矢量分析

物理学是研究物质的组成及其运动规律的科学。为了达到这一目的，通常需要用各种各样的物理量对周围世界的组成及其运动规律进行描述。物理量的引入为人们探索周围的世界提供了强有力的工具。实践中，人们逐渐认识到不同的物理现象需要用不同的物理量进行描述。这些物理量可以分为标量、矢量、张量等。下面分别进行介绍。

1. 物理量：物理学中，根据研究对象性质的不同，可以把物理量分为标量、矢量、张量等。

2. 标量：只有大小、没有方向的量，用数值（可带正负号）表示。运算规则遵循代数运算。

3. 矢量：既有大小、又有方向的量，遵循矢量代数运算法则。通常记为 $\boldsymbol{A}$。

（1）**矢量的大小**：矢量的模 $|\boldsymbol{A}|=A$。

（2）**矢量的方向**：可以用图示法表示，或直接说明，也可以用表示矢量方向的单位矢量表示，即单位矢量法。

4. 单位矢量：大小为 1 的矢量，通常记为 $\boldsymbol{A}^0$，$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 等，它们可以用来表示矢量的方向。其中 $\boldsymbol{A}^0$ 表示任意矢量 $\boldsymbol{A}$ 方向的单位矢量；$\boldsymbol{e}$ 通常表示沿着半径 r 方向的单位矢量；$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别为直角坐标系下 x 轴，y 轴，z 轴方向的单位矢量。

5. 矢量的表达：用单位矢量表达矢量 $\boldsymbol{A}$，通常记作

$$\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^0=A\boldsymbol{A}^0 \tag{0.1}$$

6. 矢量平移不变性：矢量 $\boldsymbol{A}$ 在空间平移，其大小和方向都不会因平移而改变。

7. 矢量的正交分解：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_x+\boldsymbol{A}_y+\boldsymbol{A}_z \tag{0.2}$$

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k} \tag{0.3}$$

因此，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2} \tag{0.4}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与坐标轴 x，y，z 的夹角分别为 α，β，γ，如图 0.1 所示，这三个角度称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向角。三个夹角满足：

$$\cos\alpha=\frac{A_x}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{A_x}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}} \tag{0.5}$$

$$\cos\beta=\frac{A_y}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{A_y}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}} \tag{0.6}$$

$$\cos\gamma=\frac{A_z}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{A_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}} \tag{0.7}$$

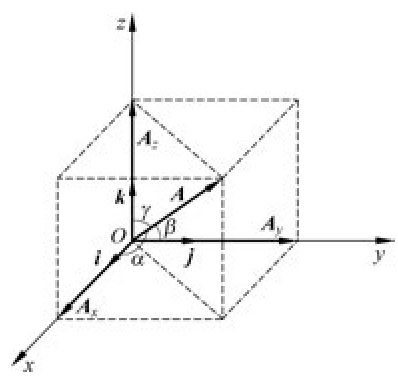

图 0.1　矢量分解

且三者满足关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{0.8}$$

由此可以看出,三个方向角不全都是独立的,知道两个便可计算出第三个。

8. x,y,z 轴上的单位矢量:用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示。它们有以下性质。

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0\\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0\end{cases} \tag{0.9}$$

9. 矢量的和差运算:

(1) 分量运算:

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(A_x\pm B_x)\boldsymbol{i}+(A_y\pm B_y)\boldsymbol{j}+(A_z\pm B_z)\boldsymbol{k}\end{cases} \tag{0.10}$$

(2) 平行四边形法则(三角形法则):

如图 0.2 所示,两个矢量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相加为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \tag{0.11}$$

多个矢量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 相加为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D} \tag{0.12}$$

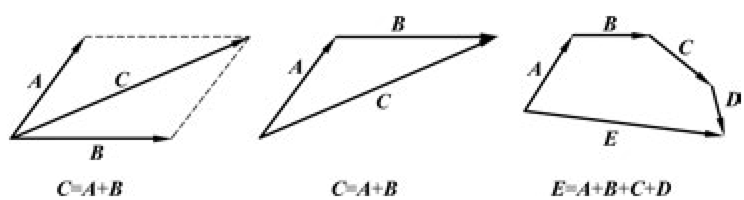

图 0.2 矢量加运算

如图 0.3 所示,两个矢量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相减,可以看作矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $-\boldsymbol{B}$ 相加,为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}) \tag{0.13}$$

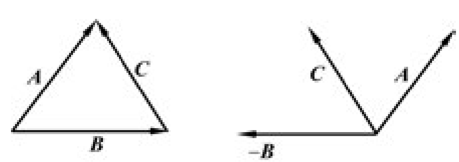

图 0.3 矢量减运算

10. 矢量与标量相乘:一个矢量与一个标量相乘,表示为 $\boldsymbol{B}=m\boldsymbol{A}$。

(1) **大小**:$|m\boldsymbol{A}|$。

(2) **方向**:$m>0$,与 $\boldsymbol{A}$ 同向;$m<0$,与 $\boldsymbol{A}$ 反向。

(3) **性质**:$m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=m\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}$。

11. 矢量的标量积(点乘):

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\theta \tag{0.14}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{0.15}$$

12. 矢量的矢量积(叉乘):

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \tag{0.16}$$

大小为

$$C = AB\sin\theta$$

其中,θ 为向量 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 的夹角。方向:$\boldsymbol{C}\perp\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}\perp\boldsymbol{B}$,满足右手螺旋定则,如图 0.4 所示。

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\boldsymbol{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\boldsymbol{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\boldsymbol{k} \tag{0.17}$$

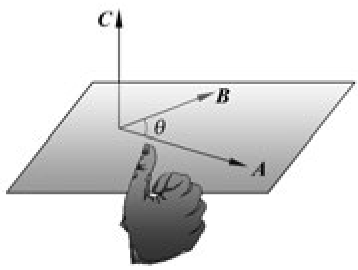

图 0.4 右手螺旋定则

13. 矢量的导数:

矢量的求导按照以下规则进行:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{0.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \tag{0.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}(C\boldsymbol{A})}{\mathrm{d}t} = C\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \tag{0.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{B} \tag{0.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{B} \tag{0.22}$$

14. 矢量的积分:

矢量的积分通常先对各个分量积分,然后再合起来。

$$\boldsymbol{B} = \int \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}t = \int (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}t \tag{0.23}$$

第 1 章　力学(基础)

力学有着悠久的历史，它是一个严谨而又应用广泛的物理学分支。在物理学的其他分支中，可以随处看到力学的影子。大学物理学中的力学属于以牛顿力学为基础的经典力学范畴，对质点、质点系以及刚体的运动进行了详细的阐述。这些内容包括了质点运动学、牛顿力学、动力学以及刚体转动。

1.1　质点运动学

组成我们世界的物质多种多样，纷繁复杂。从夸克，到质子、中子、电子以及原子、分子，再到我们生活的地球，扩展至太阳系、银河系，乃至整个宇宙。如此复杂的物理系统，要想揭示其运动规律是一件不太容易的事情。运动规律是隐含在各种物质物理过程中共同的性质。某些情况下，我们可以把这些具有质量的物质当成是一个只有质量的点，而不考虑其形状、大小等几何信息。这样可以更加抽象出物质的运动规律。这个有质量的点便是质点，是本章研究的主要对象。

物体的运动和静止是相对的，因此，为了准确地描述质点的运动，首先需要指定参考系。参考系实际上就是为描述运动而特意建立的一个坐标系。对质点运动的描述只有指定了参考系才有意义。

1. 参考系：在研究或者描述物体运动时，必须首先选定一个物体或者坐标系作为标准，这个物体或者坐标系称为参考系。参考系反映了物理运动的相对性，选择不同的参考系，对物体运动状态的描述就不同。例如，一个观测者考察在路上做匀速直线运动的小车。如果观测者和小车一起运动，观测者以车上物体为参考系，则车子相对自己静止，地面上的景物则是运动的。如果观测者以地面的树木为参考系，则观测者和小车都是运动的，而地面上的景物则是静止的。第一次以车上物体为参考系，第二次以地面上树木为参考系，得到了不同的结论。从这个例子可以看出参考系对物体运动描述的重要性，同时也能得到物体的运动和静止具有相对性。

2. 质点：只考虑物体的质量，不考虑物体的形状和大小，将物体视为有质量的点，这个有质量的点即质点。质点是一个理想模型，现实中不存在。一个物体是否能被当成质点，要看研究物体做什么运动。例如，我们在研究地球绕太阳的公转时，地球是可以被当成质点的；如果还要研究地球的自转，那么就不能把地球当成质点。

3. 坐标和位置矢量：描述物体在某一时刻的位置是描述物体运动状态的开始。由于物体的运动和选择的参考系密切相关，因此描述物体的位置也和参考系密切相关。在不同的坐标系中描述物体的位置，得到的效果也是不一样的。选定了坐标系，人们就可以用质点的坐标描述质点的位置。若质点做一维运动，只需确定 x 轴(或者 y 轴，z 轴)；若质点在平面内运动，一般需要二维直角坐标系(x,y)；若质点在三维空间运动，则一般需要三维直角

坐标系(x,y,z)。坐标可以精确地描述质点在某一时刻的位置。如果在所选定的坐标系里,质点的坐标(x,y,z)不随时间t变化,质点相对于这个坐标系静止。若(x,y,z)随时间变化,质点相对于这个坐标系运动。另外,根据质点运动的形式的特点,也可以选择其他的坐标系,如质点做圆周运动,通常选择极坐标系进行描述。

从运动的效果来看,当质点运动时,质点的位置会发生变化。有两个因素影响质点的运动,一个是位置变化的多少,另一个是运动的方向。例如,我们可以考虑两种情况:其一,质点沿着x轴的正方向位置改变了5 m;其二,质点沿着x轴的正方向位置改变了3 m。显然运动的结果是不一样的。再如,我们考虑两种情况:质点沿着x轴的正方向位置改变了5 m;质点沿着x轴的负方向位置改变了5 m。显然运动的效果也是不一样的。因此,从运动的效果来看,位置改变的大小和位置改变的方向都会对质点的位置产生影响。位置的改变具有矢量性,既有大小,也有方向。为了体现这种矢量性,需要用一个矢量来描述质点的运动。人们定义了新的物理量,即位置矢量$\boldsymbol{r}$。质点某一时刻的位置矢量和坐标具有一一对应的关系。

(1) **坐标**:三维空间中,质点在参考系中的位置可用坐标(x,y,z)表示。

(2) **位置矢量**:在参考系中,某一时刻质点位置的矢量与质点坐标是一一对应的。位置矢量简称位矢,定义为从参考点(坐标原点)指向质点所在位置的一个有向线段,如图1.1所示,$\overrightarrow{OP}$表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

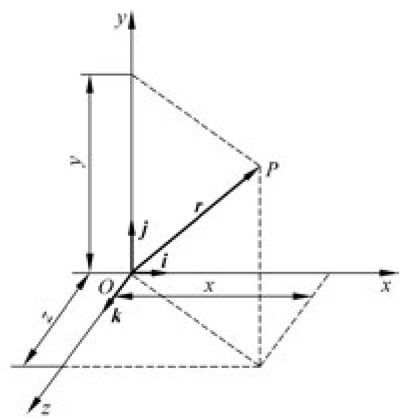

图1.1 位置矢量

4. 位移:质点的坐标有时与时间无关,这时位矢与时间无关,质点相对于坐标系静止。有时质点的坐标相对于坐标系随时间变化,这时位矢与时间有关,质点相对于坐标系运动。为了反映质点的位置的变化,我们定义了位移。假设起始t_1时刻的位置矢量是$\boldsymbol{r}_1$,终止时刻t_2的位置矢量为$\boldsymbol{r}_2$。位移则反映了两个时刻,质点位置的变化。位移也是一个矢量,既有大小也有方向。位移定义为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1 \tag{1.2}$$

考虑到位矢的分量的表达形式,有

$$\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k} \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k} \tag{1.4}$$

因此,位移可以表达为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1.5}$$

这里需要和另外一个物理量路程进行区分。路程Δs是质点在一段时间Δt内走过的距离,反应质点实际走过的路径的距离,是标量。位移则反应始末时刻质点位置的变化,是矢量。二者有本质的不同。但是,二者也有联系,当$\Delta t\to 0$时,位移的大小$|\Delta\boldsymbol{r}|$与路程Δs相等。

5. 速度:速度反映质点位移随时间改变的快慢。不同的场景下速度的定义不尽相同。

一般认为，速度是单位时间的位移，反映了质点位置随时间变化的快慢。速度本身是矢量，有大小和方向。假设起始 t_1 时刻的位置矢量是 $\boldsymbol{r}_1$，终止时刻 t_2 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_2$。那么我们可以定义平均速度。

（1）**平均速度**：一段时间内的位移除以通过这段位移所用的时间。反映了一段时间内位置改变的快慢，即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.6}$$

显然这个定义对质点位置改变快慢的刻画比较粗糙。此式也就是

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{v}}&=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}}{\Delta t}\\&=\frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k}=\bar{v}_x\boldsymbol{i}+\bar{v}_y\boldsymbol{j}+\bar{v}_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1.7}$$

其中，$\bar{v}_x$ 是质点平均速度在 x 轴方向的分量，$\bar{v}_y$ 是质点平均速度在 y 轴方向的分量，$\bar{v}_z$ 是质点平均速度在 z 轴方向的分量。

（2）**瞬时速度**：为了对物体运动更加精确地刻画，我们还可以定义瞬时速度，此时让 $\Delta t\to 0$，然后对式(1.6)求极限。某一时刻的速度，为 $\Delta t\to 0$ 时平均速度的极限值，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k} \tag{1.9}$$

也就是

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1.10}$$

其中，v_x 是质点速度在 x 轴方向的分量，v_y 是质点速度在 y 轴方向的分量，v_z 是质点速度在 z 轴方向的分量。速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小为 $v\equiv\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$。当 $\Delta t\to 0$ 时，位移的大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 与路程 Δs 相等。因此就有

$$v=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.11}$$

速度的大小也叫作瞬时速率。根据矢量的性质，速度的大小也可以写为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{1.12}$$

速度的方向可以用三个方向角表示：

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{v_x}{v}=\dfrac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\\ \cos\beta=\dfrac{v_y}{v}=\dfrac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\\ \cos\gamma=\dfrac{v_z}{v}=\dfrac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\end{cases} \tag{1.13}$$

6. 加速度：反映质点速度改变的快慢，是矢量，有方向，有大小。其定义根据不同的场

景也有所不同。

(1) **平均加速度**：一段时间内，速度随时间的改变量，是矢量。首先我们定义平均加速度。假设 t_1 时刻，质点的速度是 $\boldsymbol{v}_1$，t_2 时刻的速度为 $\boldsymbol{v}_2$，则在 $\Delta t=t_2-t_1$ 时间内的平均加速度为

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1.14}$$

也就是

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{a}}&=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{(v_{2x}-v_{1x})\boldsymbol{i}+(v_{2y}-v_{1y})\boldsymbol{j}+(v_{2z}-v_{1z})\boldsymbol{k}}{\Delta t}\\&=\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\boldsymbol{k}=\bar{a}_x\boldsymbol{i}+\bar{a}_y\boldsymbol{j}+\bar{a}_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1.15}$$

其中，$\bar{a}_x$ 是质点平均加速度在 x 轴方向的分量，$\bar{a}_y$ 是质点平均加速度在 y 轴方向的分量，$\bar{a}_z$ 是质点平均加速度在 z 轴方向的分量。平均加速度是对速度改变快慢的粗略描述。有时需要更加精确地知道速度改变的快慢，因此可以定义瞬时加速度。

(2) **瞬时加速度**：当 $\Delta t\to 0$ 时，平均加速度的极限值就是瞬时加速度，也即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1.16}$$

也即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\boldsymbol{k} \tag{1.17}$$

也可以写为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1.18}$$

其中，a_x 是质点加速度在 x 轴方向的分量，a_y 是质点加速度在 y 轴方向的分量，a_z 是质点加速度在 z 轴方向的分量。加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1.19}$$

方向可用方向角表示。

例题 1.1　已知一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=3t^2\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}-5t^3\boldsymbol{k}$，求这个质点的瞬时速度和瞬时加速度的表达式，并分析该质点的运动特点。求在 Oxy 平面内，质点的轨迹方程。

解：根据运动方程，可得速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=6t\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+15t^2\boldsymbol{k}$$

可得加速度为

$$\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+30t\boldsymbol{k}$$

因此，该质点的运动在 x 轴方向为匀加速运动，在 y 轴方向为匀速运动，在 z 轴方向为变加速运动。

由于 $x=3t^2$，$y=2t$，消去参数 t，得到 Oxy 平面内轨迹方程为

$$x=\frac{3}{4}y^2$$

习题

1.1 已知质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=t^2\boldsymbol{i}+3t\boldsymbol{j}$，求质点的速度、加速度和轨迹方程，并分析质点的运动特点。

1.2 若质点做圆周运动，给出其运动方程。若做螺旋运动，试给出其运动方程。

1.3 不考虑空气阻力，试给出平抛运动的轨迹，已知质点沿水平方向平抛的初速度为 v_0。

1.2 质点力学

牛顿三定律是牛顿力学的重要内容。牛顿三定律反映了物体受力和其运动状态之间的关系，是整个力学的基石，也是其他物理分支，诸如热学、电磁学等的重要基础，对于整个物理学的发展有着不可替代的作用。由其引申出的质量的内涵、动量的定义以及功和能，对于物理学至关重要，也是牛顿的绝对时空观的体现。

1. 牛顿第一定律：任何物体都保持其静止或匀速直线运动状态，直到外力迫使它改变运动状态为止。牛顿第一定律可以表述为

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}=0\\ \boldsymbol{v}=\text{恒矢量}\end{cases} \tag{1.20}$$

牛顿第一定律说明了力是物体运动状态改变的原因。物体在没有受到力时，总会保持静止或者匀速直线运动状态。这里体现了物体具有惯性的性质。如何描述和衡量惯性，则是牛顿第二定律的任务。

2. 牛顿第二定律：牛顿第一定律告诉我们，力是改变物体运动状态的原因。牛顿第二定律告诉我们，力是如何改变物体的运动状态的。首先，引入动量的概念。

（1）**动量**：质点的质量与其速度的乘积称为动量，即

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v} \tag{1.21}$$

其中，m 是质量，$\boldsymbol{v}$ 是物体的速度。动量的国际单位为千克米每秒，即 kg·m/s。动量在直角坐标系中也可以写成分量形式

$$\boldsymbol{p}=p_x\boldsymbol{i}+p_y\boldsymbol{j}+p_z\boldsymbol{k}=mv_x\boldsymbol{i}+mv_y\boldsymbol{j}+mv_z\boldsymbol{k} \tag{1.22}$$

其中，p_x 为质点在 x 轴方向的动量，p_y 为质点在 y 轴方向的动量，p_z 为质点在 z 轴方向的动量。

（2）**牛顿第二定律**：动量为 $\boldsymbol{p}$ 的质点，在合外力的作用下，其动量随时间的变化率等于作用于物体的合外力，即

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{1.23}$$

考虑到力在 x、y、z 轴方向上的分量，我们有

$$F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}(mv_x)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}(mv_y)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}(mv_z)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1.24}$$

因此，我们得到

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(mv_x)}{\mathrm{d}t} \\ F_y = \dfrac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(mv_y)}{\mathrm{d}t} \\ F_z = \dfrac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(mv_z)}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{1.25}$$

若物体的质量不随时间变化,就有

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = ma_x\boldsymbol{i} + ma_y\boldsymbol{j} + ma_z\boldsymbol{k} \tag{1.26}$$

也可写为

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{1.27}$$

牛顿第二定律中质点的质量 m 是物体惯性的量度。在不受力的情况下,物体总保持静止或匀速直线运动的状态。物体受到力时,虽然物体运动状态改变了,但其有保持原有运动状态的趋势,这一性质称为惯性。例如,当你坐在车上,车在做匀速直线运动,如果车突然加速,你试图保持原有的速度,这时身体会后倾。当车突然刹车,你有保持原有速度的趋势,身体会向前倾。这个示例体现了物体的惯性。质量 m 是这种惯性的量度,表示物体运动状态改变难易程度的物理量。物体的质量越大,其运动状态越难改变,保持原有运动状态的能力越强,惯性越大。反之,物体的质量越小,其运动状态越容易改变,保持原有运动状态的能力越弱,惯性越小。

3. 牛顿第三定律:两物体之间的作用力 $\boldsymbol{F}$ 和反作用力 $\boldsymbol{F}'$,大小相等、方向相反,作用在一条直线上,分别作用在两个物体上。牛顿第三定律可以表示为

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}' \tag{1.28}$$

这说明两个物体之间的作用力是相互的。

4. 惯性系:如果物体不受力,物体在一个参考系(坐标系)里保持静止或者匀速直线运动的状态,这一参考系(坐标系)称为惯性参考系,简称惯性系,否则为非惯性系。惯性系是一类特殊的参考系。其特殊性在于任意两个惯性系是彼此等价的。从一个惯性系变换到另一个惯性系,物理过程不会有任何的不同,也不会“感受”到任何的差异。例如,我们使用一个密闭的(与外界没有任何联系的)车厢,当车厢静止时,车厢里的观测者不能通过各种力学实验来判断车厢是否是静止的。当车厢匀速直线运动时,车厢里的观测者同样不能通过任何的力学实验来确定车厢是否具有速度。这件事情说明,静止的惯性系和运动的惯性系是无法通过力学实验进行区分的,在这个意义上,两个惯性系是等价的。

5. 力学相对性原理:对于不同的惯性系,牛顿力学的规律都具有相同的形式,在惯性系内部所做的任何力学实验,都不能确定该惯性系相对于其他惯性系是否在运动。后来,爱因斯坦将力学相对性原理推广到了所有的物理过程,不仅是力学实验,就是其他的热学、电学等实验也无法区分两个惯性系。这就是狭义相对论中的相对性原理。狭义相对论只处理了惯性系,对于非惯性系,是广义相对论处理的对象,这里暂不展开。

6. 弹力:由于物体形变而产生的力。弹簧的弹力、绳索的张力、支撑面的支撑力都属于弹力。弹力的本质是原子、分子之间的电磁相互作用力。

7. 摩擦力：当一个物体在一个表面上有滑动或者有滑动趋势时，运动物体会由于物体和表面之间的一种结合力而受阻，这种阻力叫作摩擦力。摩擦力分为静摩擦力和滑动摩擦力。

（1）**静摩擦力**：物体受到外界的驱动力，物体和表面相对静止但有相对滑动的趋势，此时，物体受到一个静摩擦力，且静摩擦力大小与外力相等，方向与外力相反。通常，静摩擦力有一个最大值，记为

$$F_{f0m}=\mu_0 F_N \tag{1.29}$$

式中，μ_0 为静摩擦系数。

（2）**滑动摩擦力**：当物体受到外界的驱动力时，物体开始滑动，此时物体受到滑动摩擦力。滑动摩擦力为

$$F_f=\mu F_N \tag{1.30}$$

其中，μ 为滑动摩擦系数。滑动摩擦力通常比静摩擦力的最大值要小。因此，当要推动地面上的物体时，需要较大的外力。一旦物体滑动起来，这时只需要相对较小的外力就可以保持物体的滑动。

物体的表面宏观上看是光滑的，但由于物体表面是由分子组成，从微观上看，其表面并不是光滑的，另外分子和分子之间也有电磁相互作用力，这些是摩擦力的微观起源。

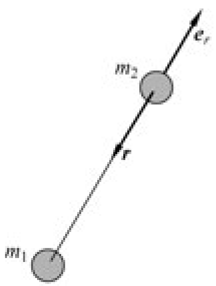

图 1.2 万有引力

8. 万有引力：两个相距为 r，质量分别为 m_1 和 m_2 的质点间的万有引力，其方向沿着它们的连线指向对方（图 1.2），其大小与它们的质量的乘积成正比，与它们之间的距离 r 的二次方成反比。表述为

$$F=G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1.31}$$

引入单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$，其方向沿着 r 的方向向外。因此，万有引力可表述为

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{1.32}$$

其中 G 为万有引力常数，$G=6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$。之所以称为万有引力，是因为这个力与质量有关，凡是有质量的物体都存在万有引力。在已知的四种相互作用中，引力相互作用是最小的。引力的发现有着悠久的历史，从开普勒观测太阳系行星轨道和运动的规律就能看到万有引力的蛛丝马迹，到人们熟知的牛顿苹果落地乃至月球围绕地球运转，牛顿直接给出了万有引力。再到爱因斯坦的弯曲时空，都与万有引力密切相关。

9. 力学的单位制和量纲：在众多的物理量中，有些物理量是直接定义的，有些物理量则是从其他物理量导出的。例如，时间、质量、长度等物理量是人们直接定义的，无法从其他物理量导出，我们称这样的物理量为基本量。速度、动量等其他物理量可由基本量导出，我们称为导出量。

（1）**基本量**：长度 L、时间 T、质量 M。

（2）**国际单位制**：长度单位是米，用 m 表示。时间单位是秒，用 s 表示。质量单位是千克，用 kg 表示。

（3）**导出量**：其他力学物理量的单位由基本单位导出。

10. 量纲：表示导出量和基本量之间的关系。

$$\dim Q=L^p M^q T^s \tag{1.33}$$