

第3章

CHAPTER 3

近代数学成就及其思想方法



从 17 世纪初到 19 世纪末近三百年的时间属于数学史的近代期,这一时期数学发展迅速,实现了由常量数学到变量数学的转变。本章列举近代数学的若干重大成就,并分析其数学思想方法。

3.1 解析几何

3.1.1 解析几何的创立

14 至 16 世纪的欧洲文艺复兴运动促进了思想解放、科技发展和生产力发展。16 至 17 世纪,随着生产和科技的发展,航海、力学、天文学等领域提出大量需要解决的数学问题,其中一大类问题与各类曲线、曲面有关。例如,德国天文学家开普勒(J. Kepler)用椭圆曲线描述行星绕日运动的轨道,意大利天文学家、物理学家伽利略(G. Galilei)用望远镜进行天文观测而涉及透镜曲面的研究。他们都采用数学方法研究这些实际问题,显示了数学中曲线和曲面理论的应用价值与进一步研究的必要性,同时也打破了古希腊数学重理论、轻应用的传统。另外,在数学领域内部,法国数学家韦达(F. Viète)等系统地引入符号,建立了符号代数,为新的数学分支——解析几何的诞生做了必要准备。

17 世纪初,法国数学家笛卡儿(R. Descartes)和费马(P. Fermat)等首先认识到用“变动的观点”来研究曲线的必要性。1637 年,笛卡儿在总结此前一些新思想的基础上进行了创造性工作,出版了《几何学》一书,宣告了解析几何的诞生,也标志着近代数学的开端。费马也是解析几何的创始人之一,只不过他于 1629 年写的关于解析几何的专著《平面和立体的轨迹引论》直到 1679 年才发表,因此笛卡儿著作的影响更大,一般认为解析几何为笛卡儿首创。

笛卡儿和费马的原始工作中存在不完善的地方,如其理论中没有负数的概念(负数的概念 17 世纪才引入欧洲,19 世纪才得到最终认可),也没有 y 轴,从而没

有负的横坐标和纵坐标,所以坐标系是局部的,不是直角坐标系。此外,论著的表述也不够清晰。

解析几何创立后,经许多数学家的逐步改进,最后由瑞士数学家欧拉(L. Euler)于1748年在他的著作《无穷小分析引论》中给出现代形式的解析几何的系统描述。其后,法国数学家蒙日(G. Monge)和他的学生对欧拉的工作进行了重要补充,丰富了平面解析几何的基本内容。1788年,法国数学家拉格朗日(J. L. Lagrange)提出向量的概念,之后,英国数学家吉布斯(J. W. Gibbs)和海维赛德(O. Heaviside)创立向量代数,向量成为空间解析几何的重要研究工具。

3.1.2 解析几何创立的重大意义

解析几何的创立在数学史上具有划时代的意义。

(1) 开创不同数学分支相结合的思想,使几何与代数相结合。首先,在西方数学中,如下保守的观念在相当长的一个时期处于统治地位:①在古希腊数学中,几何至高无上,一切数学问题都要用几何方法去解决;②几何与代数各自发展、互相分离或只有局部关联。解析几何的创立与发展打破了西方数学几何化的传统观念,实现了思想解放。其次,解析几何开创了用代数方法解决几何问题的新途径,实现了几何与代数的实质性结合,这是思想观念上的一次革命,且这一结合也有利于双方的发展。事实上,几何对象可以用代数式表达,几何的研究目标可以通过代数达到;反过来,几何不仅为抽象的代数式和方程提供形象而直观的模式,而且几何思想方法向代数渗透也促进了代数学研究的深入和发展。例如,线性代数中的“线性”与“空间”的概念并不是代数学本身固有的,而是来自几何语言并赋予了新的含义。

(2) 开创变量数学,是初等数学到高等数学的转折点。初等数学所考虑的对象都是常量,解析几何通过引进坐标系这一具有普遍意义的方法,用代数方程来描绘几何曲线,解决了一系列复杂问题。笛卡儿提出了“变量”的概念,把方程中用字母表示的未知量看成变化的量(变量),把原来静态的曲线视为物体运动的轨道(动点的轨迹),体现了动态的思想。例如,对 xOy 平面上的抛物线 $y=ax-bx^2$ (其中 a 、 b 为正常数),若把 x 、 y 替换为 t 、 s ,可以改写成 $s=v_0t-\frac{1}{2}ct^2$,若把 t 看作时间, s 看作物体运动的路程,它就是物体运动的轨道(把 a 改写为 v_0 ,代表初始速度, $c=2b$ 代表加速度)。同时,变量 s 与 t 有依赖关系,如果 t 的值发生变化,则 s 的值也随之而变化,这里就包含了变量和函数的思想,这是新的思想方法。恩格斯对此作了高度评价:“数学的转折点是笛卡儿的变数,有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学。”

解析几何为微积分的创立奠定了基础,变量和函数成为微积分的主要研究对

象,而后衍生出众多变量数学(复变函数论、微分方程、变分学等),开辟了17到19世纪以变量数学为中心的数学时代,因此解析几何是数学史从初等数学时期发展为高等数学时期的转折点。

(3)对近代和现代数学的发展产生了深远影响。解析几何在思想方法上具有显著优点,因而被迅速地应用到各个科学领域,它拓宽了数学研究的范围,加强了数学与其他学科的相互结合和联系。解析几何对近代和现代数学的发展产生了深远影响,列举如下。

①解析几何为微积分的创立奠定了基础。

②平面解析几何到三维空间解析几何的推广,是二维向量空间到三维向量空间几何学的发展,启示了 n 维空间及无穷维的泛函空间及相应几何理论的建立。

③解析几何为后来产生的代数几何和微分几何学提供了前期准备。

④向量代数和随后发展的向量分析在物理学上有重要应用。

⑤解析几何在当今也为几何定理的机器证明提供了启示。

⑥解析几何是近代数学统一化的第一次尝试,促进了数学理论的发展及其应用,对19至20世纪出现的数学统一化思想的形成产生了深远影响。

3.1.3 解析几何的思想方法

1. 数形结合思想

解析几何是用代数方法研究几何问题的数学分支。在这之前,代数与几何是相互独立的,或至多是形式上的互相借用,这个特点在西方数学中很明显。但在中国古代数学中,数形结合较密切,但与解析几何比起来,只能算是简单的结合。在解析几何中,代数与几何的结合是有机结合,笛卡儿提出的坐标法体现了解析几何的数形结合思想,具体如下。

(1)通过坐标系建立几何点与实数(组)的对应关系。

通过数轴将直线上的点与实数建立一一对应关系;通过平面(空间)坐标系将平面(空间)的点与由实数组成的有序数组之间建立一一对应关系。

(2)通过坐标系建立几何图形与代数方程的对应关系。

在平面坐标系中将平面曲线与带有2个未知数的代数方程建立对应关系;在空间坐标系中将曲线(包含直线)、曲面(包含平面)与带有3个未知数的代数方程建立对应关系。曲线、曲面可以用代数方程来表示,反之,一个代数方程也表示某一曲线、曲面。

思想(1)是思想(2)的基础,思想(2)是思想(1)的发展,有了这个发展,才有可能用代数方法研究几何问题。基于这两个数学思想,还可以进一步形成变量与动点、函数与运动曲线对应的思想。

2. 化归思想

化归是把未知问题转化、归结为已知问题,把待解决问题转化、归结为已解决问题,从而解决原问题的思想方法。形与数之间的可转化性提供了解决数学问题的一种化归途径,解析几何巧妙地将几何问题化归为代数问题。

3. 一般化方法

解析几何创立以前,解决每一个数学问题都要用特定的方法去个别处理,在许多情况下需要高度的技巧,而解析几何用“统一的语言”来表述对象,把几何问题转化为代数问题,这样就可以通过标准化的代数方法解决几何问题,从而为解决几何问题提供一种一般化的方法。这种一般化方法更具优势的是:能求出具有某种性质的曲线或曲面,能解决各种轨迹问题,可以通过方程对曲线、曲面进行归类。例如,虽然古希腊数学家阿波罗尼奥斯(Apollonius)对圆锥曲线有过系统研究,但把各种圆锥曲线统一处理并发展成一般二次曲线统一理论则是应用了解析几何的方法才得以实现的。

例 3-1 如图 3-1(a) 所示,在 $\triangle OAB$ 中, $OA \perp OB$, $OA = \sqrt{3}$, $OB = 1$, $AC = 2CB$,求 OC 的长。

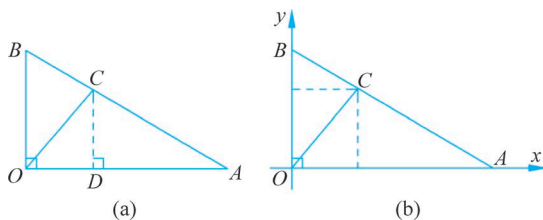


图 3-1 例 3-1 图示

解 1 如图 3-1(a),作 $CD \perp OA$ 交 OA 于点 D 。

因为 $OA \perp OB$

$$\text{所以 } AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

因为 $AC = 2CB$, $AC + CB = AB$

$$\text{所以 } AC = \frac{2}{3}AB = \frac{4}{3}$$

因为 $CD \perp OA$, $OA \perp OB$

所以 $\triangle ACD \sim \triangle ABO$

$$\text{所以 } \frac{AD}{AO} = \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BO}$$

$$\text{所以 } AD = \frac{AC}{AB} \times AO = \frac{2\sqrt{3}}{3}, CD = \frac{AC}{AB} \times BO = \frac{2}{3}$$

$$\text{所以 } OD = OA - AD = \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{所以 } OC = \sqrt{OD^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

解 2 如图 3-1(b) 所示, 以 O 点为原点建立平面直角坐标系 xOy , 由已知条件, 易知图中 C 点的坐标为: $C\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 由于 O 点的坐标为 $O(0,0)$, 故由平面直角坐标系中任意两点的距离公式可得 O 点与 C 点之间的距离 (记为 $|OC|$) 为

$$|OC| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

在此例中, 解 1 采用平面几何方法求解, 解 2 采用解析几何方法求解, 与平面几何方法相比, 解析几何方法的求解过程更简洁。由解题过程可见, 解析几何其实就是“建系法”, 建立坐标系并得到各点坐标后, 可以利用已有公式, 通过计算解决问题。

例 3-2 已知圆 $C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$, 圆 $C_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$, M 和 N 分别是圆 C_1 和 C_2 上的动点, P 是 x 轴上的动点, 求 $|PM| + |PN|$ 的最小值。

分析 如图 3-2(a) 所示。

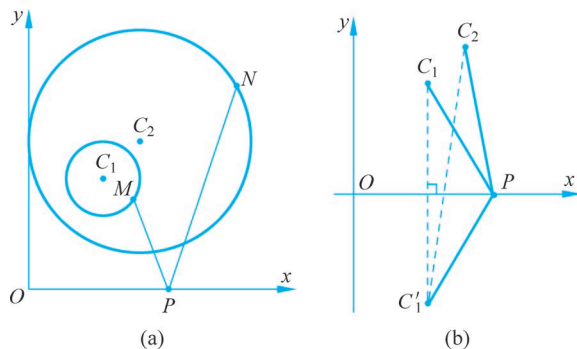


图 3-2 例 3-2 图示

(1) 图中有 3 个动点 P 、 M 、 N , 由于点 M 和 N 互不影响, 相互独立, 所以有

$$\min(|PM| + |PN|) = \min(|PM|) + \min(|PN|)$$

(2) 先假定固定点 P , 则 $\min(|PM|) = |PC_1| - 1$, $\min(|PN|) = |PC_2| - 3$, 由于圆心 C_1 和 C_2 是固定的, 最小距离的具体数值仅由点 P 决定。

(3) 再考虑点 P 为动点, 则原来的关于三个动点 P 、 M 、 N 的问题转化为关于一个动点 P 的问题。

解 如图 3-2(a)所示,对于 x 轴上的某一点 P ,有

$$|PM| \geq |PC_1| - 1$$

$$|PN| \geq |PC_2| - 3$$

因此

$$|PM| + |PN| \geq |PC_1| + |PC_2| - 4$$

问题转化为求 x 轴上的动点 P 使得 $|PC_1| + |PC_2|$ 最小。

如图 3-2(b)所示,圆心 C_1 关于 x 轴的镜像对称点 C'_1 的坐标为 $(2, -3)$,且有 $|PC_1| = |PC'_1|$,因此求 $|PC_1| + |PC_2|$ 的最小值即求 $|PC'_1| + |PC_2|$ 的最小值,而根据“两点之间直线段最短”,可知连接点 C'_1 和 C_2 的直线段的长度 $|C'_1C_2|$ 就是所求的最小值,即

$$|PC_1| + |PC_2| \geq |C'_1C_2| = \sqrt{(3-2)^2 + (4-(-3))^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

于是

$$\min(|PM| + |PN|) = 5\sqrt{2} - 4$$

3.2 微积分

3.2.1 微积分的创立

微积分是微分学和积分学的总称,是研究连续变量的数学理论。

16 世纪的欧洲处于资本主义萌芽时期,生产力得到极大发展,生产和科学技术中遇到大量问题,只用初等数学的方法已无法解决,要求数学突破只研究常量的传统范围,寻找能够描述和研究运动、变化过程的新数学工具,这是促进无限和极限思想发展、建立微积分的历史背景。

在 16 和 17 世纪,各科学领域所提出的数学问题的共性是研究变量及其相互关系,这是 16 和 17 世纪数学研究的中心课题,因此近代期的高等数学又称为变量数学。在这些问题中,与物体运动变化有关的问题有:

- (1) 非匀速运动物体轨迹的数学描述,如抛射体的运动轨迹;
- (2) 变速运动物体的速度、加速度和路程的求解,如已知变速运动物体在某段时间内经过的路程,求物体在任意时刻的速度和加速度,或由速度或加速度求路程;
- (3) 求曲线在任一点的切线,如求运动体在其轨迹上任一点的运动方向;
- (4) 求变量的极值,如求抛射体的最大射程、最大高度等;
- (5) 计算曲线的长度、曲边形的面积、曲面体的体积、物体的重心等。

这几大类问题中,一部分是“积分问题”,如问题(2)的“由速度或加速度求路程”、问题(5)。积分问题就是求总量,尤指求非均匀变化量的总量。围绕着“求积

问题”酝酿了积分思想,形成了一系列的“求积术”。在几何方面,是求曲线的长度、曲线包围的平面区域的面积、曲面包围的空间立体的体积;在力学方面,是求非匀速运动物体经过的路程、物体的重心、液体的压力等。另一部分问题是“微分问题”,如问题(2)的“求物体在任意时刻的速度和加速度”、问题(3)。微分问题就是求变化率,尤指求非均匀变化量的变化率。微分思想的酝酿主要围绕着求曲线的切线问题展开。笛卡儿用“重根法”、费马借助微小增量、英国数学家巴罗(I. Barrow)等利用“特征三角形”方法分别求出曲线的切线,形成了许多“切线术”。

以上数学家的工作为微积分的创立奠定了基础,但他们的工作是局部的、具体的、分散的,许多基本概念有待明确,更重要的是,要把对个别例子适用的具体方法提炼成普遍的、一般化的方法,同时要建立“求积术”与“切线术”之间的联系,形成一般理论,这项关键性工作最后由英国物理学家、数学家牛顿(I. Newton)和德国哲学家、数学家莱布尼兹(G. W. Leibniz)分别独立地完成。牛顿称微积分为“流数术”,莱布尼兹则分别用“求差计算”和“求和计算”分别表示微分法和积分法。牛顿以运动学为原型来研究问题,《流数法》等著作写于1669—1676年,但发表时间为1704—1736年;莱布尼兹从几何学的角度来研究问题,著作《数学笔记》等完成于1673—1676年,发表于1684—1686年,在历史上曾有微积分发明权之争,最终人们公认两人同为微积分的创始人。

3.2.2 微积分概要

若以牛顿和莱布尼兹的工作为标志,微积分产生于17世纪70年代,经过18世纪的研究讨论,于19世纪下半叶经“分析学的严密化运动”改造,才定型为今天的形式。

微积分的主要研究对象是函数 $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$ 的变化规律,尤指非均匀函数的变化规律。例如,研究变速运动物体的位移变化规律、研究非均匀物质细棒的质量变化规律。微积分从两个角度展开研究:一个是微观角度,另一个是宏观角度。在微观角度,研究函数的变化快慢,即变化率;在宏观角度,研究函数值的变化大小,即改变量。

现以非匀速运动为例来说明微积分的研究方法和理论成果。

已知运动路程 s 和时间 t 的关系 $s=s(t)$,要求任意时刻 t 的瞬时速度,那么考虑在时间段 $(t_0, t_0 + \Delta t)$ 内走过的路程 Δs 的平均速度,即 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$,当时间增量 Δt 无限缩小时,这个比率就近似等于时刻 t_0 的瞬时速度,在数学上把它看成 s 对于 t 的微商(现称之为导数),并记作 $\frac{ds}{dt}$ 。进一步,若把这里的时间 t 与路程 s 推广到两个一

般的相互依赖的变量 x 与 y , 就得到 y 对 x 的变化率, 即微商 $\frac{dy}{dx}$ 的一般定义。

自变量 x 的改变量 Δx 称为 x 的微分, 记作 dx , 即 $dx = \Delta x$; 把乘积 $\frac{dy}{dx} \cdot \Delta x$ 称为变量 y 的微分, 记作 dy , 根据莱布尼兹的符号设计, 刚好有 $dy = \frac{dy}{dx} dx$, 这与把 dx 与 dy 看成一般的数(分母不为零)时的运算法则一样。求微商或微分的运算称为微分运算。

在历史上, 牛顿和莱布尼兹都从“无穷小”概念出发, 再用它来定义极限与微商, 但由于无法把无穷小的概念解释清楚而陷入了逻辑混乱。

牛顿和莱布尼兹都得出结论: 积分是微分的逆运算。牛顿认为: 积分就是由变量已知的变化率求变量本身的方法, 这就是现在所说的不定积分问题(已知函数的导数去求原函数)。在上述变速运动的例子中, 若已知瞬时速度与时间的关系, 积分就是求从某个时刻 t_0 到任意时刻 t 所走过的路程。这个问题相当于已知速度与时间的关系曲线 L , 求 L 下方的曲边梯形的面积。积分是微分的逆运算的另一解释是莱布尼兹提出的, 他说的积分是指定积分, 其解释相当于现在用微元法求面积的思路: 对一个量进行微分, 相当于把这个量无限细分、化整为零, 积分则恰好相反, 是将无限多个微分进行累积、积零为整, 二者恰好是相反的过程。

积分与微分的互逆关系表示为

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x), \quad d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$\int F'(x) dx = F(x) + C, \quad \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

在被积函数连续的情况下, 上面几个公式等价, 统称为“牛顿-莱布尼兹公式”, 现在的数学教材通常把牛顿-莱布尼兹公式表述为最后一个式子。

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数; 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

牛顿-莱布尼兹公式揭示了微分法与积分法的关系, 故被称为“微积分的基本定理”。

牛顿、莱布尼兹在建立微积分理论时在数学思想方法上的异同点如表 3-1 所示。

表 3-1 牛顿、莱布尼兹在微积分思想方法上的异同点

| 相 同 点 | 不 同 点 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 都把个别的、具体的、零散的研究进行概括提高,把微积分建立在一般问题和符号运算的基础上,使微积分成为能解决一般问题的普遍方法 | 所使用的术语、记号不同。当 x 是 t 的函数时,牛顿把 x 的导数表示为 \dot{x} ,采用这种记号者被称为“点派”;莱布尼兹则用 dx 和 dt 表示微分,用 $\frac{dx}{dt}$ 表示导数,采用这种记号者被称为“d 派”。莱布尼兹设计的微积分数学符号被更广泛地使用 |
| 都发现了前人没发现的“微分与积分之间存在互逆关系”,从而建立起微积分基本定理,并得出牛顿-莱布尼兹公式,不过他们都没有给出证明。 | 在微积分理论完善和应用方面,牛顿较多地研究微积分在各领域的实际应用,而莱布尼兹则注重系统地建立微积分运算的法则和公式 |
| 都把微分学建立在对“无穷小”运算的基础上,先有微分(牛顿称之为“瞬”)的概念,然后再定义微商,在做具体运算时,无穷小时而非零,时而又等于零,所以都遇到了困难,受到广泛批评。他们创立的微积分和现今的微积分不同,不是从“极限”理论出发,而是从概念不清的“无穷小”出发,这是一个严重的缺陷 | 实际问题原型不同。牛顿从力学角度出发,以物体运动速度为模型来建立微分学,运动的观点明确;莱布尼兹利用“特征三角形”(或称“微分三角形”),以曲线的切线为模型来建立微积分,几何特征明显。牛顿以流数(导数)为基础,即以求导运算及其逆运算来解决各种问题,侧重于研究不定积分运算,莱布尼兹从微分出发,把独立的微分 dx 、 dy 看成基本量,把导数定义为两个微分的商 $\frac{dy}{dx}$,称之为微商,把求积(定积分)看作对无穷小量求和,侧重于研究定积分运算 |

3.2.3 微积分创立的重大意义

微积分的创立是 17 世纪数学最重要的成果,对数学的发展影响深远、意义重大。

(1) 分析学成为数学的主要分支。有学者认为,17、18 世纪的数学史几乎全部是微积分的历史,当时绝大部分数学家都被这新兴的、有无限发展前途的学科所吸引,在这方面作出重要贡献的,首先是伯努利家族、欧拉和拉格朗日等,在 17~18 世纪数学家们工作的基础上,19 世纪产生复变函数论,20 世纪产生实变函数论、泛函分析等,形成一个庞大的分析学体系。

分析学是以微积分为基本工具,以函数、映射、关系等为主要研究对象,以极限理论为基础的众多数学经典分支及其现代拓展的统称,简称分析,包括数学分析、微分方程、变分法、复变函数论、实变函数论、泛函分析等。

分析学在内容、思想方法及应用范围上迅速占据了数学的主导地位,成为数学的主要分支。

(2) 为数学其他分支和其他科学技术研究提供了新的工具。微积分在自身不断完善的过程中,与应用相结合,派生出许多新的分支学科,如在 17~18 世纪产生的微分方程、级数论、变分学、微分几何等,这些分支都因当时物理学、天文学、航海、声学、热学、工程技术等方面的需求而产生。

(3) 微积分具有重要性和应用广泛性。导数、积分分别是处理均匀量的除法和乘法在处理相应的非均匀量中的发展。除法和乘法应用广泛、非常重要,但除法和乘法仅适用于均匀量计算,对于科学、工程、经济等领域大量存在的非均匀量计算,则必须用导数和积分来求解,由除法和乘法的重要性和应用广泛性,显然可以得出微积分的重要性和应用广泛性。

3.2.4 微积分的思想方法

1. 变量数学思想

微积分研究的是动态变化的量,而之前的数学只研究静态的固定不变的量,微积分的创立完成了由常量数学到变量数学、由初等数学到高等数学的转变,解析几何是这种转变的开始,而微积分则彻底实现了这种转变!

2. 无限思想

中国古代、古希腊都有极限思想的萌芽,极限、微积分的思想酝酿了两千多年。古希腊哲学家芝诺(Zeno)的二分法悖论和阿基里斯追乌龟悖论、中国《庄子·天下篇》中“一尺之棰,日取其半,万世不竭”的记载都蕴含了早期极限思想的萌芽,我国古代数学家刘徽用“割圆术”求圆的面积、古希腊数学家阿基米德用“穷竭法”求曲边图形的面积,都是朴素的极限思想的运用。

但是,这些古代数学家只停留于有限的逼近,下面以刘徽的割圆术为例进行说明。

刘徽割圆术(公元 3 世纪) 设有一圆,首先作内接正六边形,将其面积记为 A_1 ,再作内接正十二边形,将其面积记为 A_2 ,再作内接正二十四边形,将其面积记为 A_3 ,如此下去,每次边数加倍,一般地,将内接正 $6 \times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n , $n \in \mathbb{N}^+$,这就得到了一系列内接正多边形的面积

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

当 n 越大,内接正多边形与圆的差别就越小,从而以 A_n 作为圆面积的近似值也就越精确。

刘徽割圆术虽然可以将圆的面积计算得很精确,但无论 n 的取值如何大,只要 n 取定了, A_n 终究只是正多边形的面积,还不是圆的面积。这种方法止步于有限逼近,没有突破有限,进入无限。

微积分则是研究和处理无限的问题:设想 n 无限增大,内接正多边形的边数

无限增加,在这个过程中,内接正多边形无限接近于圆,同时 A_n 也无限接近于某一确定的数值,这个确定的数值就理解为圆的面积,这个确定的数值在数学上称为数列 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限。

上述 n 无限增大条件下 A_n 的极限的概念体现了哲学上“量变到质变”的过程:随着 n 的增大,内接正多边形越来越接近于圆,所得面积仍为正多边形的面积,这是量的积累;当 $n \rightarrow \infty$ 时,所得面积已经是圆的面积,这是质的飞跃!

3. 化归思想方法

微积分最重要的思想是将非线性函数转化为线性函数(以直代曲),无论是从微观还是从宏观角度,都是利用均匀变化(线性函数)来研究和解决非均匀变化(非线性函数),是利用已知来研究未知,这就是化归思想方法。

例 3-3 变速直线运动物体的瞬时速度。

解 对于变速直线运动物体,在微小时间段内,把非均匀变化的位移近似地看作均匀变化,这样就可以利用处理均匀变化的除法得到某一时刻 t_0 的瞬时速度的近似值(均匀化):

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \approx v(t_0)$$

然后通过求极限,使近似值转化为精确值(精确化):

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

例 3-4 非均匀物质细棒的线密度。

解 对于非均匀物质细棒,在微小的小段内,把非均匀变化的质量近似地看作均匀变化,这样就可以利用处理均匀变化的除法得到某一点 x_0 的线密度的近似值(均匀化):

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x} \approx \mu(x_0)$$

然后通过求极限,使近似值转化为精确值(精确化):

$$\mu(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

求导数是从微观的角度研究变化率,上述例子中的求导过程都可以概括为“均匀化—精确化”两个步骤。

例 3-5 变速直线运动物体从 $t=a$ 到 $t=b$ 的位移。

解 为求变速直线运动物体的位移,先对时间进行“划分”,将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间,营造微小时间段条件,然后“均匀化”,将微小时间段上非均匀变化的位移近似地看作均匀变化,然后利用处理均匀变化的乘法

$$\Delta s_k \approx v(\xi_k) \Delta t_k \quad (\xi_k \text{ 是第 } k \text{ 个微小时间段内的一点})$$

得到这一小段时间内的位移的近似值,然后通过“合并”“精确化”,将其加起来求极限,使近似值转化为精确值:

$$s = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k = \int_a^b v(t) dt$$

就得到从 $t=a$ 到 $t=b$ 的位移(d 是最大的小时间段,使其趋于 0 可保证各小时间段都趋于 0)。

例 3-6 非均匀物质细棒从 $x=a$ 到 $x=b$ 的总质量。

解 为求整个细棒的质量,首先通过“划分”,将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间,营造微小段条件,然后“均匀化”,将微小段上非均匀变化的质量近似地看作均匀变化,然后利用处理均匀变化的乘法

$$\Delta m_k \approx \mu(\xi_k) \Delta x_k \quad (\xi_k \text{ 是第 } k \text{ 个微小段内的一点})$$

得到这一小段内的质量的近似值,然后通过“合并”“精确化”,将其加起来求极限,使近似值转化为精确值:

$$M = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b \mu(x) dx$$

就得到从 $x=a$ 到 $x=b$ 的总质量(d 是最大的小段,使其趋于 0 可保证各小段都趋于 0)。

求积分是从宏观的角度研究总量,上述求积分的过程都可以概括为:“划分—均匀化—合并—精确化”四个步骤。

从以上例子可以看出,这些问题涉及不同类型的问题(变速运动、非均匀物质)、不同范畴的问题(微观、宏观),但都是通过均匀去研究和处理非均匀,思想方法都是:局部均匀化求近似、利用极限得精确。对于求导数这一微观问题,仅需要“均匀化—精确化”两个步骤;对于求积分这一宏观问题,步骤多出了两步,为“划分—均匀化—合并—精确化”四个步骤,其中,“划分”是为“均匀化”创造条件的,而“合并”是问题本身的需要,因此,最本质的思想仍然是“均匀化”和“精确化”。

3.3 分析学的严密化

3.3.1 无穷小悖论

19 世纪初,微积分的理论框架和基本内容已经确立,微积分与力学、天文学等科学技术相结合,发挥了很大作用。但是,微积分自身的一些基本概念,如无穷小、微商等,都尚未摆脱它们的物理或几何原型,带有经验性、直观性,存在逻辑上的缺陷,是不严密的。

微积分把“无穷小量”看作数学研究对象,这的确是数学思想上的一次革命。当时,把导数看成两个无穷小量的比值、把积分看成无穷小量之和,然而,“无穷小量”是什么?这在当时是说不清的,它似乎是零,又似乎不是零。

例 3-7 用牛顿的“流数术”求 x^2 的导数。

解 先将 x 取一个不为 0 的增量 Δx ,由

$$(x + \Delta x)^2 - x^2 = (\Delta x)^2 + 2x \Delta x$$

再被 Δx 除,得

$$\frac{(\Delta x)^2 + 2x \Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

最后令 $\Delta x = 0$,求得导数为 $2x$ 。

这个结果是正确的,但推导过程存在着明显的偷换假设的错误:在除法部分假设 Δx 不为 0,而在最后 Δx 又被突然地取为 0。那么 Δx 到底是不是 0 呢?牛顿也未能自圆其说。

微积分创立初期的不严密问题不仅造成逻辑上的混乱,而且动摇了人们对微积分的正确性的认识,引起整个 18 世纪来自各方面的严厉批评,特别是遭到英国唯心主义哲学家、大主教贝克莱(G. Bekkeley)等的强烈攻击,他说微积分的推导是分明的诡辩,这就是数学史上的“无穷小悖论”。

无穷小悖论 究竟无穷小量 Δx 是否等于零?如果是零,怎么能用它去作除法呢?如果不是零,计算和函数变形时又怎么能把包含着它的那些表征微小量的项去掉呢?

无穷小悖论导致了在 18 世纪后半叶形成的“第二次数学危机”。

贝克莱之所以激烈地攻击微积分,一方面是他要为宗教服务,另一方面也由于当时的微积分缺乏坚实的理论基础,连大数学家牛顿也无法解决基本概念中的混乱。

3.3.2 分析学严密化运动

为了克服“第二次数学危机”,数学家们开展了数学史上称为“分析学严密化运动”的数学研究工作,经过众多数学家的努力,微积分理论才得以严密化。

分析学严密化又称为分析学算术化,指的是以实数理论为基础建立微积分体系的思想方法。

分析学严密化运动的历史表明:微积分的理论基础是极限理论,而极限理论的理论基础是实数理论。分析学的严密化正是以实数理论为基础建立极限理论和微积分理论。

分析学严密化运动在 18 世纪末就已经开始酝酿。19 世纪初,法国的柯西(A. L. Cauchy)、德国的高斯(J. C. F. Gauss)和挪威的阿贝尔(N. H. Abel)等著名大数

学家用严格的极限理论取代了牛顿与莱布尼兹的无穷小方法,对分析学的严密化运动作出了突出贡献。而作为极限理论基础的实数理论则是由德国数学家魏尔斯特拉斯(K. T. W. Weierstrass)和康托尔(G. Cantor)等于 1870 年左右最终建立,从而宣告分析学严密化运动的彻底胜利!

尽管微积分创立初期有许多不足,但它经受住了实践的检验,在广泛的应用中体现了价值,解决了许多长期难以解决的问题,促进了科学技术的进步,所以它最终得到人们的信任和支持。对此,贝克莱后来也不得不在事实面前低头,他说:“流数术是一把万能的钥匙,借着它,近代数学家打开了天体以至大自然的秘密”。

分析学严密化运动具有重大意义。

(1) 分析学严密化运动使分析学的基本概念得到了精确定义,分析学在克服自身的矛盾中前进了一大步,排除了其中的错误和含糊不清之处。

(2) 分析学严密化运动促进了实数理论的建立,使实数本身的概念得到了精确定义,使分析学建立在严密的逻辑基础之上。

(3) 分析学严密化运动促进了集合论的提出。

3.3.3 分析学严密化的思想方法

1. 极限思想

微积分的理论基础是极限理论,确定了以极限理论为基础建立微积分理论的思想是分析学严密化运动的最重要的成果。

1821 年,法国数学家柯西出版了著作《分析教程》,他认识到函数不一定要有解析表达式,他首先给出了极限的描述性定义,并抓住极限概念,指出无穷小量和无穷大量都不是固定的量而是变量,无穷小量是以零为极限的变量,并用其定义了导数和积分等概念,成功地用现代极限理论说明导数的本质,他将导数明确定义如下:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

这样就澄清了以往对无穷小量似零非零的模糊认识,并将极限和连续性二者作为分析学严密化的基础,奠定了现代分析体系。

但是,柯西对极限的定义是描述性的,他把变量定义成“依次取很多不同值的量”,把极限定义为:“当同一个变量逐次所取的值无限趋近于一个固定的值,最终使它的值与该定值的差要多小有多小,那么最后该定值就成为这个变量的极限”,这种描述性定义是不严格的、不令人满意的。

极限的严格定义最终由德国数学家魏尔斯特拉斯给出,魏尔斯特拉斯提出了所谓的“ ϵ - δ 语言”,并用它定义极限以及所有相关的基本概念,“ ϵ - δ 语言”克服了

“lim 困难”，用 ϵ - δ 语言定义连续函数的极限如下。

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

其含义是：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，则任意给定一个正实数 $\epsilon > 0$ (不管 ϵ 有多小)，如果能找到正实数 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$ 恒成立，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限，记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

魏尔斯特拉斯给出了现在通用的极限、连续的定义，并把导数、积分严格地建立在极限的基础上，极限理论的创立使得微积分从此建立在一个严密的基础之上。

若采用第 1 章数理逻辑中介绍的量词符号，则分析学严密化后极限的具体定义如下。

数列的极限 设 $\{x_n\}$ 为一数列，则数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 定义为

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \epsilon$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 也可记为 $x_n \rightarrow a$ (当 $n \rightarrow \infty$)。

自变量趋于有限值时函数的极限 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，则函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 定义为

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \epsilon$
 定义中， $0 < |x - x_0|$ 表示 $x \neq x_0$ ，所以 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 有没有极限与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关。 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 也可记为 $f(x) \rightarrow A$ (当 $x \rightarrow x_0$)。

自变量趋于无穷大时函数的极限 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，则函数极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 定义为

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \epsilon$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 也可记为 $f(x) \rightarrow A$ (当 $x \rightarrow \infty$)。

从上述极限定义可以看出：

(1) 极限是用运动的观点看问题，且极限与无限密切相关；

(2) 极限含有“无限接近、永不到达”的意思，如果某一函数在其自变量的某个变化过程中，函数值无限接近某一确定的数 A ，那么 A 就称为在这一变化过程中函数的极限。

极限是微积分的一系列重要概念的基础，这些重要概念，如函数的连续性、导数等都是借助极限来定义的。

极限思想是一种重要的数学思想，所谓极限思想，是指用极限概念分析和解决问题的数学思想，其一般步骤为：对被考查的未知量，先设法构建一个与它的变化

有关的另一变量,确认此变量在无限变化过程中被考查未知量的趋势性结果,如果这个趋势性结果无限接近某一值,再用极限方法通过推导和计算得出被考查未知量所无限接近的值。

从哲学观点看,极限概念体现了量变到质变的辩证规律,这是人类对数学认识的一个重大进步。因此,微积分的产生是数学史上的分水岭,是真正的里程碑!

柯西给出的导数定义与现今数学教科书中的导数定义完全一致,下面用其求解若干实际函数的导数。

例 3-8 根据导数定义求下列函数的导数。

(1) $f(x) = C$ (C 为常数)

(2) $f(x) = x$

解 (1) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C - C}{h} = 0$

(2) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$

例 3-9 根据导数定义求 $f(x) = x^2$ 的导数。

解 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$

请读者思考例 3-9 与牛顿的“流数术”求导方法的异同。

2. 化归思想

19 世纪下半叶,人们普遍把函数概念和动点运动轨道曲线这一几何概念联系在一起。并且认为由于动点必须经过它的轨道上任两点之间的每个点,因此曲线是连续的,又因为动点在它的轨道上的每一点都有确定的运动方向,因此曲线在每一点处都有切线。正是出于这种直观的思考,当时几乎所有的数学家都相信:函数的连续性是函数的可微性的充分条件,任何连续函数除个别点外都是可微的,连高斯、柯西和狄利克雷这样的大数学家也从未对此持不同意见。

1861 年,魏尔斯特拉斯给出了一个处处连续但处处不可微的函数——魏尔斯特拉斯函数,这一函数立刻震惊了整个数学界,该函数如下:

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

其中 b 是一个奇整数, $0 < a < 1$, 且 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ 。

这个函数使人们感到需要彻底摆脱几何直观的依赖,重新考查分析学的基础,分析学的进一步发展需要有逻辑严谨的实数理论作为基础。当时微积分已经诞

生,微积分计算需要数学界给实数下一个明确的定义,实数理论的建立已经不可避免。

魏尔斯特拉斯在对分析学的基础做深入考察的基础上提出如下观点和方案。

(1) 实数是极限和连续性的算术基础,是全分析的本源,要使分析学的逻辑基础严密化,就必须抛弃对实数的直观理解,构建实数体系的严密逻辑基础。

(2) 构建实数体系基础最可靠的办法是按照严密的推理将实数归结为有理数,即借助于有理数来构造实数。

(3) 有理数可由整数导出,整数是算术中最为直观可信的概念,这样就可以把分析的基础最终建立在整数的基础上。

魏尔斯特拉斯的这一方案被称为“分析算术化纲领”,这一纲领体现了化归思想。

根据这一纲领,戴德金(J. W. Dedekind)、康托尔(G. Cantor)、魏尔斯特拉斯(K. T. W. Weierstrass)都提出了自己的实数理论:

(1) 戴德金的有理数分割理论。

(2) 康托尔有理数序列理论。

(3) 魏尔斯特拉斯的有界单调序列理论。

康托尔、魏尔斯特拉斯的方法基本上依据同一原理,都是用“有理数列”(基本序列)来定义实数,而戴德金则通过引入“有理数分割”的概念来定义无理数,并据此建立实数理论。实数的这三大派理论,从不同方面深刻揭示了无理数的本质,证明了实数系的完备性。

实数的定义及其完备性的确立,标志着由魏尔斯特拉斯倡导的“分析算术化运动”大致宣告完成。由无理数引发的持续两千年的数学危机得以解决,两千多年来存在于算术与几何之间的鸿沟得以完全填平,无理数不再是“无理的数”了。之后,意大利数学家皮亚诺(G. Peano)对自然数也给出了皮亚诺公理,至此,分析学的严密化运动取得了圆满成功。

由于提出“分析算术化纲领”,在实数理论的基础上,人们得以完成分析学严密化运动所提出的任务,魏尔斯特拉斯因而被称为“现代分析学之父”。

3.4 非欧几何

3.4.1 第五公设难题

欧氏几何自公元前3世纪创立以来,直到公元19世纪初,两千多年过去了,数学家们都相信它是真理,是唯一正确的几何,但是人们也不得不承认其中的第五公设不尽如人意,不仅叙述啰唆,而且也不那么不证自明。

继 17 世纪解析几何和微积分创立之后,到 18 世纪,数学科学已初具规模,新的数学分支纷纷脱颖而出,无数难题得以解决,数学家们创立了复杂艰深的数学理论,但是在看上去很简单的欧氏几何第五公设问题面前却一筹莫展,法国数学家达朗贝尔(d'Alembert)在 1759 年无奈地宣称:第五公设问题是“几何原理中的家丑”。

为消除这一家丑,数学家们一直在努力,努力途径有两条。

(1) 尝试用更简明的语言来叙述第五公设,给出替代性陈述。然而,所有这些替代性陈述并不比《几何原本》的第五公设更好,直到 18 世纪,苏格兰数学家普莱菲尔(Playfair)才总结出一个比较简单的替代性公设:“过已知直线外一点能且只能作一条直线与已知直线平行”,如今的数学教材就采用这样的叙述来代替第五公设。

(2) 证明第五公设的非独立性,即可由其他公设和公理推导出第五公设,从而取消它的公设资格。

18 世纪之前的证明都采用直接证明法,众多数学家尝试用前 4 个公设、5 个公理以及由它们推导出的命题来证明第五公设,但都未成功,这引起了数学家们对“第五公设难题”的讨论。

第五公设 同平面内一条直线和另外两条直线相交,若在某一侧的两个内角的和小于两个直角的和,则这两条直线经无限延长后在这一侧相交。

第五公设图示如图 3-3 所示。

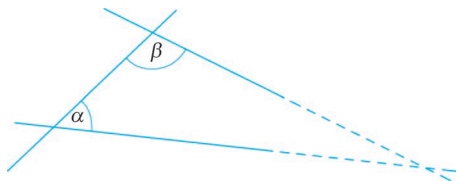


图 3-3 第五公设图示

18 世纪初,意大利数学家萨凯里(G. Saccheri)试图用反证法证明第五公设,即从第五公设的否命题出发推导出矛盾,他得到这样一个结论:在平面上存在两条直线 l_1 和 l_2 ,它们在一个方向无限地互相接近,而在相反方向无限地分开,这样,直线 l_1 和 l_2 将在无穷远点 P_∞ 有共同的垂线,萨凯里认为这是不可能的,是“矛盾”,以为自己证明了第五公设。其实,由于人们始终坚信欧氏几何是物理空间的唯一正确的理想化,这里的矛盾仅是与欧氏几何的相应命题矛盾,而不是反证法所要推导出的矛盾,因此,萨凯里并没有证明出第五公设。

反证法 假设原命题不成立,经过正确的推理,最后得出矛盾,因此说明假设错误,从而证明原命题成立的证明方法。

反证法没有直接证明原命题成立,而是推翻原命题的否命题,根据排中律,既然原命题的否命题为假,原命题便是真的,所以反证法是一种间接证明的方法。

事实上,在萨凯里推导出来的一系列结论之间并没有逻辑矛盾,他只因所得结论不合乎常理就认为是有矛盾的,他的思想受到欧氏几何的束缚,未能认识到这些不符合人的直觉的结论其实属于一种新的几何。德国数学家兰伯特(J. Lambert)也作了类似证明,虽然推导出的命题更多,但是仍没有摆脱欧氏几何的束缚。

第五公设难题在大数学家高斯那里才算取得突破,高斯研究了这个问题困扰数学界大约两千年的难题,还亲自进行实地测量,考察我们生存的空间是否存在有非欧几何性质的可能性,从而用新的几何思想解决第五公设难题。1813年,高斯已经形成了一套关于新几何的思想,他称之为“反欧几里得几何”,后又改称“非欧几里得几何”,并坚信这种新几何在逻辑上是相容的,但高斯生前并未公开发表这一成果。

3.4.2 非欧几何的创立

非欧几何是指不同于欧几里得几何学的几何体系,一般是指罗巴切夫斯基几何(双曲几何)和黎曼几何(椭圆几何),它们与欧氏几何最主要的区别在于公理体系中采用了不同的平行公理。

1. 罗氏几何

俄国数学家罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевский)也曾想采用途径(2)证明第五公设的非独立性,遭到失败后,他认识到必须放弃第五公设并采用新的公设,他提出的新公设是:过直线外一点可以作两条或两条以上的直线与原直线平行,这个新公设是第五公设的反命题。但是,经过严格论证,新公设与其他公设并不矛盾,由此出发进行逻辑推导可得出系列新定理,并形成了一个逻辑上无矛盾的新的几何理论,罗巴切夫斯基称之为“想象的几何”或“泛几何”,后来人们称之为“罗巴切夫斯基几何”或“罗氏几何”,这是第一种非欧几何。

1840年,罗巴切夫斯基的专著《平行线理论的几何研究》发表,在国际上产生了影响。为了让人们直观地理解这种新几何,罗巴切夫斯基用下面的例子说明:设 C 是直线 AB 外的一点,则通过 C 的直线可分为两类:一类与 AB 相交,另一类与 AB 不相交,而直线 p 和 q 属于后一类且构成两类的边界,此外,夹在直线 p 和 q 间的通过 C 的直线也属于后一类,都是 AB 在新意义下的平行线。显然,欧氏几何下的平行线也是 AB 在新意义下的平行线。罗氏几何的平行线如图3-4所示。

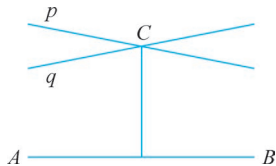


图3-4 罗氏几何的平行线

罗氏几何得出许多反直觉的结论,例如:三角形的

三个内角之和 θ 小于 180° , 且 θ 随着三角形面积的增大而减少, 而当三角形面积趋于 0 时 θ 趋于 180° 。正因为这些反直觉的结论, 罗氏几何并没有欧氏几何那样容易被人们接受, 而且不仅罗氏几何最初不能被人们接受, 罗巴切夫斯基本人也遭到了广泛的反对和指责。

人们后来才知道, 罗氏几何与欧氏几何并不矛盾, 只是适用范围不同而已, 欧氏几何是日常小范围条件下现实空间的反映, 而罗氏几何是天文学上大尺度宇宙空间(弯曲空间)的反映。德国数学家克莱因(C. F. Klein)和法国数学家庞加莱(J. H. Poincare)先后给出了非欧几何的模型, 对转变人们的认识起到了关键作用。

罗氏几何的公理系统及数学思想如下。

(1) 第五公设是不能证明的。

(2) 欧氏几何的基础命题加上某条公理的否定公理以后, 可以产生另一种与欧氏几何不同的、但逻辑上不矛盾的、完整且富有内容的新几何学。

(3) 罗氏公理系统和欧氏公理系统的不同仅在于第五公设, 罗氏几何除了第五公设外, 采用了欧氏几何的一切公设和公理, 因此凡不涉及第五公设的几何命题, 在欧氏几何中若是正确的, 则在罗氏几何中也同样是正确的; 凡涉及第五公设的几何命题, 在罗氏几何中都有新的具体意义。

2. 黎曼几何

1854 年, 高斯的学生、德国数学家黎曼(G. F. B. Riemann)发表了文章《论作为几何学基础的假设》, 采用“同一平面上任意两条直线必有一个交点”(高斯的“过直线外一点, 没有直线与已知直线共面而不相交”)的假设代替第五公设, 建立了一种新的非欧几何学, 称为黎曼几何。

黎曼几何的公理系统及主要结论如下。

(1) 欧氏几何第五公设被否定了, 没有平行线。

(2) 直线可以任意延长被否定了, 每一条直线都存在一个这条直线能够延长的最大长度, 从而直线不能把平面分成两半。

(3) 过给定的两点总可以作一条以上的直线。

(4) 三角形内角和大于 180° , 且超出的量与三角形面积成正比。

黎曼提出的全新的几何思想保留了欧氏几何的其他公设与公理, 是经过严密逻辑推理而建立起来的几何体系, 这种几何否认平行线的存在, 是另一种全新的非欧几何。

上述是狭义黎曼空间上的几何学。之后, 黎曼把“高斯曲率”推广为“黎曼曲率”, 建立了广义黎曼几何。广义黎曼空间包含了具有零曲率的欧氏空间、具有负曲率的罗巴切夫斯基空间、具有正曲率的狭义黎曼空间, 至此, 欧氏几何、罗氏几何、黎曼几何得到了统一。

曲率是描述曲线在某一点的弯曲程度的数值。

曲率在数值上应该如何定义？

(1) 对于圆, 根据观察, 随着圆的增大, 圆周曲线越来越平坦, 弯曲程度趋于减小, 改变圆的大小的是半径, 半径变小, 圆变小, 曲线变弯, 曲率变大, 由于曲率与半径成反比, 故定义圆的曲率为

$$K = \frac{1}{r}$$

(2) 对于一般曲线, 各个位置上的弯曲程度不同, 计算某一位置的曲率, 就要在其左、右各取一个点, 这 3 个点确定了一个圆, 将左、右两个点不断向中间靠拢, 最终得到的圆称为密切圆, 在曲线较平坦的地方, 密切圆半径较大, 在曲线较弯曲的地方, 密切圆半径较小, 因此可以以密切圆的曲率来定义曲线的曲率。

如图 3-5 所示, 设曲线为 $y=f(x)$, 由微分几何的理论推导, 在曲线上点 (x_0, y_0) 处, 密切圆半径为

$$r = \frac{[1 + (f'(x_0))^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}$$

曲率 K 为

$$K = \frac{1}{r} = \frac{|f''(x_0)|}{[1 + (f'(x_0))^2]^{\frac{3}{2}}}$$

进一步的知识可查阅微分几何。

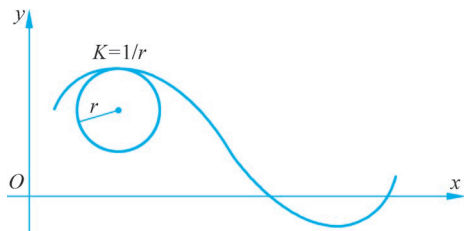


图 3-5 曲率的计算

3. 非欧几何的类型

按几何特性(曲率), 非欧几何的类型可以概括如下(见图 3-6)。

(1) 坚持第五公设, 则得到欧氏几何。在欧氏几何中, 过直线 AB 外一点 C 可作一条平行线。

(2) 以“可以引最少两条平行线”为新公设, 则得到罗氏几何(也称双曲几何)。在罗氏几何中, 过直线 AB 外一点 C 可作多条平行线。

(3) 以“一条平行线也不能引”为新公设, 则得到黎曼几何(也称椭圆几何)。在黎曼几何中不承认平行线的存在。

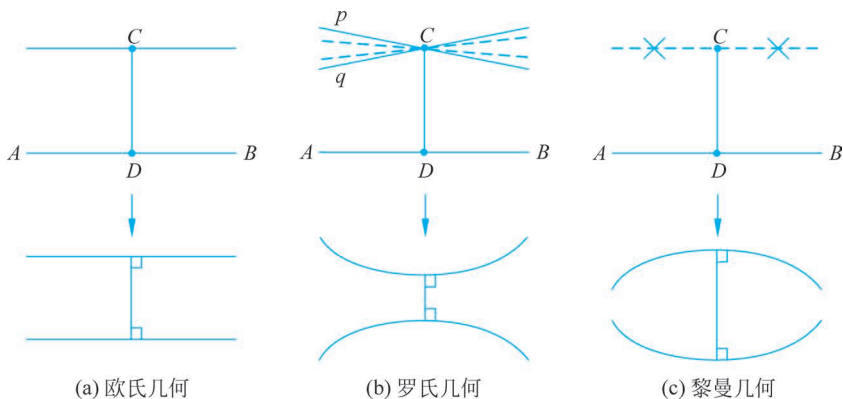


图 3-6 不同的平行公设得到不同的几何

(4) 如果完全去掉第五公设, 就得到更加一般化的几何理论。这种几何不仅可以囊括前面提到的三种几何, 而且允许空间的不同位置有不同的曲率(前三种几何学都是常曲率空间中的几何学, 对应的曲率分别为 0、负常数和正常数)。

非欧几何创立的同时, 困扰数学家们两千多年的欧氏几何第五公设难题也被完全解决: 它是独立的公理, 不能被证明, 也不能取消, 只能用它的等价命题代替, 如果用否定它的其他命题代替, 则产生非欧几何。

非欧几何与欧氏几何虽然结果不同, 但它们都是无矛盾的几何学, 非欧几何甚至还可以在欧氏几何的某些曲面上表现出来。1868 年, 意大利数学家贝尔特拉米 (E. Beltrami) 发表了一篇论文《非欧几何解释的尝试》, 证明非欧几何可以在欧几里得空间的某些曲面上实现。图 3-7 中, 依次为欧氏几何、罗氏几何、黎曼几何空间, 三角形内角和分别等于、小于、大于 180° 。

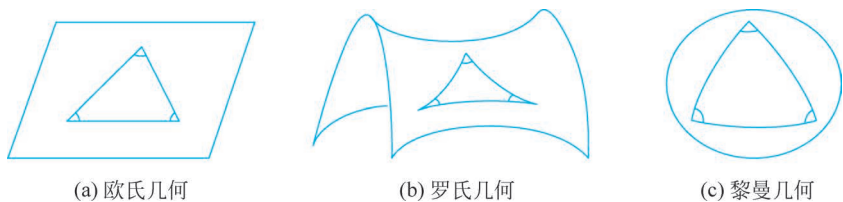


图 3-7 几种几何空间

既然非欧几何可以在欧几里得空间的某些曲面上实现, 非欧几何命题就可以“翻译”成相应的欧氏几何命题, 如果欧氏几何没有矛盾, 非欧几何也就没有矛盾。

3.4.3 非欧几何的数学思想

非欧几何打破了两千多年来欧氏几何一统天下的局面, 它的诞生是数学史上的一次重大革命。20 世纪最有影响力的数学家之一、德国数学家希尔伯特

(D. Hilbert)称赞道：19世纪最有启发性、最重要的数学成就当推非欧几何的发现！非欧几何所蕴含的数学思想是非常深刻的，在数学史上具有重大意义。

(1) 打破了几何空间的唯一性，扩大了几何学的研究对象。非欧几何改变了欧氏几何是描述物质世界唯一真理的看法，打破了几何空间的唯一性，反映了空间形式的多样性，使人们解放思想、开阔眼界，并使人们对空间观念的认识产生了飞跃，大大推动了数学的发展。非欧几何使几何学的研究对象由图形的性质扩大到更一般的空间形式，几何学的发展由此进入了一个以抽象为特征的崭新阶段。人们认识到：作为数学研究对象之一的空间形式需要重新理解，空间形式远非欧氏几何的三维空间，数学开启了研究各种空间的新时代。非欧几何最重要的应用领域是物理学，对20世纪初物理学中关于空间和时间的物理观念产生了重大影响。按照相对论的观点，宇宙结构的几何学不是欧氏几何学，而恰恰是非欧几何学，非欧几何在20世纪初被现代物理学的开创者、物理学家爱因斯坦(A. Einstein)等用于研究广义相对论，非欧几何可用于刻画范围很大的空间，而在小范围上，它的结果与欧氏几何相同，非欧几何为广义相对论提供了思想基础和有力工具。

(2) 表明数学的逻辑推理对现实直观具有相对独立性。非欧几何的创立说明数学的逻辑推理可以独立于现实直观而进行，而人们感官体会到的不一定是真理，这使人们改变对数学的认识和理解，引发人们对数学本质的深入探讨。物理学家杨振宁的规范场论和数学中的纤维丛理论的深刻联系就是一个例证。1946年，美国数学家斯丁路特、美籍华裔数学家陈省身、法国数学家艾勒斯曼共同提出纤维丛理论。1954年，杨振宁创立了规范场论，1974年，杨振宁在同陈省身的交谈中发现，大约30年前就创立的纤维丛理论正是他想表达规范场的数学工具，陈省身建立的整体微分几何学恰为杨振宁所创立的规范场论提供了合适而精致的数学框架。杨振宁曾对陈省身说：“非交换的规范场与纤维丛这个美妙的理论在概念上的一致，对我来说是一大奇迹。特别是数学家在发现它时没有参考物理世界，你们数学家是凭空想象出来的。”陈省身却立刻加以否认：“不，不，这些概念并非凭空想象，它们是自然的，也是真实的！”

(3) 使公理化思想方法进一步完善和发展。非欧几何的创立是对欧氏几何公理体系的反思引发的，这使后辈数学家注意对几何基础乃至整个数学基础的研究。非欧几何使人们认识到：人们误以为固定不变的公理体系是可以改变的！非欧几何是改变欧氏几何公理体系中的第五公设得到的，这就表明公理系统也有很大的人为任意性，公理只不过是推导结论的逻辑演绎基础而已，这一点对数学的发展、数学思想的演变有十分重大的影响。

3.5 群论

3.5.1 高次代数方程求解难题

方程一直是古代数学的主要研究内容之一。对于一元二次方程,公元前的中国人和巴比伦人就已经掌握了求正根的方法,9世纪的阿拉伯数学家阿尔·花拉子米进一步给出了完整的求根公式,13世纪,中国宋代数学家秦九韶发现了高次方程的数值解法。16世纪意大利数学家费罗(S. D. Ferro)、费拉里(L. Ferrari)先后给出了三次和四次方程的一般解法,这自然促使后来的数学家们努力寻求四次以上方程的求根公式。然而,数学家们经过了近3个世纪的努力仍未能解决此问题。

18世纪末,高斯证明了“代数学基本定理”。

代数学基本定理 任何复系数一元 n 次多项式方程在复数域上至少有一根($n \geq 1$),由此推出,一元 n 次复系数多项式方程在复数域内有且只有 n 个根(重根按重数计算)。

注意:“一元 n 次复系数多项式方程正好有 n 个复数根”似乎是一个更强的命题,但实际上是“至少有一个根”的直接结果,因为有一个根 x_a ,只要不断把多项式除以 $(x - x_a)$,即可从有一个根推出有 n 个根。

代数学基本定理也称为高斯-洛特定理(由德国数学家洛特1608年提出、高斯1799年证明),是数学中的一个基本定理,这个定理在代数乃至整个数学中起着基础作用,高斯开创了近、现代数学关于“存在性”证明的先河,这是一个重要的数学思想。

第一个明确宣布“不可能用根式解四次以上方程”的是法国数学家拉格朗日。1770年,拉格朗日发表了《关于代数方程解的思考》,他讨论了人们所熟知的解二、三、四次方程的方法,并指出这些成功解法所需的条件对于五次以及更高次的方程是不可能发生的。拉格朗日发现方程的根的置换极为重要,甚至认为这是解决问题的关键,他首先提出了“群”的初步思想,给出了“置换群”的概念,并试图证明“高于四次的方程的一般解法不存在”,然而,经过顽强努力,拉格朗日不得不放弃了,他说这个问题“好像是在向人类的智慧挑战”!

3.5.2 阿贝尔的贡献及其数学思想

1. 阿贝尔的贡献

在拉格朗日的文章发表过后的半个多世纪,挪威青年数学家阿贝尔(N. H. Abel)在认真钻研拉格朗日等著作的基础上,着手研究五次方程求解的可能性问题,起初他以为五次方程可能有根式解,但很快遇到了困难。

根式解是指对代数方程的系数通过有限步加、减、乘、除、开正整数次方表示的解。

如果一个代数方程的所有解均为根式解,就称这个方程存在根式解。例如,一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根式解为

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1823年,阿贝尔意识到一般五次方程可能不存在类似于二、三、四次方程那样的求根公式,因为如果这类公式总是存在的,它们又互不相关,那么这些公式就应该有无穷多个,这显然是不可能的,要么这些公式最终被统一起来,要么从某次方程起不存在类似的求根公式。既然过去寻找五次方程求根公式均已失败,那为什么不考虑证明五次方程没有根式解呢? 1824年,年仅22岁的阿贝尔自费出版了一本小册子《论代数方程,证明一般五次方程的不可解性》,在这篇论文中,阿贝尔严格地证明了:如果方程的次数 $n \geq 5$,并且将系数看成字母,那么任何一个由这些字母组成的根式都不可能是方程的根。这样,命题“五次和高于五次的一般方程没有根式解”被阿贝尔证明了,他的结论现称“阿贝尔定理”。

阿贝尔定理 对于5次及以上的一元高次方程没有通用的代数解法,即通过各项系数经过有限次四则运算、乘方和开方运算。

阿贝尔证明出了拉格朗日未能证明的结论,他的证明使从16世纪起就困扰着数学家们的难题最终被解决!遗憾的是,这一伟大成就并没有立刻给阿贝尔带来荣誉。自费出版的小册子受到篇幅的限制,他的重要思想无法全面展开,因此难以被人们理解。

2. 阿贝尔的数学思想

(1) 阿贝尔定理的结论连同他在证明过程中所引入的“域”“不可约多项式”(当时的名称不同)的概念是非常重要的,这个定理是数学史上第一个证明的“不可能性问题”,由此开创了证明某些情况下不可能的数学思想。

(2) 阿贝尔的工作揭示了高次方程与低次方程的根本不同,寻找高次方程的一般根式解的努力不需要继续了。我们现在已经知道:对于一元多项式方程,一次方程有分式解,二次、三次、四次方程都有根式解,五次及以上的方程没有通用的根式解,但是它们可能有实数解,还可以用二分法、牛顿法、拟牛顿法、弦截法等数值计算方法求得数值解。

3.5.3 伽罗瓦群论及其数学思想

1. 伽罗瓦群论

阿贝尔的工作宣告了高于四次的一般代数方程不能用根式求解,但代数方程

可解性理论的研究并未大功告成,更艰巨的工作还在后面,因为有一些特殊的高次方程还是可以用根式求解的,如何区分能够用根式求解和不能用根式求解的方程仍然是一个未解决的问题。阿贝尔未完成的事业由一位极富传奇色彩的法国青年数学家伽罗瓦(E. Galois)完成了。

“群”的思想是拉格朗日最先提出的,群的概念是非常深刻的,它需要以高度抽象的形式来表达,下面给出现代数学中的相关定义。

代数运算 设 A 是一个非空集合,若对 A 中任意两个元素 a, b , 通过某个法则“ \cdot ”,有 A 中唯一确定的元素 c 与之对应,则称这个法则“ \cdot ”为集合 A 上的一个代数运算。元素 c 是 a, b 通过“ \cdot ”作用的结果,记为 $a \cdot b = c$ 。

由定义可知代数运算具有封闭性。

群 设 G 是一个非空集合,“ \cdot ”是 G 上的一个代数运算,即对所有的 $a, b \in G$, 有 $a \cdot b \in G$, 如果 G 的运算还满足:

(G1) 结合律: $\forall a, b, c \in G$, 有 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

(G2) $\exists e \in G$, 使 $\forall a \in G$, 有 $e \cdot a = a \cdot e = a$;

(G3) $\forall a \in G$, $\exists b \in G$, 使得 $a \cdot b = b \cdot a = e$ 。

则称 G 关于运算“ \cdot ”构成一个群,记作 (G, \cdot) , 在不至于引起混淆的情况下也可简记为 G 。

对上述定义解释如下:

(1) 代数运算的要求(封闭性),连同(G1)至(G3),共4条,合称为群的公理。

(2) G 中存在元素 e , 使 G 中任意元素 a 与之相乘(包括左乘和右乘)的结果都等于 a 本身,元素 e 称为单位元(么元)。这里,同时列写左乘和右乘也表明不要求“ \cdot ”运算满足交换律。

(3) 对 G 中任一元素 a , 在 G 中存在元素 b , 满足 $a \cdot b = b \cdot a = e$, b 称为 a 的逆元,记作 a^{-1} 。

上述解释中,“元”是“元素”的简称。

例 3-10 “变换群”的例子。

解 变换群是一些变换的集合,例如,将一个等边三角形变换到自身共有6种变换:旋转 120° 、旋转 240° 、旋转 360° (即不动变换)以及关于三条高线的反射,这6种变换构成的集合就是一个群。如果把两个元素的乘积定义为连续施行这两个变换,则它满足群的公理:①任意两个元素之积仍是群中的一个元素(封闭性);②积的运算满足结合律;③有一个单位元(即不动变换);④群中每个元素都有一个逆元(此处是指逆变换)。

将群的概念发展成理论并成功地用于解决问题的首创者是伽罗瓦,他在研究代数方程的根式解,即在解决阿贝尔遗留下来的问题的过程中创立了群论。

在解决“四次以上的多项式方程的根式解的存在性”问题上,伽罗瓦的思想方法可以归纳如下。

第1步,把 $n(n \geq 5)$ 次方程 $f(x)=0$ 的 n 个根组成的 $n!$ 个排列构成的集合记作 A ,那么 A 是一个置换群;把方程 $f(x)=0$ 的系数 a_1, a_2, \dots, a_n 经过有限次加、减、乘、除后得到的所有的表达式的集合记作 B ,那么 B 是一个域(现称为方程的基本域)。

第2步,考虑 B 的某些元素构成的满足一定条件的子域 B_1 (现称为伽罗瓦域);再考虑 A 的一个子群 A_1 (现称为伽罗瓦群),使得 A_1 和 B_1 之间可以建立一一对应的关系。

第3步,证明方程 $f(x)=0$ 存在根式解当且仅当伽罗瓦群 A_1 可解(群可解指的是一种特定意义下的分解),即把被考虑方程是否存在根式解的问题转化为群 A_1 是否可解的问题。

第4步,给出以下一系列方法:①在不知方程 $f(x)=0$ 的根的情形下构造一般或特殊的伽罗瓦群的方法;②对于伽罗瓦群给出判断其可解的方法;③如果方程 $f(x)=0$ 存在根式解,给出把方程的根表示出来的方法。

第5步,证明对一般的方程 $f(x)=0$,相应的伽罗瓦子群 A_1 不可解,因此一般的四次以上方程没有根式解。

最后这个结论和阿贝尔得到的结论一样,即把阿贝尔定理作为他的结论的一个直接的推论。伽罗瓦的群论方法彻底解决了四次以上代数方程的可解性问题,即可以用群论方法来判断任何一个代数方程能否用根式求解。

伽罗瓦群论十分深刻,由于他的数学思想远远超前于他所处时代的其他数学家们,他生前所撰写的论文都被遗失,或不能被当时的权威人士理解,均未能公开发表。

2. 伽罗瓦群论的数学思想

(1) 抽象思想。伽罗瓦在拉格朗日和阿贝尔的工作基础上,深入研究了代数方程的根的置换群的结构,提出“伽罗瓦群”“正规子群”“不变子群”“同构”“域”等全新概念,体现了“群”的抽象思想。伽罗瓦留给世界的最珍贵的概念是群。群到底是什么?群是定义了一种代数运算的非空集合,满足封闭性、结合律、存在幺元、逆元,群是一种代数结构(代数系统)。

代数系统是定义了代数运算的非空集合,简称代数系。代数系统也称为**代数结构**,是抽象代数的主要研究对象。

群是一个完全抽象的概念,表现在:集合中的元素不一定是数,也可以是函数、矩阵、变换或其他对象;非空集合上定义的运算也不一定是通常的加、减、乘、除等运算,完全可以是的运算方法。不限定元素(数学的对象)是数,也不限定运

算一定是通常的运算,这样,通过群就把数学的研究领域大大拓展了。

(2) 化归思想。伽罗瓦继承了拉格朗日问题转化的思想(化归思想),并把这一思想进行了发展,将代数方程根式可解问题的研究转变为对代数结构的研究,导致了抽象代数学科的诞生。

(3) 类比与联想思想方法。伽罗瓦建立群论也是应用类比与联想思想方法的结果(关于“类比与联想”,详见第5章)。

3. 伽罗瓦群论的贡献和价值

(1) 创立群论,为抽象代数做了奠基性工作。伽罗瓦用群论彻底解决了“高次代数方程是否根式可解”问题,但他为解决这一问题所发展出来的方法要远比解决这一问题本身更重要!现在人们称他发展出来的一整套关于群和域的理论为伽罗瓦理论(Galois Theory),并将他创造的群称为伽罗瓦群(Galois Group)。伽罗瓦因而成为群论的创立者。群和域都是抽象代数的基本内容,因此,伽罗瓦为抽象代数做了重要的奠基性工作。抽象代数的诞生宣告代数学不再以方程论为核心研究内容,而转向代数结构的研究,这不仅促进了代数学,而且促进了整个数学的发展。

(2) 群论有重要的应用价值。群论是数学发展的里程碑,被认为是数学史上最具有开创性的成就之一,群论不仅有理论意义,而且有重要的应用价值。现在,它不仅应用于整个数学,而且应用到物理、化学、生物等学科,在众多科技领域都能看到伽罗瓦群论高雅而美丽地存在着。

3.6 欧氏几何的公理化重建

3.6.1 欧氏几何的重建

1. 《几何原本》存在的问题

欧几里得的《几何原本》(简称《原本》)是一部伟大的著作,两千多年来被当成数学教材的典范,但《原本》仍然存在一些缺陷。

(1) 没有基本概念。《原本》试图对书中所有的概念都给予定义,例如,把点定义为“没有可以分割的部分”,把线定义为“只有长度而没有宽度”,把面定义为“只有长度和宽度”,而什么是“部分”“长度”“宽度”还得定义,结果不是无穷倒退,就是逻辑循环,不能建立严格的数学体系。其实,《原本》的做法是最终归结到“直观显然”。

(2) 许多定义含糊不清。由于把本来不该定义的基本概念加以定义,所以这种所谓“定义”只能以直观为基础而无法将概念明确界定。如把直线定义为“它上面的点一样地平铺着的线”,把平面定义为“它上面的线一样地平铺着的面”,而什么是“平铺”却说不清,它只是一种直观感觉的结果而已。

(3) 公理不足或多余。《原本》中“凡直角都彼此相等”是多余的公设,因为它从未被用过。《原本》中却没有“运动公理”“连续公理”“顺序公理”。许多问题由此产生:没有运动公理就使得图形通过移动来证明全等的做法缺乏根据;没有连续公理就使得两条直线交点的存在性得不到逻辑保证;没有顺序公理就使得可能推出“任意三角形都是等腰的”“直角等于钝角”等错误结论。

在数学史上,这些缺陷从4~5世纪起就不断受到一些数学家的关注,但没有引起人们的普遍重视,直到19世纪,人们的数学水平提高了,特别是在分析学的严密化运动、非欧几何的产生之后,《原本》存在的问题才凸显出来。

2. 希尔伯特发表《几何基础》

为克服《原本》存在的问题,数学家们开始了欧氏几何的重建工作。

1882年,德国数学家帕施(M. Pasch)发表《新几何讲义》,对欧氏几何的重建做了许多工作,如在直线上给出了顺序公理等,尤其重要的是,帕施关于选定“基本概念”的必要性和公理的作用等方面的思想具有很高的价值。之后,意大利数学家皮亚诺等也做了重要工作。希尔伯特在继承和发展这些思想的基础上对《几何原本》进行重建,在1899年出版的《几何基础》中提出了全新的欧氏几何系统,与19世纪末其他人给出的各种公理系统相比,《几何基础》对概念陈述最清楚、结构最规范、思想也最接近欧氏公理系统。

公理系统是公理的集合,从其中一些或全部可以经逻辑推导得出定理。公理系统也称为公理化系统、公理体系、公理化体系。

《几何基础》首先给出三个不加定义的概念:点、线、平面,这些基本概念由公理来规定;接着提出3个基本关系:结合关系、顺序关系和叠合关系;然后提出20个公理,并将它们归为5组:结合公理(8个)、顺序公理(4个)、叠合公理(5个)、平行公理(1个)、连续公理(2个)。基于这个公理系统,欧氏几何的所有命题都可以经过逻辑推导得出。其中,点、线、平面三个基本概念是完全形式化的东西,不依赖于直观,正如希尔伯特所说的:“《几何基础》中的点、线和平面,可以分别用桌子、椅子和茶杯或者任何其他三种东西代替”,同样,推导过程也完全建立在基本概念和公理之上,决不依赖于直观。

《几何基础》不仅弥补了《原本》的全部缺陷,而且通过新的、完整的公理系统把欧氏几何建立在一个更高的层次上。

3.6.2 公理化方法成为重要数学思想方法

按现代数学观点,《原本》的公理是不够严密的,希尔伯特在《几何基础》中将公理化思想明确而严格地确立下来,他对公理化提出了3条逻辑上的要求。

(1) 独立性,即各个公理相互独立,不能由一个推导出另一个。

(2) 无矛盾性,即各个公理之间没有矛盾,从一个公理推出的结果不能与另一个公理矛盾。

(3) 完备性,即通过它能推出该学科已有的全部重要命题。

《几何基础》被公认是用公理化方法建立数学体系的典范,对现代数学的发展产生了深远的影响,从此公理化方法成为数学的一种重要思想方法,数学的许多分支都采用这种方法建立它们的体系。在数学学科之外,理论力学、量子力学等都有公理化的成果出现。

3.6.3 不完备性定理

以希尔伯特为首的形式主义者主张给出一组公理,然后在此基础上推导出整个数学,从而只要证明这组公理的独立性、无矛盾性和完备性,就可以将整个数学大厦建立起来了,希尔伯特本人就秉持这种思想对《原本》进行了重建,并在《几何基础》中提出了全新的希尔伯特公理系统。令这位数学泰斗意料之外的是,1931年,美籍奥地利裔数学家哥德尔(K. Godel)提出了著名的“不完备性定理”,他指出:不仅是数学全部,甚至只是一个有意义的数学分支,也不能由一个公理系统概括起来,且不能通过增加公理的方法实现完备性,这就从理论上粉碎了形式主义者的梦想。

哥德尔不完备性定理使数学基础研究发生了划时代的变化,该定理不仅成为逻辑学里最深刻的定理,还和塔尔斯基(A. Tarski)的形式语言理论、图灵机判定问题一起被誉为现代逻辑科学在哲学方面的三大成果,被看作现代逻辑史上的一座重要的里程碑。

哥德尔证明了任何一个形式系统,只要包括了简单的初等数论描述,而且是自洽的,它必定包含某些用系统内所允许的方法既不能被证明为真也不能被证明为假的命题。

不完备性第一定理 任意一个包含一阶谓词逻辑与初等数论的形式系统都存在一个命题,它在这个系统中既不能被证明为真也不能被证明为假。

不完备性第二定理 如果系统 S 含有初等数论,当 S 无矛盾时,它的无矛盾性不可能在 S 内证明。

哥德尔不完备性定理的通俗解释是:任何包含自然数在内的公理体系总有一个命题既不能证其真也不能证其假。这个定理从理论上宣告了对全部数学进行公理化是不可能的。

3.7 概率论

3.7.1 概率论的创立

1. 确定数学和随机数学

人们在实践活动中会遇到两类截然不同的现象：确定现象和随机现象。确定现象是在一定的条件下必然会发生某种结果或者必然不会发生某种结果的现象。例如，在标准大气压下，水加热到 100°C 时必然会沸腾。确定现象的条件和结果之间存在必然联系，即当条件具备时，某种结果必然发生。在数学学科中，人们常把研究确定现象数学规律的数学分支称为确定数学，代数、几何、分析等均属于确定数学的范畴。随机现象是在一定条件下可能发生某种结果，也可能不发生某种结果的现象。例如，投掷一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面，预先做出确定的判断是不可能的。对于这类现象，由于条件和结果之间不存在必然联系，因此不能用确定数学加以定量描述。但是，随机现象并不是杂乱无章的现象，就单次事件而言似乎没有什么规律，但当同类事件大量发生时，在总体上却呈现出规律性。

由于确定数学无法定量地揭示随机现象的规律性，数学家们寻求建立一门适用于分析随机现象的数学，由此创立了随机数学——概率论与数理统计，其中，概率论是数理统计的基础。

2. 概率论的产生和发展

概率是反映随机事件出现的可能性大小的数值，也称为或然率。

概率论是研究随机现象数量规律的数学分支。

概率论的产生和发展有着悠久的历史，它的起源与保险、博弈问题等实际需求有关。

14 世纪，随着欧洲商业贸易和航海事业的发展，出现了海上保险业务。16 世纪，保险业务已经扩大到人寿、水灾和火灾等方面。保险的对象都是不确定性事件，为了保证保险公司盈利，同时又使人们愿意投保，就需要根据对大量随机现象的规律性的分析来创立保险的一般理论，这些实际需求推动了对随机现象规律的研究。

17 世纪中叶，法国数学家帕斯卡(B. Pascal)和费马(P. de. Fermat)解决了合理分配赌注问题。荷兰数学家惠更斯(C. Huygens)在其《论赌博中的计算》一文中明确提出“数学期望”的概念，这三人的研究实质都是利用排列组合的方法求某种条件下的数学期望值。

18 世纪是概率论的正式形成和发展时期。

1713 年，瑞士数学家雅各布·伯努利(J. Bernoulli)出版了概率论史上的第一本专著《推想的艺术》，建立了概率论的第一个极限定理“伯努利大数定律”，从此，

概率论从对特殊问题的求解发展到一般的数学理论。

大数定律是一种描述当试验次数很大时所呈现的概率性质的定律。注意：大数定律并不是经验规律，而是严格证明了的定理，但它是一种自然规律，因此通常不称为定理，而是称为定律。

伯努利大数定律 设 μ 是 n 次独立试验中事件 A 发生的次数，且事件 A 在每次试验中发生的概率为 p ，则对任意正数 ϵ ，有公式：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \epsilon\right) = 1$$

该定律的含义是：当试验次数足够多时，事件发生的频率无限接近于该事件发生的概率。在抽样调查中，用样本的成数去估计总体的成数，其理论依据即在于此。

1718 年，法国数学家亚伯拉罕·棣莫弗 (Abraham de Moivre) 在他的《机会论》一书中提出了概率乘法法则，以及“正态分布”和“正态分布律”的概念，为概率论的“中心极限定理”的建立奠定了基础。

1812 年，法国数学家拉普拉斯 (P. S. Laplace) 在他的《分析概率论》中全面总结了当时概率论的研究成果，明确给出概率的古典定义，拉普拉斯建立了一些基本概念，如“事件”“概率”“随机变量”“数学期望”等，从而完善了古典概率论，更重要的是，他在概率论中引入分析学工具，如差分方程、母函数等，从而实现概率论由单纯的组合计算向分析方法的过渡，将概率论的研究推向一个新阶段，拉普拉斯因此被认为是科学概率论的最卓越的创立者。

3.7.2 概率论的思想方法

(1) 利用偶然认识必然的数学思想。概率论揭示了偶然性与必然性之间的辩证关系。偶然性事件在个别试验中毫无规律可言，但在大量试验中却呈现出某种规律性，这种规律性就是这类事件所蕴含的必然性。概率论是从数量角度研究大量偶然性事件的规律的数学，从事物的偶然性中揭示出事物发展的必然性，偶然性服从于现象内部蕴藏的必然性。

(2) 从局部到总体的归纳方法。概率论的任务是通过随机样本的分析来推断总体特征。样本是总体的一部分，因此，概率论采用了从局部到总体的归纳方法，统计推断是归纳方法在随机数学中的创造性应用。一般地，从局部到总体、从特殊到一般的归纳方法不能保证其结论的正确性，但是统计推断的“局部”是随机样本，具有任意性，所以可以保证从这种“局部”推断出的总体特征的可信性。

例 3-11 甲、乙两人各自独立射击一次，甲射中目标的概率是 0.8，乙射中目标的概率是 0.9，则至少有一人射中目标的概率是多少？

分析 先计算两人均射不中的概率，其对立事件的概率即为所求。

解 设 A 为甲射中，B 为乙射中，则 $P(A) = 0.8$ ， $P(B) = 0.9$ ，至少有一人射

中目标的概率是

$$1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - (1 - 0.8) \times (1 - 0.9) = 0.98$$

例 3-12 设 50 件产品中, 45 件是正品, 5 件是次品, 从中任取 3 件, 求其中至少有 1 件是次品的概率。

分析 先计算对立事件的概率。

解 设 3 件产品中至少有 1 件是次品的事件为 A , 则其对立事件 \bar{A} 为 3 件产品都为正品, 所以有

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{45}^3}{C_{50}^3} \approx 0.28$$

例 3-13 从装有 2 个白球、3 个黑球的口袋中任取 3 个球, 设取出白球的个数为 x , 求 x 的概率分布和数学期望。

分析 x 的可能值为 0、1、2。

解 (1) 由题意, 可得

$$P(x=0) = \frac{C_2^0 C_3^3}{C_5^3} = 0.1$$

$$P(x=1) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = 0.6$$

$$P(x=2) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = 0.3$$

(2) x 的数学期望

$$E(x) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.3 = 1.2$$

问题研究

1. 查阅资料, 了解魏尔斯特拉斯函数的函数图像, 并基于计算机仿真方法进行验证。

2. 查阅资料, 了解戴德金的有理数分割实数理论、康托尔的有理数序列实数理论、魏尔斯特拉斯的有界单调序列实数理论。

3. 查阅资料, 理解曲率计算中密切圆半径计算公式的推导。

4. 查阅资料, 了解“高斯曲率”和“黎曼曲率”的区别。

5. 简述欧氏几何、罗氏几何、黎曼几何三者的区别和联系。

6. 查阅资料, 了解杨振宁的规范场理论与纤维丛理论的深刻联系, 进而了解现代物理学与几何学现代分支(如微分几何)的密切关联。

7. 查阅资料, 进一步理解哥德尔的不完备性定理。