变换，又是怎样的情况呢？

例 5-4：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以仅通过初等行变换化为阶梯矩阵 $\boldsymbol{A}'$，求矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{TA}$。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\\1&4&9\end{bmatrix} \tag{5.11}$$

解：这里要求仅使用初等行变换，所以就相当于不断给 $\boldsymbol{A}$ 左乘初等矩阵，然后利用矩阵乘法的结合律，将这些初等矩阵相乘合并就得到了待求的矩阵 $\boldsymbol{T}$。

第一步，给 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行乘以常数 $\frac{1}{2}$ 成为 $\boldsymbol{A}_1$，相当于给 $\boldsymbol{A}$ 左乘对应的数乘阵：

$$\begin{gathered}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\\1&4&9\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&3&5\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\end{gathered} \tag{5.12}$$

第二步，交换 $\boldsymbol{A}_1$ 第 1 行和第 2 行的位置成为 $\boldsymbol{A}_2$，相当于给 $\boldsymbol{A}_1$ 左乘对应的交换阵，然后和前面的那个数乘阵结合即可：

$$\begin{gathered}\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&3&5\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&4&9\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\end{gathered} \tag{5.13}$$

第三步，将 $\boldsymbol{A}_2$ 第 1 行的 -1 倍加到第 2 行成为 $\boldsymbol{A}_3$，相当于给 $\boldsymbol{A}_2$ 左乘对应的倍加阵，然后和前面的矩阵结合：

$$\begin{gathered}\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&4&9\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_2}\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\1&4&9\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\end{gathered} \tag{5.14}$$

第四步，将 $\boldsymbol{A}_3$ 第 1 行的 -1 倍加到第 3 行成为 $\boldsymbol{A}_4$，相当于给 $\boldsymbol{A}_3$ 左乘对应的倍加阵，然后和前面的矩阵结合：

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\1&4&9\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_3}\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&2&6\end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}A_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}A \tag{5.15}$$

第五步，将 A_4 第 3 行乘以常数$\frac{1}{2}$成为 A_5，相当于给 A_4 左乘对应的数乘阵，然后和前面的矩阵结合：

$$A_4=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&2&6\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}A_5=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&1&3\end{bmatrix}$$

$$A_5=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}A_4=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}A \tag{5.16}$$

第六步，将 A_5 第 2 行的 -1 倍加到第 3 行成为 A_6，相当于给 A_5 左乘对应的倍加阵，然后和前面的矩阵结合：

$$A_5=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}A_6=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A_6=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}A_5=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\-1&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}A \tag{5.17}$$

注意到此时 A_6 已经是阶梯矩阵，所以 $A'=A_6$，而 $A'=TA$，故有

$$T=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\-1&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix} \tag{5.18}$$

由上例可知，矩阵的连续初等行变换就相当于不断给其左乘每一步的初等矩阵，然后利用矩阵乘法的结合律将这些初等矩阵合并成一个具有行变换功能的矩阵即可，这个矩阵记录着所有初等行变换信息。对于初等列变换也是同样的道理，只需要把上述的“左乘”改为“右乘”即可。

由这个例子可知，$\boldsymbol{A}$ 经过 6 次初等行变换成为阶梯矩阵 $\boldsymbol{A}_6$，相当于给 $\boldsymbol{A}$ 左乘一个行变换矩阵 $\boldsymbol{T}$，那么如果要求 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换成为其他类型的矩阵呢？我们一起看下面这个例子。

例 5-5：在例 5-4 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以仅经过初等行变换成为单位阵 $\boldsymbol{E}$ 吗？如果可以，写出对应的行变换矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$。

解：$\boldsymbol{A}$ 经过 6 次初等行变换可以成为阶梯矩阵 $\boldsymbol{A}_6$，如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\\1&4&9\end{bmatrix}\to\boldsymbol{A}_6=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\-1&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{TA} \tag{5.19}$$

$\boldsymbol{A}$ 是一个方阵，经过初等行变换化为阶梯矩阵相当于“清空”了主对角线左下方的元素。如果要让它继续进行初等行变换成为单位阵 $\boldsymbol{E}$，只需要“清空”矩阵右上角元素即可。刚才以第 1 行为基准进行初等行变换，那么以 $\boldsymbol{A}_6$ 为起点就可以先以第 3 行为基准再以第 2 行为基准去进行初等行变换。具体过程如下：

$$\boldsymbol{A}_6=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-2r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-3r_3+r_1}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-2r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E} \tag{5.20}$$

于是这个行变换矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就可以继续对矩阵 $\boldsymbol{T}$ 不断左乘相应的初等矩阵获得：

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\-1&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&\frac{7}{4}&\frac{1}{2}\\3&-1&-1\\-1&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix} \tag{5.21}$$

例 5-6：在例 5-4 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以仅经过初等列变换成为单位阵 $\boldsymbol{E}$ 吗？如果可以，写出对应的列变换矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{E}$。

解：如果仅经过初等列变换成为单位阵 $\boldsymbol{E}$，同样也是采用分片“清空”的策略，只不过由于这次采用初等列变换，所以需要先“清空”主对角线右上角再“清空”左下角。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\\1&4&9\end{bmatrix}\xrightarrow{-3c_1+c_2}\begin{bmatrix}1&0&5\\2&-2&6\\1&1&9\end{bmatrix}\xrightarrow{-5c_1+c_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-2&-4\\1&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow{-2c_2+c_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\1&1&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}c_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-c_3+c_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-c_3+c_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2+c_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}c_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E} \tag{5.22}$$

所以仅使用初等列变换也是可以使 $\boldsymbol{A}$ 化为单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的。对应满足 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{E}$ 的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 就是对应的初等矩阵按照变换顺序的乘积：

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&\frac{7}{4}&\frac{1}{2}\\3&-1&-1\\-1&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix} \tag{5.23}$$

观察以上两例，可知 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。事实上，对于一个方阵 $\boldsymbol{A}$，如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，那么就一定有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，可见此时两者是可交换的，这也是可交换矩阵判定的另一个充分条件。那么如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间又有什么特殊的关联呢？这就要学习逆矩阵的知识了。

5.2 矩阵的“倒数”：逆矩阵

初等数学里讲过我们熟知的加、减、乘、除四则运算。对于数来说，加减法互为逆运算，乘除法也互为逆运算。但对于矩阵来说，其乘法并不是数的乘法，那么可否类比于数的乘法定义一种矩阵之间的“除法”运算呢？这个问题等价于需要定义一个矩阵的“倒数”，使得其他矩阵和这个矩阵“相除”时可以表示为它和这个矩阵的“倒数”相乘的形式。这个问题可以通过构建逆矩阵去解决。

5.2.1 逆矩阵的概念

设有两个数 a 和 b，如果 $ab=1$，根据乘法交换律 $ba=1$，此时就称 b 是 a 的倒数，记为 $b=\dfrac{1}{a}$ 或者 $b=a^{-1}$。数字 1 的特点是它和任何数相乘还是这个数本身，而矩阵中有这个性质的就是单位阵 $\boldsymbol{E}$。类似的，如果有两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 这个等式，那么就称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**(inverse matrix)，记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 读作“$\boldsymbol{A}$ 的逆”。

例 5-7：已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 如下，请利用逆矩阵的定义验证 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&3\\3&6&4\\2&4&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&9&-14\\-1&-3&5\\0&-2&3\end{bmatrix} \tag{5.24}$$

解：根据逆矩阵的定义，只需验证 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 这个等式成立就可以了。

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&1&3\\3&6&4\\2&4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&9&-14\\-1&-3&5\\0&-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}2&9&-14\\-1&-3&5\\0&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\3&6&4\\2&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E} \tag{5.25}$$

这就说明 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$。

例 5-8：已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 如下，可以说 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵吗？为什么？

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\\1&0\end{bmatrix} \tag{5.26}$$

解：先计算 $\boldsymbol{AB}$：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E} \tag{5.27}$$

可见 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$。再计算 $\boldsymbol{BA}$：

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{E} \tag{5.28}$$

由于 $\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{E}$，不满足逆矩阵的定义，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 这个连等式并不成立，所以 $\boldsymbol{B}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。

根据定义判断逆矩阵，需要将两个矩阵放在左右不同的位置分别做两次乘法，如果结果都是单位阵 $\boldsymbol{E}$ 才能说明存在逆矩阵关系。比如上面这个例子，虽然有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，但 $\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{E}$，所以不能说 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。

5.2.2 逆矩阵的存在条件

利用逆矩阵的定义可以很容易验证一个矩阵是否为另一个矩阵的逆矩阵。但并不意味着所有的矩阵都能找到对应的逆矩阵，也就是说有一些矩阵无法满足上述的定义式。这就好比不是所有的数都存在倒数，因为数 a 若要存在倒数 a^{-1}，必须有 $a\neq0$。那么矩阵存在对应的逆矩阵需要满足什么条件呢？

还是从逆矩阵的定义式出发。观察 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 这个式子，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的，而可交换矩阵双方必须是等阶方阵，因此就得到了逆矩阵存在的一个必要条件：只有方阵才可能存在逆矩阵。由 5.2.1 节末尾的结论可知，对于方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，那么必然有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，所以方阵的逆矩阵验证只需要 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 这一个条件即可。而例 5-8 中的矩阵不是方阵，因此一定没有逆矩阵。

回顾 5.2.1 节的内容，如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 仅经过若干次初等行/列变换得到的单位阵 $\boldsymbol{E}$，那么就相当于给 $\boldsymbol{A}$ 不断左/右乘相应的初等矩阵，这些初等矩阵经过乘法合并后就可以得到一个新的方阵 $\boldsymbol{B}$，即有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$。根据定义有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，即如果一个方阵可以经过初等变换成为单位阵 $\boldsymbol{E}$，那么它一定可逆。这是一个充分必要条件。

我们知道，初等变换不改变矩阵的秩，所以如果 $\boldsymbol{A}$ 可以经过初等变换成为 $\boldsymbol{E}$，那么就有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{E})$。又因为 n 阶单位阵的秩是 n，所以 $r(\boldsymbol{A}_{n\times n})=r(\boldsymbol{E}_{n\times n})=n$，也就是秩等于行列数的方阵才存在逆矩阵。这个结论是上述结论的等价形式，所以也是充分必要条件。

综上，要判断一个矩阵是否存在逆矩阵，首先看它是不是方阵；如果是方阵，那么就通过它的秩判断，而秩可以通过初等变换求得。存在逆矩阵的方阵叫作**可逆矩阵**（invertible matrix），也叫作**非奇异矩阵**（non-singular matrix）；而不存在逆矩阵的方阵就是**不可逆矩阵**，一般文献里也称为**奇异矩阵**（singular matrix）。因此上述结论还可以表达为：可逆矩阵必须是方阵，且其秩等于其行列数。

例 5-9：已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，请说明两者的可逆性，并将其中的可逆矩阵进一步通过初等变换成为单位阵 $\boldsymbol{E}$。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&7&8\\2&9&9\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\tag{5.29}$$

解：$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶方阵，所以查看两者的秩，可以采用初等变换法最终化为阶梯矩阵。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&7&8\\2&9&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&3&2\\0&5&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&3&2\\0&0&1\end{bmatrix}\\&\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\4&5&1\\7&8&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\4&1&1\\7&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&4\\1&1&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.30}$$

根据阶梯矩阵的行数可知，$r(\boldsymbol{A})=3$，$r(\boldsymbol{B})=2$，因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆而 $\boldsymbol{B}$ 不可逆。现在将 $\boldsymbol{A}$ 进一步化简成为单位阵 $\boldsymbol{E}$。注意到主对角线左下方元素已经变成了 0，所以只需要让主对角线右上角的元素也变成 0。如果是模仿例 5-5 的方式，就统一使用初等行变换，将从式(5.30)得到的阶梯矩阵继续进行初等行变换即可。

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&3&2\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}\tag{5.31}$$

如果是模仿例 5-6，则后续使用初等列变换，最后结果完全一致。

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&3&2\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&2\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}\tag{5.32}$$

由这个例子可知，可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通过初等变换成为单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的方式有很多，既可以仅使用初等行变换，又可以仅使用初等列变换，还可以两者混合使用；而不可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不能通过以上任何一种方式成为单位阵 $\boldsymbol{E}$。

5.2.3 逆矩阵与逆映射

逆矩阵的含义还可以从逆映射的角度理解。在讲解矩阵的映射属性时提到，一个矩阵从本质上建立了一个线性映射关系，而方阵由于行列数相等，所以方阵代表了同一个维度

的空间内的向量之间的映射。比如映射 $\boldsymbol{y}_{n\times1}=\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}_{n\times1}$ 中，方阵 $\boldsymbol{A}$ 将 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 映射成了同为 n 维的向量 $\boldsymbol{y}$，这个映射关系是通过单纯的矩阵对向量的乘法实现的。

在映射的定义域中，如果任何一个元素映射后的结果是它自身，那么这个映射就叫作**恒等映射**(identity mapping)。例如函数 $f(x)=x(x\in\mathbb{R})$就是典型的恒等映射，它将$\mathbb{R}$中任何一个实数都映射成了它自身。对于任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{x}_{n\times1}$，如果经过矩阵映射后还是它本身，那么这个矩阵一定是 n 阶单位阵 $\boldsymbol{E}_{n\times n}$，因为只有 $\boldsymbol{Ex}=\boldsymbol{x}$。可以说 n 阶单位阵 $\boldsymbol{E}$ 就表示了 n 维空间中的恒等映射。

对于映射 f，如果存在另一个映射 g，使得 $f\circ g(x)=g\circ f(x)=x$（或写作 $f(g(x))=g(f(x))=x$），那么两者的复合映射就建立了一个恒等映射，此时 g 是 f 的**逆映射**(inverse mapping)，记为 $g=f^{-1}$。比如这两个映射（函数）$f(x)=2x$ 和 $g(x)=\dfrac{1}{2}x$，两者不论以怎样的顺序复合都能够建立恒等映射，所以可以说 $g(x)$就是 $f(x)$的逆映射（反函数）。

矩阵代表了空间中向量之间的映射关系，逆矩阵就代表了对应的逆映射关系，如 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 就是线性映射 $\boldsymbol{A}$ 的逆映射。由于矩阵乘法本质上是线性映射的复合，而单位阵 $\boldsymbol{E}$ 建立了恒等映射，因此从映射的观点来看就不难理解 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 这个式子了。

例 5-10：已知 2 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 以及某个平面向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix} \tag{5.33}$$

请计算 $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{Ax}$ 和 $\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{By}_1$，再计算 $\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{Bx}$ 和 $\boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{Ay}_2$（用含有 x_1 和 x_2 的式子表示），然后根据以上计算结果从映射的角度说明 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。

解：$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{Ax}$ 的含义是向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的作用下映射为向量 $\boldsymbol{y}_1$，计算如下：

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{Ax}=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1+x_2\\x_1+x_2\end{bmatrix} \tag{5.34}$$

$\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{By}_1$ 的含义是向量 $\boldsymbol{y}_1$ 在 $\boldsymbol{B}$ 的作用下映射为向量 $\boldsymbol{z}_1$，计算如下：

$$\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{By}_1=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x_1+x_2\\x_1+x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1+x_2-x_1-x_2\\-2x_1-x_2+2x_1+2x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{x} \tag{5.35}$$

由以上可知，$\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{BAx}=\boldsymbol{x}$，即复合映射 $\boldsymbol{BA}$ 将 $\boldsymbol{x}$ 映射为了 $\boldsymbol{x}$ 本身不变，它建立了平面上的恒等映射，故 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$。

类似的，可以说明 $\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{Bx}$ 和 $\boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{Ay}_2$ 两者的含义，并计算如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_2&=\boldsymbol{Bx}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_2\\-x_1+2x_2\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{z}_2&=\boldsymbol{Ay}_2=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-x_2\\-x_1+2x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1-2x_2-x_1+2x_2\\x_1-x_2-x_1+2x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{5.36}$$

同理，$\boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{x}$，即复合映射 $\boldsymbol{AB}$ 也建立了平面上的恒等映射，故 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$。

综上，对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{B}$ 就代表了线性映射 $\boldsymbol{A}$ 的逆映射，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$。

有关逆矩阵和逆映射的进一步讨论将在本书后续内容不断涉及，请各位读者留意多从映射的角度理解逆矩阵。

5.2.4 逆矩阵的性质

从逆矩阵的定义出发,再结合逆映射的观点,不仅可以清晰呈现出逆矩阵的本质概念,还能很容易推出逆矩阵的各种性质。

(1) 可交换性:由定义 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 可知,一个矩阵和其逆矩阵是可交换的。从映射的观点来看,一个映射和它的逆映射不论复合顺序如何,最终都是恒等映射,所以同样具有映射属性的矩阵也有这样的性质。

(2) 自反性:由定义很容易得出$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$,也就是一个矩阵和其逆矩阵互为可逆关系,这是一个容易理解的结论。

(3) 倒序相乘性:如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为等阶可逆矩阵,那么$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$。这个结论可以证明如下:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AEA}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}\\(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB})&=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}\end{aligned}\tag{5.37}$$

实际上从映射的角度也可以解释这个倒序相乘性质。设 $\boldsymbol{A}$ 代表映射 f,$\boldsymbol{B}$ 代表映射 g,那么 $\boldsymbol{AB}$ 就代表了复合映射 $f\circ g$。用 $\boldsymbol{x}$ 代表自变量,$\boldsymbol{y}$ 代表因变量,则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{ABx}$ 就可以表示为 $\boldsymbol{y}=f(g(\boldsymbol{x}))$。如果要再让 $\boldsymbol{y}$ 通过逆映射变回 $\boldsymbol{x}$,表达式就是 $\boldsymbol{x}=g^{-1}(f^{-1}(\boldsymbol{y}))$,即逆映射(逆矩阵)是 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$。这就好比我们在寒冷的冬天穿衣服是先穿毛衣后穿外套,而进入温暖的室内脱衣服则是先脱外套后脱毛衣一样。求矩阵乘积的逆矩阵也是这个道理,有时候将这个结论称为“穿脱原则”。

这个结论还可以拓展到多个矩阵的情形,即$(\boldsymbol{ABC}\cdots\boldsymbol{N})^{-1}=\boldsymbol{N}^{-1}\cdots\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$。

(4) 转置特性:给定义式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 同时取转置运算,利用转置运算的倒序相乘性,并注意到 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$,就有:

$$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AA}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\tag{5.38}$$

这个式子说明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的逆矩阵就是$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$,即$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$。这个性质说明矩阵的转置和求逆操作可以互换顺序。

(5) 数乘特性:设 λ 为一个非零常数,那么$(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$。这一点容易通过矩阵乘法的数乘特性和逆矩阵的定义推出:

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{A})\left(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}\right)&=\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}\\\left(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}\right)(\lambda\boldsymbol{A})&=\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\end{aligned}\tag{5.39}$$

(6) 初等矩阵构成性:在前面讲到了可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以仅通过若干次初等行/列变换成为单位阵 $\boldsymbol{E}$。不管是初等行变换还是初等列变换,最终都是给 $\boldsymbol{A}$ 左乘或右乘一系列初等矩阵。这里设仅通过 k 次初等行变换成为 $\boldsymbol{E}$,每一次的初等矩阵是 $\boldsymbol{F}_i$(其中 $1\leqslant i\leqslant k$)。再结合可逆矩阵的定义式就可以做以下推导:

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_1\cdots\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{F}_1\cdots\boldsymbol{F}_k\tag{5.40}$$

可见,一个方阵的逆矩阵可以写成若干初等矩阵乘积的形式。由于逆矩阵是彼此相对而言的,因此可逆矩阵本身也能写成若干初等矩阵的乘积。这是一个充分必要条件,这意味着不可逆的矩阵一定不能写成若干初等矩阵的乘积。

(7) 唯一存在性:对于一个不为 0 的数,它的倒数是唯一确定的。那么对于可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$,它的逆矩阵也是唯一确定的吗?答案是肯定的。简单来说,$\boldsymbol{A}$ 相当于一个映射,而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆映射,由于逆映射是唯一确定的,所以逆矩阵也是唯一确定的。

当然,逆矩阵的唯一确定性也可以使用逆矩阵的定义推导。设可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$,则根据逆矩阵的定义有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$,利用这两个式子可以做以下推导:

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BE}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{EC}=\boldsymbol{C} \tag{5.41}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 具有一般性,可知 $\boldsymbol{A}$ 的任意两个逆矩阵都完全相等,即证明了逆矩阵存在的唯一性。

我们将以上逆矩阵的性质总结如下:

- 可交换性:$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$;
- 自反性:$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;
- 倒序相乘性:$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
- 转置特性:$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;
- 数乘性:$(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda\neq 0)$;
- 可逆矩阵及其逆矩阵都可以表示为一系列初等矩阵之积;
- 可逆矩阵的逆矩阵是唯一存在的。

需要说明的是,逆矩阵的性质还有很多,在后续学习中将看到逆矩阵的其他性质。

5.3 逆矩阵的求法

5.3.1 初等行变换法求逆矩阵

一个矩阵如果可逆,则可以写成一系列初等矩阵之积,而初等矩阵和初等变换有着紧密的关联,因此可以利用这个特点使用初等变换法求逆矩阵。其中使用得比较多的是初等行变换法。根据逆矩阵的定义,有 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{F}_1\cdots\boldsymbol{F}_k$,其中"$\boldsymbol{F}_1\cdots\boldsymbol{F}_k$"代表 k 个初等矩阵相乘,于是可知:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}_1\cdots\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{A} \tag{5.42}$$

另外,一个矩阵和单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的乘积还是它本身,于是有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}$ 成立,将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 写成初等矩阵乘积形式就有:

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{F}_1\cdots\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{E} \tag{5.43}$$

从式(5.42)和式(5.43)可以看出,如果对 $\boldsymbol{A}$ 左乘 k 个初等矩阵使得 $\boldsymbol{A}$ 成为 $\boldsymbol{E}$,那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 就等于这些初等矩阵去左乘 $\boldsymbol{E}$。由于给矩阵左乘一个初等矩阵相当于对其进行了一次初等行变换,所以给 $\boldsymbol{A}$ 进行 k 次初等行变换成为 $\boldsymbol{E}$ 的同时,给 $\boldsymbol{E}$ 也同步进行 k 次一模一样的初等行变换就可以得到 $\boldsymbol{A}^{-1}$。这就是使用初等行变换法求逆矩阵的基本原理。

例 5-11：求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&4&5\end{bmatrix} \tag{5.44}$$

解：首先使用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵 $\boldsymbol{E}$，先“清空”主对角线左下方的元素，再“清空”主对角线右上方的元素，同时保证最后主对角线上所有元素都是 1。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&4&5\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\2&4&5\end{bmatrix}\xrightarrow{-2r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-2r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_3}$$
$$\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-2r_3+r_1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E} \tag{5.45}$$

可见 $\boldsymbol{A}$ 经过 7 次初等行变换成为单位阵 $\boldsymbol{E}$。根据上述原理，下面对单位阵 $\boldsymbol{E}$ 要进行和上面一模一样的 7 次初等行变换，也就是完全复刻使 $\boldsymbol{A}$ 成为 $\boldsymbol{E}$ 的初等行变换内容和顺序：

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-2r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-2r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{-r_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&-1&1\\0&2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{-2r_3+r_1}\begin{bmatrix}1&-4&2\\-1&-1&1\\0&2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_1}$$
$$\begin{bmatrix}2&-3&1\\-1&-1&1\\0&2&-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1} \tag{5.46}$$

经过同样的 7 次初等行变换，单位阵 $\boldsymbol{E}$ 就能成为 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

可见，如果需要求出 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$，需要先让 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换成为单位阵 $\boldsymbol{E}$，得到变换的具体内容和顺序，然后按照这个内容和顺序再去变换单位阵 $\boldsymbol{E}$，最终的结果就是 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

但这种方式有一个显著的缺陷，那就是需要做两次重复性工作，增加了工作量。事实上，这两步工作是可以并行的，只需要每一次初等行变换时候能够兼顾 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 两者让其同步变换即可，于是可以仿照求解非齐次方程组的模式，构建增广矩阵 $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，并对其进行初等行变换，使得虚线左侧变成单位阵 $\boldsymbol{E}$，那么右侧就能成为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，表示如下：

$$\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1} \tag{5.47}$$

注意此处只能使用初等行变换而不能使用初等列变换，因为在上述原理推导过程中，始终使用的是初等矩阵去左乘 $\boldsymbol{A}$ 而没有右乘操作，因此始终都要保持只有初等行变换操作。

例 5-12：使用增广矩阵法求例 5-11 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

解：构建增广矩阵如下：

$$A \mid E=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\2&4&5&0&0&1\end{array}\right] \tag{5.48}$$

现在将增广矩阵 $A|E$ 初等行变换，使得虚线左侧成为 E。

$$A \mid E=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\2&4&5&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&0&2&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&-3&1\\0&1&0&-1&-1&1\\0&0&1&0&2&-1\end{array}\right] \tag{5.49}$$

此时虚线右侧的部分就是 A^{-1}，将其单独写出即可。

上例使用到的初等行变换包括倍加操作和数乘操作，不涉及交换操作。如果在某些步骤灵活使用交换操作，就可以有效朝着目标简化计算。

例 5-13：求矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\1&0&3\\2&3&4\end{bmatrix} \tag{5.50}$$

解：仍然构建增广矩阵 $A|E$ 并通过初等行变换使其左侧化为 E：

$$\begin{aligned}A \mid E&=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\1&0&3&0&1&0\\2&3&4&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-2&1&-1&1&0\\0&-1&0&-2&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&0&2&0&-1\\0&-2&1&-1&1&0\end{array}\right]\to\\&\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&3&1&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&-5&-2&4\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&3&1&-2\end{array}\right]\to\\&\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-9&-2&6\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&3&1&-2\end{array}\right]=E \mid A^{-1}\end{aligned} \tag{5.51}$$

于是虚线右侧的矩阵就是 A^{-1}。

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-9&-2&6\\2&0&-1\\3&1&-2\end{bmatrix} \tag{5.52}$$

以上过程(5.51)的第二个箭头处，第 2 行和第 3 行发生了交换，这是因为第 2 行除了元素 2 以外的其他数都不是 2 的倍数，如果不交换而直接运算就会比较复杂，所以此处交换这两行就能避免比较复杂的运算。

例 5-14：求矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}：

$$A=\begin{bmatrix}6&8&7\\4&3&9\\5&6&7\end{bmatrix} \tag{5.53}$$

解：通过初等行变换求矩阵的逆时，当每一行的第一个非零元素是 1 时最为方便，但此处数字显然都偏大，因此可以先用初等行变换造出 1。观察第 1 列的元素是 6、4 和 5，刚好相差 1，故对增广矩阵 $A|E$ 初步化简如下：

$$\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E}=\left[\begin{array}{ccc:ccc}6&8&7&1&0&0\\4&3&9&0&1&0\\5&6&7&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1&0&-1\\4&3&9&0&1&0\\5&6&7&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-r_2+r_3}$$
$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1&0&-1\\4&3&9&0&1&0\\1&3&-2&0&-1&1\end{array}\right]\tag{5.54}$$

通过以上化简过程将数值变小，就可以方便地继续使用上面的方法求解了：

$$\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E}\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1&0&-1\\4&3&9&0&1&0\\1&3&-2&0&-1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1&0&-1\\0&-5&9&-4&1&4\\0&1&-2&-1&-1&2\end{array}\right]\to$$
$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1&0&-1\\0&1&-2&-1&-1&2\\0&-5&9&-4&1&4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1&0&-1\\0&1&-2&-1&-1&2\\0&0&-1&-9&-4&14\end{array}\right]\to$$
$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1&0&-1\\0&1&-2&-1&-1&2\\0&0&1&9&4&-14\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1&0&-1\\0&1&0&17&7&-26\\0&0&1&9&4&-14\end{array}\right]\to$$
$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-33&-14&51\\0&1&0&17&7&-26\\0&0&1&9&4&-14\end{array}\right]=\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1}\tag{5.55}$$

故可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-33&-14&51\\17&7&-26\\9&4&-14\end{bmatrix}\tag{5.56}$$

以上几例的运算、化简技巧请各位读者仔细体会并灵活运用。

5.3.2 特殊矩阵的逆矩阵

使用上述增广矩阵的方法，可以求出几种特殊矩阵的逆矩阵。

例 5-15：求出以下对角阵 $\boldsymbol{U}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{U}^{-1}$。

$$\boldsymbol{U}=\operatorname{diag}\{2,3,4\}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}\tag{5.57}$$

解：构建增广矩阵 $\boldsymbol{U}|\boldsymbol{E}$，然后让左侧通过初等行变换成为 $\boldsymbol{E}$。由于 $\boldsymbol{U}$ 的主对角线元素均不等于 0，所以只需要给每一行都除以主对角线上的元素即可。

$$\boldsymbol{U}\mid\boldsymbol{E}=\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&0&0&1&0&0\\0&3&0&0&1&0\\0&0&4&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{4}\end{array}\right]=\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{U}^{-1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\} \tag{5.58}$$

由上例可知，对角阵可逆的条件是主对角线元素均不为 0，求它的逆矩阵只需要给主对角线元素取倒数即可：

$$\boldsymbol{U} = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \Rightarrow \boldsymbol{U}^{-1} = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right\} \quad a_1, a_2, \cdots, a_n \neq 0 \tag{5.59}$$

特殊的，单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的逆矩阵还是它本身不变，即 $\boldsymbol{E}^{-1} = \boldsymbol{E}$，这是单位阵一个重要的性质。

例 5-16：求出以下初等矩阵的逆矩阵：

$$\boldsymbol{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.60}$$

解：初等矩阵是对 $\boldsymbol{E}$ 进行一次初等变换得到的矩阵，因此只需要对增广矩阵做一次相反的初等行变换，就能使左边初等矩阵变回 $\boldsymbol{E}$。

$$\begin{gathered} \boldsymbol{F}_1 \mid \boldsymbol{E} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{F}_1^{-1} \\ \boldsymbol{F}_2 \mid \boldsymbol{E} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{F}_2^{-1} \\ \boldsymbol{F}_3 \mid \boldsymbol{E} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{F}_3^{-1} \end{gathered} \tag{5.61}$$

故有

$$\boldsymbol{F}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.62}$$

由上例可知：交换阵的逆矩阵就是其本身不变；数乘阵的逆矩阵仍然是数乘阵，对应数乘因数是原因数的倒数；倍加阵的逆矩阵仍然是倍加阵，对应的倍加因数是原因数的相反数。实际上，由于一个矩阵可逆的充分必要条件之一就是它可以表示成若干个初等矩阵的乘积，所以可以反过来说若干初等矩阵之积一定可逆。特殊的只有一个初等矩阵，结论依旧成立。这说明初等矩阵必然可逆，且逆矩阵和原初等矩阵类别相同。

例 5-17：已知以下 2 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，求逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

解：由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{A}$ 不是秩 1 矩阵，因此它的各行不成比例，也就是 $ad \neq bc$。通过这个式子还可知 a 和 c 不能同时为 0，不妨设 $a \neq 0$，则构建增广矩阵 $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 并进行初等行变换：

$$\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E}=\left[\begin{array}{cc:cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:cc} a & b & 1 & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:cc} a & 0 & \dfrac{bc}{ad-bc}+1 & -\dfrac{ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{array}\right]=\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1} \tag{5.64}$$

可以验证，如果设 $c \neq 0$，只需提前做一步行交换操作即可得出完全一致的结果。故有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{5.65}$$

上例中，b 和 c 构成了 2 阶方阵的另外一条对角线，称为**副对角线**（counter diagonal），由上例的结论可知，2 阶方阵可逆的充分必要条件是主对角线元素之积不等于副对角线元素之积，它的逆矩阵可以统一用上面这个式子表示。首先将主对角线元素交换位置，然后再给副对角线取相反数，最后给矩阵除以主对角线之积与副对角线之积的差值即可。这个法则可以简单记为：主交换，副取反，主副积差做除法。

5.4 逆矩阵的拓展与延伸

5.4.1 抽象矩阵的逆矩阵问题

5.3 节介绍的逆矩阵求法都是基于给出具体数字的矩阵，如果遇到抽象矩阵，就需要灵活使用代数公式化简处理，凑出逆矩阵的定义式。

例 5-18：已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足等式 $\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$ 的表达式。

解：将上式两端同加上 $\boldsymbol{E}$，由于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 可交换，因此只需按照初等数学里学过的代数公式因式分解即可。

$$\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E} \tag{5.66}$$

可见，如果要求一个抽象矩阵多项式的逆矩阵，只需要根据已知条件凑出它和另一个矩阵表达式的乘积是 $\boldsymbol{E}$ 即可，这“另一个矩阵表达式”就是待求的逆矩阵。由于可逆矩阵双

方都是具有可交换性的方阵，所以只需要验证两者的某一个乘积即可。比如上例中只验证了 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 左乘 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 的结果是 $\boldsymbol{E}$ 而并没有验证对应右乘的结果，但只需这一点就足以说明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的逆矩阵就是 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$。

例 5-19：设方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，请说明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，并求出 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$。

解：只需要让 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 和某个矩阵相乘（不论左右）得到 $\boldsymbol{E}$ 即可说明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，同时也求出了对应的逆矩阵。将已知条件移项变形，并给等式两边同时加上 $\boldsymbol{E}$，并注意尽量提取出 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 这个公因式。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}\\&\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}\end{aligned}\tag{5.67}$$

通过以上变形可知，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$。

在对矩阵多项式进行因式分解变形时，需要注意两点：第一，由于矩阵使用大写字母表示，而在初等数学常见的是小写字母表示的变量，因此对大写字母的因式分解需要慢慢习惯并熟练掌握；第二，如果没有明确两个矩阵可交换，因式分解时要特别注意矩阵的左右乘，比如以上例子中 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}$ 一定要分解成 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}$ 而非 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$，即 $\boldsymbol{B}$ 必须是右乘的形式。

有了逆矩阵的概念以后，矩阵的乘方指数就可以从自然数拓展为整数，即可以是负整数。对于方阵 $\boldsymbol{A}$ 和正整数 k，定义负整数幂 $\boldsymbol{A}^{-k}=(\boldsymbol{A}^{-1})^k$。

例 5-20：设方阵 $\boldsymbol{A}$ 和正整数 k 满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$。请先说明 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，然后求 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})^{-2}$。

解：如果仍然采用上面的方法，即给已知条件 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$ 两端同时加上 $\boldsymbol{E}$，就有 $\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$。但我们并不熟悉 $\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{E}$ 的因式分解，因此转而变换思路，给两端减去 $\boldsymbol{E}$，就有 $\boldsymbol{A}^k-\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$ 即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}$。此处的因式分解可以反向使用等比数列的求和公式：

$$1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}=\frac{1-x^k}{1-x}\Rightarrow1-x^k=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})\tag{5.68}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 属于可交换矩阵，故以上公式可以拓展到矩阵范畴。将 x 替换为 $\boldsymbol{A}$，1 替换为 $\boldsymbol{E}$，就有

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})\tag{5.69}$$

故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，其逆矩阵是 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$，或者说两者互为可逆矩阵，因此可以求出：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})^{-2}&=[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})^{-1}]^2\\&=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\end{aligned}\tag{5.70}$$

例 5-21：设有方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，已知 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆，且有 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，求 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}$。

解：$\boldsymbol{B}$ 的表达式由两部分构成，即一个逆矩阵项 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 和一个多项式矩阵项 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，为了将逆矩阵项变成多项式矩阵项，给表达式两端左乘 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$，随后因式分解在等号左端凑出 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$ 这部分。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\Rightarrow(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}\\&\Rightarrow\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}\Rightarrow\frac{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}}{2}\end{aligned}\tag{5.71}$$

由上例可知，等号右端不仅可以是 $\boldsymbol{E}$ 本身，还可以是 $\boldsymbol{E}$ 的若干倍。比如这里 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+$

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的右端已经是 $\boldsymbol{E}$，但左端无法因式分解，所以还需要给等号两端再同时加上一个 $\boldsymbol{E}$ 才能保证左端可以因式分解，然后将系数 2 除到等号左端即可。

5.4.2 简单矩阵方程的求解

含有未知数的等式就是方程，将这个概念拓展到矩阵范畴，含有未知矩阵的等式就是**矩阵方程**(matrix equation)，其中未知矩阵一般使用字母 $\boldsymbol{X}$ 表示。求解基本的矩阵方程并不难，可以利用等式的性质给两端同乘以合适的矩阵(一般是逆矩阵)即可。

例 5-22：已知 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是 n 阶可逆矩阵，求以下三个矩阵方程的解：

(1)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$；(2)$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$；(3)$\boldsymbol{AXC}=\boldsymbol{B}$。

解：(1) 给方程两端同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$：

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{EX}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \tag{5.72}$$

(2) 给方程两端同时右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$：

$$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{XAA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{XE}=\boldsymbol{BA}^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1} \tag{5.73}$$

(3) 给方程两端同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 以及右乘 $\boldsymbol{C}^{-1}$：

$$\boldsymbol{AXC}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AXCC}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BC}^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BC}^{-1} \tag{5.74}$$

以上是三种基本形式的矩阵方程，求解它们只需使用左乘、右乘逆矩阵的方法即可，这里需要注意应根据矩阵的位置选择左乘或右乘。

例 5-23：已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵。求证：方程组具有唯一解。

证明：把 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 视为一个矩阵方程，则给两端同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，则有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$。由于逆矩阵是唯一存在的，因此解向量 $\boldsymbol{x}$ 就是唯一确定的，故方程组具有唯一解。

从上例的证明可以看出，使用矩阵方程和逆矩阵的知识能够清晰地理解线性方程组解的情况。事实上，$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，故一定是方阵，即线性方程组的方程数量等于未知数个数。设未知数个数(也是 $\boldsymbol{A}$ 的阶数)是 n，则由于方程组具有唯一解，故一定有 $r(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=n$。不过如果 $\boldsymbol{A}$ 不可逆或者 $\boldsymbol{A}$ 不是方阵，就不能使用逆矩阵说明方程组的解了。

例 5-24：已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 如下，求矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\0 & 4 & 1\\3 & -1 & -2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5 & 3\\1 & -6\\8 & 8\end{bmatrix} \tag{5.75}$$

解法一：矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解是 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，所以只需要使用初等行变换法求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$，然后再去左乘 $\boldsymbol{B}$ 即可(请读者自行完成增广矩阵 $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 的初等行变换过程)。

$$\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E}=\left[\begin{array}{ccc:ccc}2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0\\3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -7 & 3 & 5\\0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -2\\0 & 0 & 1 & -12 & 5 & 8\end{array}\right]=\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-7 & 3 & 5\\3 & -1 & -2\\-12 & 5 & 8\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-7 & 3 & 5\\3 & -1 & -2\\-12 & 5 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3\\1 & -6\\8 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 1\\-2 & -1\\9 & -2\end{bmatrix} \tag{5.76}$$

解法二：根据逆矩阵的性质，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 可以表示为一系列初等矩阵的乘积，设 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可表示

为 k 个初等矩阵之积,则有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{F}_1\cdots\boldsymbol{F}_k$,进一步有 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}_1\cdots\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{B}$。又因为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}_1\cdots\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{A}$,所以只需要给 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换将其化为 $\boldsymbol{E}$,与此同时给 $\boldsymbol{B}$ 也做一模一样的初等行变换就可化为 $\boldsymbol{X}$。这一点和初等行变换法求逆矩阵的方法有相似之处,也是该方法的进一步推广。因此构建增广矩阵 $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}$,通过初等行变换化为 $\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}|\boldsymbol{X}$ 的形式即可。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B}&=\left[\begin{array}{ccc:cc}2&1&-1&5&3\\0&4&1&1&-6\\3&-1&-2&8&8\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}2&1&-1&5&3\\0&4&1&1&-6\\6&-2&-4&16&16\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}2&1&-1&5&3\\0&4&1&1&-6\\0&-5&-1&1&7\end{array}\right]\\
&\to\left[\begin{array}{ccc:cc}2&1&-1&5&3\\0&4&1&1&-6\\0&-20&-4&4&28\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}2&1&-1&5&3\\0&4&1&1&-6\\0&0&1&9&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}2&1&0&14&1\\0&4&0&-8&-4\\0&0&1&9&-2\end{array}\right]\to\\
&\left[\begin{array}{ccc:cc}2&1&0&14&1\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&9&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}2&0&0&16&2\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&9&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&8&1\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&9&-2\end{array}\right]\\
&=\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{X}\Rightarrow\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}8&1\\-2&-1\\9&-2\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{5.77}
$$

由例 5-24 可知,求解具体的矩阵方程时,可以直接使用逆矩阵相乘得到结果,也可以按照逆矩阵求解的思路直接使用增广矩阵进行求解,显然后者步骤更少且更加简洁。实际上如果 $\boldsymbol{B}$ 是一个列向量 $\boldsymbol{b}$,这个过程就是使用增广矩阵求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$。可见,使用增广矩阵的初等行变换法求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$,其实就是初等行变换法求解线性方程组的拓展与延伸。

最后需要说明的是,不是所有的矩阵方程都可以直接使用逆矩阵求解,有一些矩阵方程具有无穷解或无解。例如 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 中如果 $\boldsymbol{A}$ 不可逆,那么 $\boldsymbol{X}$ 可能有无穷解或者无解(即解不确定),这一点和线性方程组的求解判定类似。

5.5 编程实践:MATLAB 求逆矩阵

使用 MATLAB 求逆矩阵有两种方式,此处以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 这三个矩阵为例说明。

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&4&5\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\tag{5.78}
$$

首先输入这三个矩阵如下:

```
A = [1,1,2;1,2,3;2,4,5];
B = [1,1,1;2,2,2;3,3,3];
C = [1,2,3;4,5,6];
```

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 3 阶方阵,由于 $r(\boldsymbol{A})=3$,$r(\boldsymbol{B})=1<3$,所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆而 $\boldsymbol{B}$ 不可逆。$\boldsymbol{C}$ 不是方阵,所以显然无法求逆矩阵。第一种方式是使用 inv 函数,对 $\boldsymbol{A}$ 的结果如下:

```
>> inv(A)
ans =
     2   -3    1
    -1   -1    1
     0    2   -1
```

运算得到了正确的结果。再看对 $\boldsymbol{B}$ 的结果：

```
>> inv(B)
Warning: Matrix is singular to working precision.
ans =
   Inf  Inf  Inf
   Inf  Inf  Inf
   Inf  Inf  Inf
```

运算也得到了结果，只不过结果都是 Inf，也就是无穷大的意思，并且还有警告提醒说 $\boldsymbol{B}$ 是不可逆的方阵（奇异矩阵）。再看对 $\boldsymbol{C}$ 的结果：

```
>> inv(C)
Error using inv
Matrix must be square.
```

结果出错，并且提示矩阵必须是方阵。

求逆矩阵的第二种方式是使用指数"^(−1)"这种形式，对 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 三个矩阵执行后，结果如下：

```
>> A^(-1)
ans =
     2   -3    1
    -1   -1    1
     0    2   -1

>> B^(-1)
ans =
   Inf  Inf  Inf
   Inf  Inf  Inf
   Inf  Inf  Inf

>> C^(-1)
Error using  ^
Incorrect dimensions for raising a matrix to a power. Check that the matrix is square and the
power is a scalar.
```

结果和刚才是一样的，可见使用这两种方式一定要确保输入矩阵是方阵，否则就会报错。对于可逆的方阵可以得到正确的结果，对于不可逆的方阵会得到由 Inf 构成的异常结果。

除此之外，MATLAB 里还定义了一种矩阵之间的"除法"运算，即"/"和"\"这两个符号。语句"A/B"等价于"A * inv(B)"，语句"A\B"等价于"inv(A) * B"。比如以下两个矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix} \tag{5.79}$$

输入两个矩阵，然后执行"A/B"和"A\B"：

```
>> A/B
ans =
    11   - 4
    14   - 5

>> B/A
ans =
    - 5   4
   - 14  11
```

两者分别和“A * inv(B)”与“inv(A) * B”的结果一致。

习题 5

1. 已知 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个 n 维列向量($n>1$),设 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$,求证:$\boldsymbol{T}$ 不可逆。

2. 求以下矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{bmatrix}5 & 5 & 4\\0 & 2 & 2\\6 & 9 & 8\end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\5 & 1 & 3\\6 & 1 & 2\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

3. 求以下 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\1 & 1 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{n\times n}$$

4. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为可逆矩阵,请使用含有 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的式子表示 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$(提示:$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})$)。

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 3 阶方阵,$\boldsymbol{A}^{-1}=\mathrm{diag}\{3,4,7\}$。$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,求 $\boldsymbol{B}^{-1}$。

6. 已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 如下,求矩阵方程 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}$ 的解。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\2 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

7. 已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 如下,求矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的解。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

8. 已知一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵还是自身,现在欲求 $\boldsymbol{A}$,其推导过程如下。这个过程正确

吗？为什么？

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\text{ 或 }\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}$$

9．已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{B}$，$p$ 和 q 是两个非零常数。

（1）求证：$\boldsymbol{A}-q\boldsymbol{E}$ 可逆；

（2）求证：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

10．本章介绍了使用初等行变换法求逆矩阵，请模仿其原理给出一种仅使用初等列变换求逆矩阵的方法（提示：将单位阵 $\boldsymbol{E}$ 接在原矩阵的下方构成另一种形式的增广矩阵）。