

## 向量代数与空间解析几何

自然界中,有的量只有大小,如长度、温度、时间等,这种量称为数量(或标量),确定了测量单位后用一个实数就可以表示,这些量的运算我们已经很熟悉了;此外,还有一种量,既有大小又有方向,如速度、力、位移等,这种量称为向量(或矢量),其表示和运算与我们熟悉的数量就有所不同了,此即为向量代数的内容.

所谓解析几何(或坐标几何),就是用代数方法研究几何问题,即把几何图形看作空间点的轨迹,通过建立坐标系把空间点(或向量)与有序数组(坐标)对应起来,进而建立描述几何图形性质和位置关系的代数方程(或方程组),从而把几何问题转化为代数问题,用代数方法去研究和解决这些问题.

本章将介绍向量代数及空间解析几何的基本方法,建立空间平面、直线、曲面、曲线的方程或方程组,给出它们的图形形状,为进一步学习多元函数微积分做好准备.

### 第一节 空间直角坐标系

解析几何的主要内容是建立几何图形与代数方程(或方程组)的联系,那么方程(或方程组)中的变量是怎么来的或表示什么意义呢?这需要建立坐标系,将空间中的点与有序数组相对应.在不同的坐标系下,几何图形所对应的代数方程是不同的.本节介绍一种最常用的坐标系——空间直角坐标系.

#### 一、空间点的直角坐标

在三维空间中取定一点 $O$ ,过点 $O$ 作三条两两垂直的数轴,一般取三个数轴具有相同的长度单位.称定点 $O$ 为坐标原点,三条数轴为坐标轴,分别叫作 $x$ 轴、 $y$ 轴和 $z$ 轴.通常把 $x$ 轴和 $y$ 轴配置在水平面上, $z$ 轴是铅垂线.坐标轴的正方向按右手规则排列,即用右手握住 $z$ 轴,当右手的四指从 $x$ 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 $y$ 轴正向时,大拇指指向 $z$ 轴正向,如图7-1所示.图中箭头的指向表示数轴的正向.这样的三个坐标轴就组成一个空间直角坐标系.

如图7-2所示,依次把过 $x$ 轴和 $y$ 轴, $y$ 轴和 $z$ 轴, $z$ 轴和 $x$ 轴的平面分别称为 $xOy$ 平面、 $yOz$ 平面、 $zOx$ 平面,统称为坐标面.三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分称为一个卦限.含三个坐标

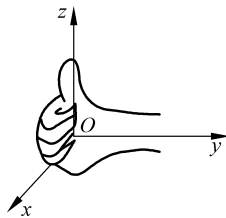


图 7-1

轴正半轴的部分称为第一卦限,在  $xOy$  平面上方的其余三个卦限按逆时针方向(从  $z$  轴正向看去)依次称为第二、第三、第四卦限;在  $xOy$  平面下方的四个卦限中,第一卦限下方的称为第五卦限,其余按逆时针方向依次称为第六、第七、第八卦限.

设  $M$  为空间中一个点,过点  $M$  分别作垂直于三个坐标轴的平面,交  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴于  $P, Q, R$  点(图 7-3),这三个点在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上的坐标分别是  $x, y, z$ . 点  $M$  唯一地确定了一个有序实数组  $x, y, z$ ; 反之,如果有一个有序实数组  $x, y, z$ , 则分别在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上取与之对应的点  $P, Q, R$ , 分别过点  $P, Q, R$  作垂直于  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的平面,这三个平面的交点  $M$  便是有序数组  $x, y, z$  所确定的唯一点. 这样就确定了空间中点  $M$  与有序数组  $x, y, z$  之间的一一对应关系. 我们称  $(x, y, z)$  为点  $M$  的坐标, 依次称  $x, y, z$  为点  $M$  的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为  $(x, y, z)$  的点  $M$  通常记为  $M(x, y, z)$ .

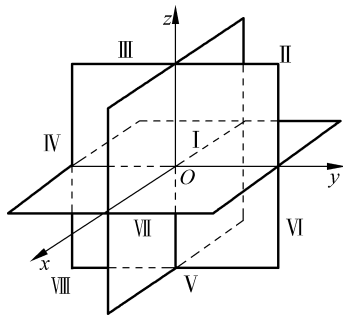


图 7-2

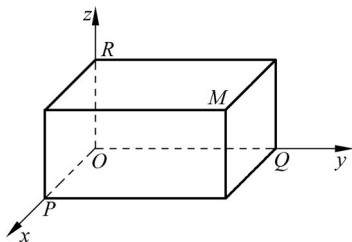


图 7-3

显然,不同卦限中点的坐标的正负号有如下规律(表 7-1):

表 7-1 不同卦限中点的坐标的正负号规律

卦限	一	二	三	四	五	六	七	八
坐标符号	$(+, +, +)$	$(-, +, +)$	$(-, -, +)$	$(+, -, +)$	$(+, +, -)$	$(-, +, -)$	$(-, -, -)$	$(+, -, -)$

特别地,位于坐标轴、坐标面上点的坐标有一定的特征. 例如,  $x$  轴上的点可表示为  $(x, 0, 0)$ ,  $xOy$  平面上的点可表示为  $(x, y, 0)$ , 原点为  $O(0, 0, 0)$ , 等等.

利用坐标可以给出空间中两点关于坐标轴、坐标面、坐标原点的对称含义. 例如:

(1)  $P_1, P_2$  两点关于  $x$  轴对称, 即连接两点的线段  $P_1P_2$  与  $x$  轴垂直相交, 且被交点平分. 若  $P_1$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 则  $P_2$  的坐标为  $(x, -y, -z)$ .

(2)  $P_1, P_2$  两点关于  $xOy$  平面对称, 即线段  $P_1P_2$  与  $xOy$  平面垂直, 且被  $xOy$  平面平分. 若  $P_1$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 则  $P_2$  的坐标为  $(x, y, -z)$ .

(3)  $P_1, P_2$  两点关于原点  $O$  对称, 即线段  $P_1P_2$  经过原点  $O$ , 且被点  $O$  平分. 若  $P_1$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 则  $P_2$  的坐标为  $(-x, -y, -z)$ .

## 二、空间中两点间的距离

设空间中两点为  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ .  $M_1, M_2$  间的距离  $d$  可以用它们的坐标来表示. 过  $M_1, M_2$  分别作垂直于三条坐标轴的平面, 这六个平面围成以  $M_1M_2$  为对角线的长方体(图 7-4).

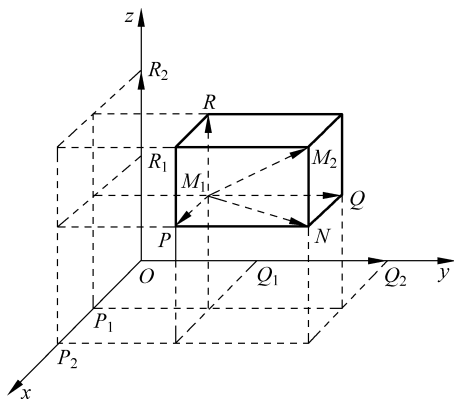


图 7-4

用符号  $|M_1M_2|$  表示线段  $M_1M_2$  的长, 有

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2.$$

由于

$$\begin{aligned} |M_1P| &= |P_1P_2| = |x_2 - x_1|, & |PN| &= |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|, \\ |NM_2| &= |R_1R_2| = |z_2 - z_1|, \end{aligned}$$

因此可得如下空间两点间的距离公式:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别地, 点  $M(x, y, z)$  与点  $O(0, 0, 0)$  间的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

**例 1** 在  $xOy$  平面上求与已知点  $A(2, 1, 3), B(0, -2, 2), C(3, 3, 0)$  等距离的点.

**解** 设所求点为  $P(x, y, 0)$ , 则

$$|PA|^2 = |PB|^2, \quad |PA|^2 = |PC|^2,$$

利用两点间距离公式, 得

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + 3^2 = x^2 + (y+2)^2 + 2^2, \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + 3^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2, \end{cases}$$

整理, 得方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ x + 2y = 2, \end{cases}$$

解方程组, 得  $x=0, y=1$ , 所以所求点为  $P(0, 1, 0)$ .

**例 2** 试证以  $A(4, 0, 3), B(1, 1, 2), C(0, 1, 5)$  为顶点的三角形为直角三角形.

**证** 因为

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(4-1)^2 + (0-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{11}, \\ |BC| &= \sqrt{(0-1)^2 + (1-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}, \\ |AC| &= \sqrt{(0-4)^2 + (1-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{21}, \end{aligned}$$

所以

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2,$$

即 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

### 习题 7-1

1. 在直角坐标系中,若点 $M(x, y, z)$ 的三个坐标 $x, y, z$ 中有一个为零,这个点在何处?若有两个为零,这个点又在何处?
2. 求点 $M(x, y, z)$ 关于各坐标轴、各坐标平面及坐标原点的对称点坐标.
3. 过点 $A(a_0, b_0, c_0)$ 分别作各坐标平面、坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.
4. 在 $x$ 轴上求与点 $A(5, 1, -7)$ 和 $B(2, 4, 1)$ 距离相等的点.
5. 求点 $A(5, 2, 4)$ 到坐标原点及各坐标轴的距离.
6. 试证明以三点 $A(4, 1, 9), B(10, -1, 6), C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

## 第二节 向量及其线性运算

### 一、向量的概念

**定义** 既有大小又有方向的量称为向量.

在几何上,向量可用有向线段来表示.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.用符号 $\overrightarrow{AB}$ 表示以 $A$ 为起点、以 $B$ 为终点的向量.有时也用一个黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 或用一个上面加箭头的字母 $\vec{a}$ 来表示向量.

向量的大小称为向量的模(或长度),记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|, |\vec{a}|$ .模等于1的向量称为单位向量.模等于0的向量称为零向量,记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$ .零向量的方向可看作是任意的.以坐标原点 $O$ 为起点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 $M$ 对于点 $O$ 的向径(或矢径),常用黑体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示.

在数学上只研究与起点无关的向量(自由向量).不管起点如何,凡是方向、长度相同的向量都是相等的.即若 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ ,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ .

如果两个向量大小相等,方向相反,则称其中一个为另一个的反向量. $\boldsymbol{a}$ 的反向量记作 $-\boldsymbol{a}$ .

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,把它们的起点平移到同一点 $O$ ,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\varphi$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 7-5),并限定 $0 \leq \varphi \leq \pi$ ,记作 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}})$ ,即 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \varphi$ .

如果 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 0$ 或 $\pi$ ,就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ .如果 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{\pi}{2}$ ,就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,记作 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ .规定零向量和任何向量都平行,也和任何向量都垂直.

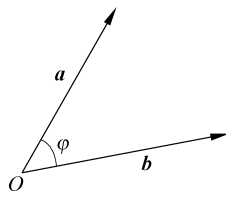


图 7-5

### 二、向量的线性运算

#### 1. 向量的加减法

在物理学中,作用于一点的两个力的合力可以用“平行四边形法则”表示出来,两次位移

的合成一般用“三角形法则”. 数学上, 向量的加法运算也是按照“平行四边形法则”或“三角形法则”进行的:

(1) 平行四边形法则. 将向量  $a, b$  的起点移至同一点  $O$ , 以  $a, b$  为邻边的平行四边形的对角线  $\overrightarrow{OC}$  表示向量  $a$  与  $b$  的和(图 7-6), 记为  $a+b$ .

(2) 三角形法则. 将  $b$  的起点移至  $a$  的终点, 从  $a$  的起点到  $b$  的终点所引的向量就是  $a+b$ (图 7-7).

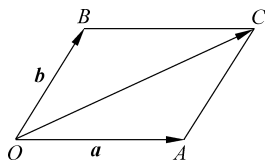


图 7-6

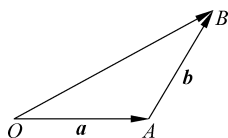


图 7-7

如果  $a, b$  在同一直线上, 规定如下: 若  $a, b$  同向, 则  $a+b$  的方向与原来的两个向量方向相同, 模等于  $|a|+|b|$ ; 若  $a, b$  方向相反, 则  $a+b$  的方向与  $a, b$  中模较大的向量方向相同, 且  $|a+b|=||a|-|b||$ .

由定义容易验证向量的加法符合如下运算规律:

- (1) 交换律  $a+b=b+a$ ;
- (2) 结合律  $(a+b)+c=a+(b+c)$ ;
- (3)  $a+0=0+a=a$ ;
- (4)  $a+(-a)=(-a)+a=0$ .

我们规定两个向量  $a$  与  $b$  的差为:  $a-b=a+(-b)$ .

向量的减法可看作向量加法的逆运算, 即若  $a+b=c$ , 则  $a=c-b$ .

## 2. 向量与数的乘法(数乘)

设  $k$  是一个实数, 向量  $a$  与  $k$  的乘积记作  $ka$ , 规定如下:  $ka$  表示一个向量;  $ka$  的模等于  $k$  的绝对值与向量  $a$  的模的乘积, 即  $|ka|=|k||a|$ ; 若  $k>0$ ,  $ka$  与  $a$  同向; 若  $k<0$ ,  $ka$  与  $a$  反向; 若  $k=0$ ,  $ka=0$ .

特别地, 若  $k=-1$ , 有  $(-1)a=-a$ ; 若  $a=0$ , 则对任意实数  $k$  都有  $ka=0$ .

数乘向量满足如下运算规律( $k, l$  为实数):

- (1) 结合律  $k(la)=l(ka)=(kl)a$ .
- (2) 分配律  $(k+l)a=ka+la$ ;  
 $k(a+b)=ka+kb$ .

方向相同或相反的向量称为共线向量, 平行于同一平面的向量称为共面向量. 易证如下结论:

- (1) 两个非零向量  $a, b$  共线(平行), 当且仅当存在  $k \neq 0$ , 使  $a=kb$ .
- (2) 三个非零向量  $a, b, c$  共面, 当且仅当存在不全为零的数  $k, l$ , 使  $a=kb+lc$ .

设  $a^\circ$  是与非零向量  $a$  同向的单位向量, 则  $a$  可以表示为  $a=|a|a^\circ$ . 因  $|a| \neq 0$ , 故有

$$\frac{a}{|a|}=a^\circ,$$

即非零向量乘以其模的倒数得到一个与原向量同方向的单位向量.

### 三、向量的坐标

#### 1. 向量的坐标和坐标分解式

为了利用数量来研究向量,必须建立向量与有序数组之间的对应关系.

给定向量  $\boldsymbol{a}$ , 将其作平行移动, 使其起始点位于原点  $O$ , 设此时  $\boldsymbol{a}$  的终点为  $M$ , 即  $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM}$  (图 7-8). 设点  $M$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 显然,  $(x, y, z)$  与向量  $\boldsymbol{a}$  是一一对应的, 则将  $(x, y, z)$  称为向量  $\boldsymbol{a}$  的坐标, 记为

$$\boldsymbol{a} = (x, y, z).$$

设  $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ , 以  $OM$  为对角线、三条坐标轴为棱作长方体  $RHMK-OPNQ$ , 如图 7-8 所示, 则由向量的加法得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.\end{aligned}$$

用  $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$  分别表示  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上指向正向的单位向量, 并称它们为坐标系的基本单位向量. 因为点  $M$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 故由向量与数的乘法知

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k},$$

如此可得

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

上式右端称为向量  $\boldsymbol{a}$  的坐标分解式, 其中向量  $x\boldsymbol{i}, y\boldsymbol{j}, z\boldsymbol{k}$  分别叫作向量  $\boldsymbol{a}$  在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上的分向量.

有了向量的坐标分解式, 就可把向量的线性运算用向量的坐标表示, 也就是能够把向量间的线性运算转化为数量间的代数运算. 设  $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 即

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},$$

则利用向量加法的交换律和结合律以及向量与数的乘法的结合律与分配律, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \pm (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\ &= (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k} \\ &= (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a} &= \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k} \\ &= (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z), \quad \lambda \text{ 为实数.}\end{aligned}$$

也即

$$\begin{aligned}(a_x, a_y, a_z) \pm (b_x, b_y, b_z) &= (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z), \\ \lambda(a_x, a_y, a_z) &= (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z),\end{aligned}$$

由此可知, 对向量进行加、减、数乘运算, 只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算.

**例 1** 已知  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ , 求向量  $\overrightarrow{M_1M_2}$  的坐标.

**解** 将  $M_1, M_2$  分别与坐标原点连线, 则由向量的加法有

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2},$$

即

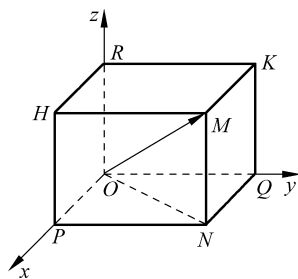


图 7-8

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1},$$

而

$$\overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1, z_1), \quad \overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2, z_2),$$

所以

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

**注** 上述结果以后当作结论使用,  $\overrightarrow{M_1M_2}$  的坐标就是终点坐标减去始点坐标.

**例 2** 已知  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ , 求线段  $M_1M_2$  的中点  $M$  的坐标.

**解** 设  $M$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 则由两向量相等的定义知

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{MM_2},$$

运用例 1 的结果得

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z),$$

由坐标的唯一性有

$$x - x_1 = x_2 - x, \quad y - y_1 = y_2 - y, \quad z - z_1 = z_2 - z,$$

即得

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

此为 midpoint 坐标公式, 也就是  $M$  的坐标为  $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ .

**例 3** 证明: 两个非零向量平行当且仅当这两个向量的对应坐标分量成比例.

**证** 设两个非零向量分别为  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则由向量与数的乘法知

$$\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow \text{存在 } k \neq 0, \text{ 使 } \mathbf{a} = k\mathbf{b} \Leftrightarrow (a_x, a_y, a_z) = k(b_x, b_y, b_z) \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k.$$

## 2. 向量的坐标表示

利用向量的坐标可以给出向量的模及方向的表达式.

(1) 向量的模的坐标表示. 设向量  $\mathbf{a} = (x, y, z)$ , 将其作平行移动, 使其始点位于原点  $O$ , 设此时  $\mathbf{a}$  的终点为  $M$ , 即  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM}$ , 则点  $M$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 又  $O$  点的坐标为  $(0, 0, 0)$ , 故由两点间的距离公式得

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(2) 向量的方向坐标表示. 设向量  $\mathbf{a}$  与三条坐标轴的正向的夹角分别为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 称它们为向量  $\mathbf{a}$  的方向角 ( $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$ ), 方向角的余弦  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  称为向量  $\mathbf{a}$  的方向余弦. 易知, 向量  $\mathbf{a}$  的方向由其方向角或方向余弦决定.

如图 7-9 所示, 设  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ , 由于  $MP \perp OP$ , 所以点  $P$  在  $x$  轴上的坐标为  $x$ , 且

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{x}{|\mathbf{a}|},$$

类似地, 有

$$\cos \beta = \frac{y}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{y}{|\mathbf{a}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{z}{|\mathbf{a}|},$$

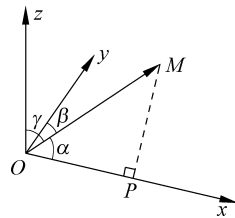


图 7-9

即

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

把上面三个等式平方后再相加,得

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

这说明任一向量的方向余弦的平方和等于 1.

利用方向余弦公式,与非零向量  $\mathbf{a}$  同向的单位向量  $\mathbf{a}^\circ$  可表示为

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}(x, y, z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

即单位向量的坐标恰为它的方向余弦.

**例 4** 设点  $A$  位于第一卦限, 向量  $\overrightarrow{OA}$  与  $x$  轴、 $y$  轴的夹角依次为  $\frac{\pi}{3}$  和  $\frac{\pi}{4}$ , 且  $|\overrightarrow{OA}| = 6$ , 求点  $A$  的坐标.

**解**  $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$ , 由  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$  得

$$\cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

因为点  $A$  位于第一卦限, 所以  $\cos\gamma > 0$ , 故

$$\cos\gamma = \frac{1}{2},$$

设与  $\overrightarrow{OA}$  同向的单位向量为  $\overrightarrow{OA}^\circ$ , 于是

$$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \overrightarrow{OA}^\circ = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3),$$

这就是点  $A$  的坐标.

### 3. 向量在轴上的投影

已知空间中一点  $A$  和轴  $u$ , 过  $A$  作垂直于轴  $u$  的平面  $\alpha$ , 平面  $\alpha$  与轴  $u$  的交点  $A'$  称为点  $A$  在轴  $u$  上的投影(图 7-10).

设向量  $\overrightarrow{AB}$  的起点  $A$  和终点  $B$  在轴上的投影分别为  $A'$  和  $B'$ , 则称轴  $u$  上有向线段  $\overrightarrow{A'B'}$  的值(记作  $A'B'$ )为向量  $\overrightarrow{AB}$  在轴  $u$  上的投影(图 7-11), 记作  $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B'$ . 轴  $u$  称为投影轴.

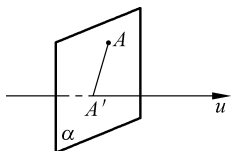


图 7-10

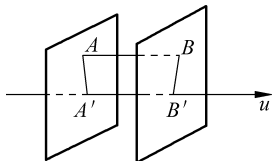


图 7-11

轴  $u$  上有向线段  $\overrightarrow{A'B'}$  的值定义为: 若  $\overrightarrow{A'B'}$  与轴  $u$  的正向同向, 则  $A'B' = |\overrightarrow{A'B'}|$ ; 若  $\overrightarrow{A'B'}$  与轴  $u$  的正向反向, 则  $A'B' = -|\overrightarrow{A'B'}|$ .

由上述定义可知, 向量  $\mathbf{a}$  在直角坐标系  $Oxyz$  中的坐标  $a_x, a_y, a_z$  就是  $\mathbf{a}$  在三条坐标

轴上的投影,即

$$a_x = \text{Prj}_x \mathbf{a}, \quad a_y = \text{Prj}_y \mathbf{a}, \quad a_z = \text{Prj}_z \mathbf{a}.$$

由此可知,向量的投影具有与坐标相同的性质:

**性质 1 (投影定理)** 设  $\overrightarrow{AB}$  与轴  $u$  的夹角为  $\varphi$ , 则  $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi$ .

**性质 2**  $\text{Prj}_u (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{Prj}_u \mathbf{a} + \text{Prj}_u \mathbf{b}$ .

**性质 3**  $\text{Prj}_u (\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{Prj}_u \mathbf{a}$ .

下面只证明性质 1.

**证** 如图 7-12 所示,过点  $A$  引一条与轴  $u$  同向的轴  $u'$ , 则  $\overrightarrow{AB}$  与轴  $u'$  的夹角等于  $\overrightarrow{AB}$  与轴  $u$  的夹角, 而且

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \text{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB}.$$

设点  $B$  在轴  $u'$  上的投影为  $B''$ , 则

$$\text{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB} = AB'' = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi,$$

所以

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi. \quad \square$$

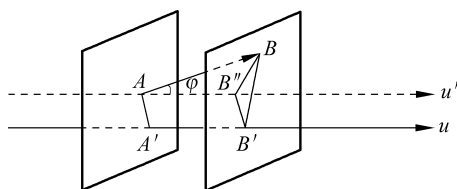


图 7-12

向量的投影是个标量. 由性质 1 可知, 当  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$  时投影为正, 当  $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$  时投影为负, 当  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  时投影为零. 相等的向量在同一条轴上的投影相等.

### 习题 7-2

1. 设  $D$  是  $\triangle ABC$  的边  $BC$  的中点, 证明  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .
2. 用向量证明: 如果平面上四边形的对角线相互平分, 则该四边形为平行四边形.
3. 求点  $A(1, -3, 2)$  关于点  $(1, 0, 1)$  的对称点.
4. 求平行于向量  $\mathbf{a} = (2, 4, 1)$  的单位向量.
5. 求向量  $\mathbf{a} = (3, -5, 4)$  的方向余弦.
6. 已知某向量的起点在  $x$  轴上, 终点是  $P(0, 1, 2)$ , 且向量与  $x$  轴正向的夹角为  $30^\circ$ , 求该向量的模及方向余弦.
7. 某向量与三个坐标轴的夹角成比例  $1 : 2 : 3$ , 求向量的方向角.
8. 设已知两点  $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$  和  $M_2(3, 0, 2)$ , 计算向量  $\overrightarrow{M_1M_2}$  的模、方向余弦和方向角.
9. 设向量的方向余弦分别满足:
  - (1)  $\cos \alpha = 0$ ;      (2)  $\cos \beta = 1$ ;      (3)  $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ .
 这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?
10. 设向量  $\mathbf{r}$  的模是 4, 它与轴  $u$  的夹角为  $60^\circ$ , 求  $\mathbf{r}$  在轴  $u$  上的投影.
11. 一向量的终点为  $M(1, 4, 3)$ , 在三个坐标轴上的投影分别为 2, 1, 5, 求该向量的起点坐标.

### 第三节 向量的乘法运算

#### 一、两向量的数量积

由物理学知道,一个物体在常力  $\boldsymbol{F}$  作用下沿直线从点  $M_1$  移动到点  $M_2$ ,用  $\boldsymbol{s}$  表示位移  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,则力  $\boldsymbol{F}$  所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}| |\boldsymbol{s}| \cos\theta,$$

其中  $\theta$  为  $\boldsymbol{F}$  和  $\boldsymbol{s}$  的夹角(图 7-13).

功是标量,大小由向量  $\boldsymbol{F}$ ,  $\boldsymbol{s}$  的模及它们的夹角唯一确定. 在其他问题中也会遇到类似的运算.

**定义 1** 两个向量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  的模与它们夹角的余弦的乘积称为这两个向量的数量积,记作  $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ,即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}).$$

数量积又称为数积、内积、点积.

由上述定义,常力  $\boldsymbol{F}$  所做的功  $W$  等于力  $\boldsymbol{F}$  和位移  $\boldsymbol{s}$  的数量积,即  $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$ .

由投影定理知道,  $|\boldsymbol{b}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$  表示向量  $\boldsymbol{b}$  在与向量  $\boldsymbol{a}$  同方向的轴上的投影,用  $\text{Prj}_a \boldsymbol{b}$  表示. 于是有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \text{Prj}_a \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \text{Prj}_b \boldsymbol{a}.$$

由数量积的定义可知:

$$(1) \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2;$$

$$(2) \text{两个非零向量 } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ 垂直的充要条件是 } \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0.$$

按照规定,零向量与任何向量垂直,于是(2)对零向量也成立.

数量积满足如下运算规律:

$$(1) \text{交换律 } \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a};$$

$$(2) \text{分配律 } (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c};$$

$$(3) \text{与数乘的结合律 } \boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}), \lambda \text{ 是常数.}$$

下面推导数量积的坐标表示式.

设  $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$ ,  $\boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}$ , 由数量积的运算规律得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \cdot (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) \\ &= a_x \boldsymbol{i} \cdot (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) + a_y \boldsymbol{j} \cdot (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) + \\ &\quad a_z \boldsymbol{k} \cdot (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) \\ &= a_x b_x \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + a_x b_y \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} + a_x b_z \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} + a_y b_x \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} + a_y b_y \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} + \\ &\quad a_y b_z \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} + a_z b_x \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} + a_z b_y \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} + a_z b_z \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}, \end{aligned}$$

由于  $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$  互相垂直,且为单位向量,所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0, \quad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1, \end{aligned}$$

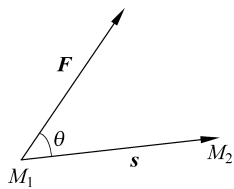


图 7-13