

数学基础

1.1 场的数学描述

在物理世界中,存在两大类对象:粒子和场。粒子有明确的边界,即每个粒子在空间中占据一个固定的位置,粒子间的相互作用是两两交换能量和动量。例如,质点就是一个典型的粒子实例。而场则是描述物理量在空间和时间中的分布,它没有明显的边界,且系统间的相互作用是整体交换能量和动量。当场的分布随时间和空间改变时,我们通常称之为波。

不同的物理对象需要不同的数学工具来描述。对于粒子,我们关注其随时间变化的位置,用位置矢量 $\mathbf{r}(t)$ 表示粒子所在位置的矢量,矢量的端点追踪其运动轨迹,就像母亲的眼睛总是盯在小孩身上。这种关注焦点引导我们定义了位移、速度和加速度等物理量,以更全面地描述粒子的运动状态。然而,对于场,我们的关注点转移到了空间本身,研究物理量在空间中的变化,以及空间与边界的相互关系。这促使我们引入了梯度、散度、旋度等物理量,并得到了如高斯公式、斯托克斯公式等描述空间与边值关系的数学工具。此时,我们更像是空间的守护者,时刻关注着场内物理量的变化以及边界的交互。

物理量有两类基本类型:标量和矢量,因此,场就有相应的标量场和矢量场。标量场是指空间中每一点都能用一个唯一的数字来标识的场,表示为 $\varphi(x, y, z, t) = \varphi(\mathbf{r}, t)$,如温度场、电势场和密度场等。而矢量场则是指空间中每一点都赋予了一个矢量的场,表示为 $\mathbf{A}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$,如速度场、热流场、电场和磁场等。当这些场与时间无关时,我们称之为稳恒场;而当它们随时间变化时,则称为变化场或时变场。因此,描述场的核心在于使用一个同时包含空间和时间坐标的函数。

一、标量场的数学描述

标量场是物理中一种最简单的场,其特点在于空间中的每一点都可以用一个单一的数值来标识。以教室为例,当教室前方有加热器、后方有空调时,教室内的温度 $T(x, y, z)$ 会随位置 (x, y, z) 的不同而复杂地变化,因此,温度在这里就是一个典型的标量场。

为了深入理解并描述标量场,我们需要构建相应的物理模型。一种直观的方法是想象将标量场中所有数值相等的点连接起来,形成一系列等值面。例如,在温度场中,我们可以

将温度相同的点连成曲面,并每隔一定温度值(如 10°C)形成一个新的曲面,从而得到一系列等值面,如图 1-1 所示。

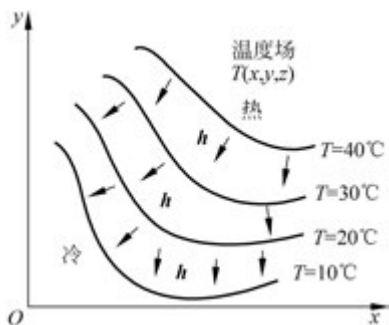


图 1-1

接下来,为了研究标量场在空间中的变化情况,我们需要借助数学工具。具体地说,我们需要知道这些等值面沿不同方向的变化率。由于等值面沿其切线方向的变化率为零,我们主要关注标量场沿 x 、 y 、 z 轴三个方向的变化率,即 $(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z})$ 。这三个变化率实际上形成了一个矢量的三个分量。

为了证明这个物理量是矢量,我们可以采用两种方法。

方法一: 利用坐标系变换中,标量是不变量的方法。

设有两组由三个数值组成的数组: (A_x, A_y, A_z) 和 (B_1, B_2, B_3) , 如果相应位置值相乘是一个不变量,即

$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = \text{不变量}$$

且 (A_x, A_y, A_z) 是一个矢量的三个分量,则 (B_1, B_2, B_3) 也一定是一个矢量。

设在一个温度场 T 中,如图 1-2 所示, P_1 、 P_2 两点的温度差表示为

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z$$

坐标系是任意选定的,显然,两点的温度差 ΔT 在坐标系的变换中应该保持不变。由于 $\mathbf{R} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 是一个矢量,因此可以得到 $(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z})$ 也是一个矢量。

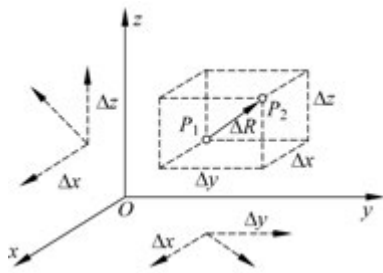


图 1-2

定义一个矢量

$$\text{grad} T = \nabla T = \hat{x} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial T}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1-1)$$

该矢量称为**梯度**^①。其中, $\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$, 读作 nabla 算符; \hat{x} 、 \hat{y} 、 \hat{z} 分别为 x 、 y 、 z 轴方向的单位矢量。把 $\hat{x} \frac{\partial}{\partial x}$ 的单位矢量写在前面是为了避免误解为 $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}$ 。

方法二: 在坐标变换中,若数组的变换规律和矢量三个分量一样,则该数组也一定是矢量。

为简单起见,仅考虑二维平面。当坐标系旋转时,如图 1-3(a) 所示,矢量有如下的变换规律

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases} \quad (1-2)$$

① 似乎称其为**陡度**更为合适,表示等值面之间陡峭的程度。

在图 1-3(b)中, xOy 坐标系中, P_1, P_2 温度差表示为

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x$$

$x'O'y'$ 坐标系中, P_1, P_2 温度差为

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y'$$

由于 $\Delta x' = \Delta x \cos \theta, \Delta y' = -\Delta x \sin \theta$

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta x \sin \theta \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \theta \right) \Delta x \end{aligned}$$

将上式写为微分式

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \theta \quad (1-3)$$

比较式(1-2)的第一式和式(1-3), 发现 x 和 $\frac{\partial T}{\partial x}$ 有一

样的变换规律, 因此 $\frac{\partial T}{\partial x}$ 是矢量的一个分量。同理, 可以证明 $\frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$ 也有一样的变换规律。

因此, 可以得到

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

是一个矢量。

既然 ∇T 是矢量, 就有大小和方向, 为了看出它的几何意义, 函数 T 的全微分可以写为

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz = \nabla T \cdot d\mathbf{l} = |\nabla T| |d\mathbf{l}| \cos \theta \quad (1-4)$$

其中, θ 为 ∇T 和 $d\mathbf{l}$ 的夹角。可以发现, 当 $\theta=0$ 时, dT 最大。因此, 梯度 ∇T 的方向指向函数 T 的最大变化率(方向导数)方向, 也就是垂直于等值面, $|\nabla T|$ 给出沿这个最大变化率方向的斜率(也就是函数 T 的最大变化率)。

我们在地理课中, 看过类似的等值面, 只不过自变量只有两个: 经度和纬度, 高度相当于标量场的函数值, 因此, 在地理课中, 等值面就变成了等高线。如果在一个山坡上, 最陡的方向就是梯度的方向, 沿这个方向的斜率就是梯度的大小。

如果在点 (x, y, z) 的梯度为零, 表示该点是函数 $T(x, y, z)$ 的稳定点, 可能是极大点(山顶), 或极小点(山谷), 或鞍点(某个方向极大, 对另外方向极小), 或“肩点”(上升或下降中的平坦处)。

如果在标量场中从 A 点移动到 B 点, 如图 1-4 所示。根据式(1-4), 得到

$$T(B) - T(A) = \int_a^b dT = \int_a^b (\nabla T) \cdot d\mathbf{l} \quad (1-5)$$

上式就是**梯度定理**。因为一条曲线的边界是两个点, 因此梯度定理是描述标量场内部与边界之间关系的重要原理。其核心思

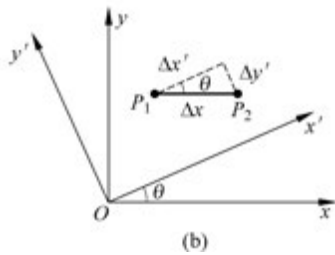
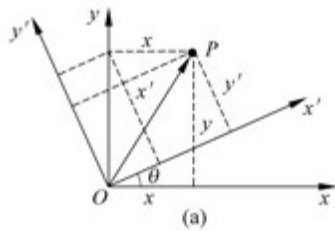


图 1-3



图 1-4

想在于,沿着一条曲线从 A 点到 B 点的标量场的变化,可以通过计算这两点间梯度的积分来得到。由于曲线的边界仅由两个端点确定,因此梯度定理实际上建立了这两个端点(边界)与曲线(内部)之间标量场变化的直接关系。值得注意的是,这一积分过程并不依赖于从 A 点到 B 点所选择的具体路径,这进一步强调了梯度定理所描述的内部与边界之间关系的普适性和不变性。

【例题 1-1】 在直角坐标系中,函数 $T=x^2+4xy+2yz^3$, 点 $a=(0,0,0)$, $b=(1,1,1)$, 对图 1-5 所给的三条路径验证梯度定理。

$$(1) (0,0,0) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (1,1,1);$$

$$(2) (0,0,0) \rightarrow (0,0,1) \rightarrow (0,1,1) \rightarrow (1,1,1);$$

$$(3) \text{ 抛物线路径 } x=x^2, y=x.$$

【解】 $T(b)=1+4+2=7, T(a)=0, \Rightarrow T(b)-T(a)=7$

$$\nabla T = (2x+4y)\hat{x} + (4x+2z^3)\hat{y} + (6yz^2)\hat{z}$$

$$\nabla T \cdot d\mathbf{l} = (2x+4y)dx + (4x+2z^3)dy + (6yz^2)dz$$

(1) 线段 1: $x:0 \rightarrow 1, y=z=0, dy=dz=0$, 因此

$$\int \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 (2x)dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

线段 2: $y:0 \rightarrow 1, x=1, z=0, dx=dz=0$, 因此

$$\int \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 (4)dy = 4y \Big|_0^1 = 4$$

线段 3: $z:0 \rightarrow 1, x=y=1, dx=dy=0$, 因此

$$\int \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 (6z^2)dz = 2z^3 \Big|_0^1 = 2$$

三段相加: $\int_a^b \nabla T \cdot d\mathbf{l} = 7$, 梯度定理成立。

(2) 线段 1: $z:0 \rightarrow 1, x=y=0, dx=dy=0$, 因此

$$\int \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 (0)dz = 0$$

线段 2: $y:0 \rightarrow 1, x=0, z=1, dx=dz=0$, 因此

$$\int \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 (2)dy = 2y \Big|_0^1 = 2$$

线段 3: $x:0 \rightarrow 1, y=z=1, dy=dz=0$, 因此

$$\int \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 (2x+4)dx = (x^2+4x) \Big|_0^1 = 1+4=5$$

三段相加: $\int_a^b \nabla T \cdot d\mathbf{l} = 7$, 梯度定理成立。

(3) $x:0 \rightarrow 1, y=x, z=x^2, dy=dx, dz=2x dx$, 因此

$$\nabla T \cdot d\mathbf{l} = (2x+4x)dx + (4x+2x^6)dx + (6xx^4)2x dx = (10x+14x^6)dx$$

$$\int_a^b \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 (10x+14x^6)dx = (5x^2+2x^7) \Big|_0^1 = 5+2=7, \text{ 梯度定理成立。}$$

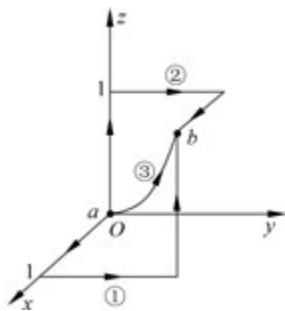


图 1-5

二、矢量场的数学描述

1. 标量场与矢量场的关系

第二种经常碰到的场是矢量场,表示空间中每一点都给出了一个矢量。比如,一条奔腾的河流,每一点的速度都不相同,我们称为**速度场**,速度 \boldsymbol{v} 表示单位时间流体的位移,方向沿流动的方向。再比如,图 1-1 中每一点都有一个不同的箭头,表示热量沿不同方向流动,因此称为**热流场**,用 \boldsymbol{h} 表示,我们把 \boldsymbol{h} 称为**热流强度矢量**, \boldsymbol{h} 表示单位时间通过垂直于热流方向单位面积的热量,方向沿热量流动的方向,用数学公式可以表示为

$$\boldsymbol{h} = \frac{\Delta J}{\Delta S} \boldsymbol{e}_h \quad (1-6)$$

其中, ΔJ 为单位时间内通过面积元 ΔS 的热量, \boldsymbol{e}_h 表示沿热流方向的单位矢量。

除此以外,经常见到的矢量场还有重力场、电场、磁场等。

在图 1-1 中的场,既可以用温度标量场 T 来描述,又可以用热流矢量场 \boldsymbol{h} 来描述,这两种描述方式一定有联系。在流体中,也有标量场和矢量场的两种描述形式,压强 p 就是流体的标量场,速度 \boldsymbol{v} 就是流体中的矢量场。在电场中,电势就是电场中的标量场,电场强度就是电场中的矢量场。这种关联在自然界中广泛存在,为我们提供了描述物理现象的多维视角。

以流体为例,我们进一步探讨标量场和矢量场的联系。在温度梯度作用下,热量会从高温区域流向低温区域。热流强度与温差、面积以及材料的热导率有关。通过取微元并应用热流强度的定义,我们可以推导出热流强度与温度梯度的关系,从而揭示了标量场(温度场)与矢量场(热流场)之间的内在联系。

如图 1-6 所示,一块厚片材料,两面的温度分别为 T_1 、 T_2 , $T_2 > T_1$,那么热量由 T_2 流向 T_1 ,热流 J 将与面积 S 、温度差 $(T_2 - T_1)$ 成正比,与厚度 d 成反比,即

$$J = k(T_2 - T_1) \frac{S}{d}$$

其中, k 称为热导率。当我们仅取一个微元,上式就可以改写为

$$\Delta J = k \Delta T \frac{\Delta S}{\Delta d}$$

根据式(1-6),并考虑到热流强度 \boldsymbol{h} 的方向垂直于如图 1-6 所示的等温面,得

$$\boldsymbol{h} = \frac{\Delta J}{\Delta S} \boldsymbol{e}_h = k \frac{\Delta T}{\Delta d} \boldsymbol{e}_h = -k \nabla T \quad (1-7)$$

上式就是矢量场与标量场的联系,最后等号的负号是考虑到 \boldsymbol{e}_h 与梯度的方向相反。

2. 矢量场的通量

在深入探讨矢量场的数学工具时,我们首先需要理解矢量场的本质。矢量场是指空间中的每一个点都关联着一个矢量,用以描述该点的某种物理属性,如图 1-7(a)所示。通常,

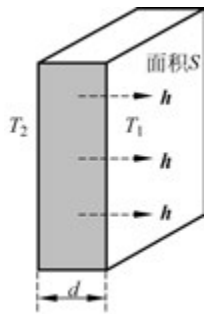


图 1-6

我们使用箭头的方向和长度来分别表示矢量的方向和大小。然而,为了更直观地展示矢量场的特性,我们引入了场线的概念,即画出与矢量相切的曲线,如图 1-7(b)所示,场线的切线方向代表矢量场的方向。虽然这样做使我们失去了矢量的长度记录,但可以通过场线的疏密来表示强度。因此,场线的切线表示矢量场的方向,场线的疏密表示矢量场的强度。

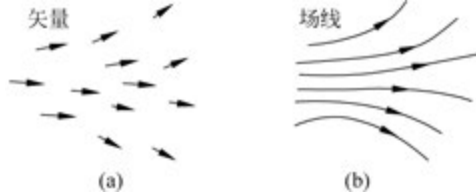


图 1-7

当采用场线来描述矢量场时,如何定量地研究其特性就成了一个重要问题。在流体速度场的背景下,我们可以设想一个闭合曲面,并定义单位时间内通过该曲面的净流量为通量,如图 1-8 所示,这一概念同样适用于非闭合曲面。通量可以表示为平均法向分量与面积的乘积,为

$$\text{通量} = \text{平均法向分量} \times \text{面积}$$

写成积分形式

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

其中, \mathbf{A} 是矢量场。写成微分形式

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

如果 S 是一个闭合曲面,则通量为

$$\Phi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \tag{1-8}$$

当 $\Phi > 0$ 时,表示流出闭合曲面的流量多于流入流量, S 内必有产生流体的正源;当 $\Phi < 0$ 时,表示流出闭合曲面的流量少于流入流量, S 内必有吸收流体的负源;当 $\Phi = 0$ 时,表示流出闭合曲面的流量等于流入流量, S 内没有源。

为了理解通量的概念,我们可以考虑一个微小立方体,其沿 x 、 y 、 z 轴方向各有两个面,如图 1-9 所示。

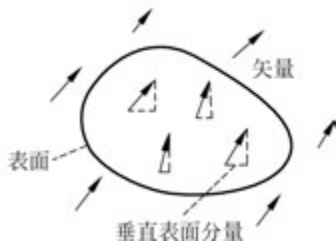


图 1-8

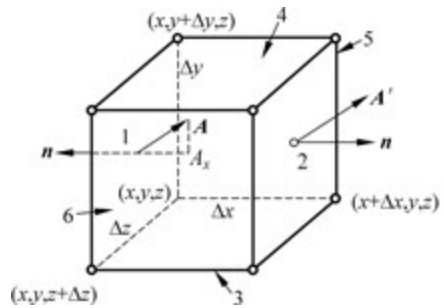


图 1-9

从 1 面流出的通量为 $-A_x(1)\Delta y\Delta z$,其中 $A_x(1)$ 表示矢量 \mathbf{A} 在 1 面位置 x 轴方向的分量。

从 2 面流出的通量为 $A_x(2)\Delta y\Delta z$, 如果 Δx 足够小, 根据微分公式, 有

$$A_x(2) = A_x(1) + \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x$$

经过 x 轴方向 1、2 面流出的通量为

$$A_x(2)\Delta y\Delta z - A_x(1)\Delta y\Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta V$$

其中 ΔV 为小六面体的体积。同理, 有

经过 y 轴方向 3、4 面流出的通量为

$$\frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z = \frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta V$$

经过 z 轴方向 5、6 面流出的通量为

$$\frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z = \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta V$$

通过所有面的总通量为上面三项相加, 因此, 得到

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (1-9)$$

上式称为高斯公式, 也称为**散度定理**。因为体的边界为一个闭合曲面, 上式左边是边界的情况, 右边是空间内部的情况, 因此, 高斯公式是描述内部和边界之间的关系。式中 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 称为矢量场 \mathbf{A} 的散度(发散程度的意思)。散度的具体表达式可以写为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-10)$$

可以这样理解式(1-9): 如果是一个游泳池, $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 可以看成每一点往外流出的水量, 等号右边的积分表示把所有的点都累加起来, 左边表示从游泳池边界流出的水量。

散度的物理意义是矢量场中单位体积上的通量, 也就是通量的体密度, 表征空间各点矢量场发散的强弱程度。当 $\nabla \cdot \mathbf{A} > 0$ 时, 表示该点有散发通量的正源, 该点称为“源”; 当 $\nabla \cdot \mathbf{A} < 0$ 时, 表示该点有吸收通量的负源, 该点称为“汇”; 当 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 时, 表示该点为无源场。

散度表示发散程度的意思, 比如在流体中有一个出水口, 如图 1-10(a)所示, 流体在出水口往外冒, 此时散度大于零; 如果矢量的方向相反, 表示流体往里面流走, 散度小于零。图 1-10(b)表示稳恒流动, 没有出水和进水口, 此时散度为零。图 1-10(c)并不是一个稳恒的流体, 速度不断增大, 因此散度大于零。这些例子帮助我们直观地理解散度在描述矢量场发散特性中的作用。

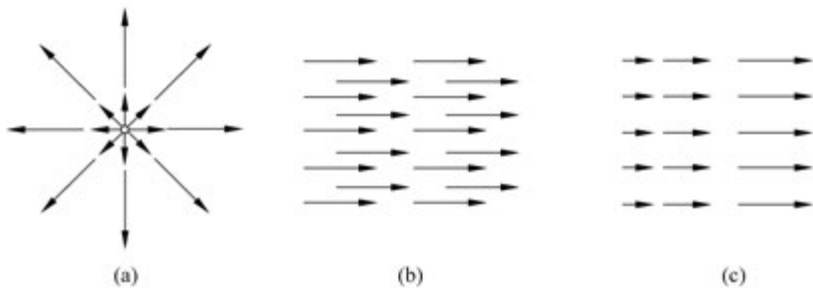


图 1-10

【例题 1-2】 对图 1-11 所示的单位立方体和函数 $\mathbf{A} = y^2 \hat{x} + (2xy + z^2) \hat{y} + (2yz) \hat{z}$, 验证高斯公式。

【解】 散度为 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2(x + y)$, 则

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= \int_V 2(x + y) dV = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y) dx dy dz \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y \right) dy dz = 2 \int_0^1 1 dz = 2 \end{aligned}$$

计算面积分(一共六个面)

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 y^2 dy dz = \frac{1}{3}$$

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = - \int_0^1 \int_0^1 y^2 dy dz = -\frac{1}{3}$$

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 (2x + z^2) dx dz = \frac{4}{3}$$

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = - \int_0^1 \int_0^1 z^2 dx dz = -\frac{1}{3}$$

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 2y dx dy = 1$$

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = - \int_0^1 \int_0^1 0 dx dy = 0$$

六个面相加为

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 0 = 2, \text{验证完毕。}$$

3. 矢量场的环流

在探讨矢量场时,仅了解流体通过曲面的速度通量(即散度)并不足以完整描述矢量场的所有特性。例如,一个完全静止的流体和一个不断旋转的流体,对一个闭合曲面 S 而言,两者的速度通量都可能是零,即散度为零。这表明,除了散度之外,还需要另一个数学工具来描述矢量场的旋转特性。

设想在流体中存在一个闭合的管子,如图 1-12 所示,我们想要知道单位时间内通过这个管子的净流量。为此,我们引入了一个物理量“环流”来描述这一特性。在流体中,环流定义为速度切向分量乘以管子的长度。对于更一般的矢量场,环流的定义是矢量场量的平均切线分量与弧长的乘积,即

$$\text{环流} = \text{平均切线分量} \times \text{弧长}$$

$$\text{环流写为数学形式: } \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}.$$

可见,矢量场的环流是一个标量,如果环流不等于零,说明在矢量场存在着涡旋源。

我们现在考虑一个在 xOy 平面上小正方形的环流,用右手螺旋定则表示面积的方向,这个小正方形的方向可以用 z 轴方向来表示,如图 1-13 所示。

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_x(1)\Delta x + A_y(2)\Delta y - A_x(3)\Delta x - A_y(4)\Delta y$$

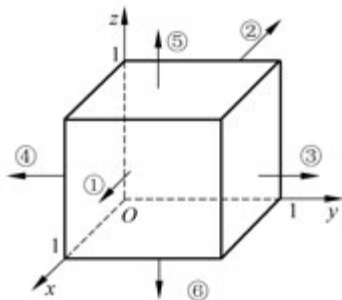


图 1-11

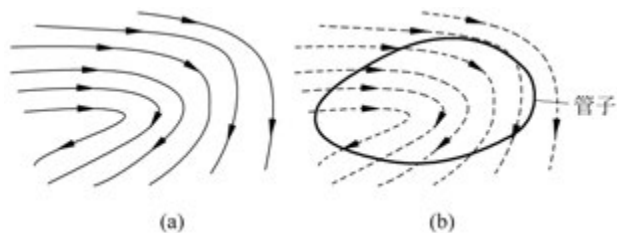


图 1-12

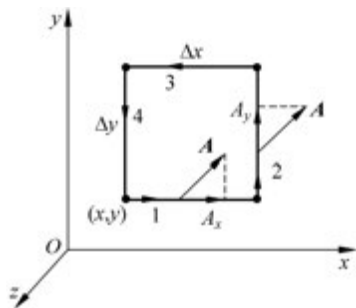


图 1-13

把上式等号右边的第一项和第三项组合起来,有

$$A_x(1)\Delta x - A_x(3)\Delta x$$

根据微分公式,考虑到 A_x 的变化率,有

$$A_x(3) = A_x(1) + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y$$

把上面两式合并起来,得

$$[A_x(1) - A_x(3)]\Delta x = -\frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

同理,另外两项可以写为

$$[A_y(2) - A_y(4)]\Delta y = \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

于是图 1-13 中的那个小正方形的环流为

$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta s \quad (1-11)$$

看到上式这种奇怪的组合,我们一定会联想到两个矢量的叉乘。

$(\nabla \times \mathbf{A})$ 的 z 轴方向的分量为

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

由于小正方形面积 Δs 的方向是沿 z 轴方向的,因此,式(1-11)可以改写为

$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta s = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \Delta \mathbf{s}$$

如果我们研究的回路 L 上的曲面不仅有 z 轴方向的,还有 x 、 y 轴方向的,可以得到闭合回路 L 的环流为

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} \quad (1-12)$$

上式称为斯托克斯公式,也称为旋度定理。它揭示了边界和内部曲面之间的关系,因为曲面的边界为一条闭合曲线,上式左边是边界的情况,右边是曲面的情况,因此,旋度定理也是描述内部和边界之间的关系。式(1-12)中 $\nabla \times \mathbf{A}$ 称为旋度(旋转程度的意思), $\nabla \times \mathbf{A}$ 可以写为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \hat{z} \quad (1-13)$$

从式(1-12)可以看出: 矢量场的旋度表示矢量场中单位面积上的环流(环流的面密

度),其方向是沿面元的法向并和边界的正向构成右螺旋, $\nabla \times \mathbf{A}$ 用来表征矢量场涡旋强弱的程度,如果场中处处 $\nabla \times \mathbf{A} = 0$,称为无旋场。

【例题 1-3】 对函数 $\mathbf{A} = (xy)\hat{x} + (2yz)\hat{y} + (3xz)\hat{z}$, 用图 1-14 所示三角形面积验证斯托克斯定理。

【解】 $\nabla \times \mathbf{A} = \hat{x}(0 - 2y) + \hat{y}(0 - 3z) + \hat{z}(0 - x) = -2y\hat{x} - 3z\hat{y} - x\hat{z}$

$$ds = dydz\hat{x}, \quad (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot ds = -2ydydz$$

面积分(见图 1-15)为

$$\begin{aligned} \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot ds &= \int_0^2 \int_0^{2-z} (-2y) dy dz = - \int_0^2 (4 - 4z + z^2) dz \\ &= - \left(4z - 2z^2 + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^2 = - \left(8 - 8 + \frac{8}{3} \right) = - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

其中第二个等号用到 $\int_0^{2-z} (-2y) dy = -y^2 \Big|_0^{2-z} = -(2-z)^2$ 。

同时, $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (xy)dx + (2yz)dy + (3xz)dz$, 积分的路径为逆时针方向, 有三个线段, 如图 1-16 所示。

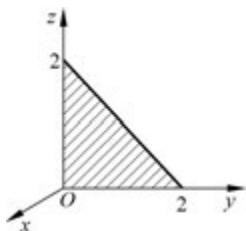


图 1-14

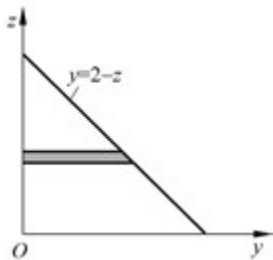


图 1-15

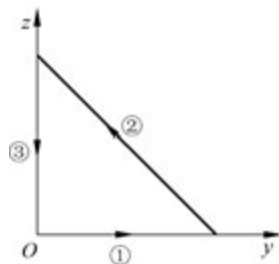


图 1-16

线段①: $x=z=0, dx=dz=0, y:0 \rightarrow 2, \Rightarrow \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$

线段②: $x=0, z=2-y, dx=0, dz=-dy, y:2 \rightarrow 0, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2yzdy$

$$\begin{aligned} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_2^0 2y(2-y)dy = - \int_0^2 (4y - 2y^2)dy = - \left(2y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right) \Big|_0^2 \\ &= - \left(8 - \frac{2}{3} \times 8 \right) = - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

线段③: $x=y=0, dx=dy=0, z:2 \rightarrow 0, \Rightarrow \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{8}{3}, \text{ 验证完毕。}$$

三、小结

关于场的数学描述,总结如下。

1. 算符 ∇

算符 $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ 是矢量算符 ∇ 的三个分量, 写为