引　言

0.1　评定产品可靠性的数量指标

可靠性是产品（部件或系统）在规定条件下和规定时间内完成规定功能的能力, 是反映产品质量水平的核心指标. 产品丧失规定功能称为失效或故障[1]. 通常, 用非负随机变量 X 描述产品寿命, 产品的失效分布函数为

$$F(t) = \Pr\{X \leqslant t\} \quad (t \geqslant 0),$$

密度函数为 $f(t)$, 即

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{或} \quad F(t) = \int_0^t f(u)\mathrm{d}u.$$

产品在时间 t 的可靠度函数为

$$\overline{F}(t) = \Pr\{X > t\} = \int_t^\infty f(u)\mathrm{d}u,$$

其表示产品在 $[0,t]$ 内不失效的概率. 产品的期望寿命为

$$\mu = \int_0^\infty tf(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \overline{F}(t)\mathrm{d}t.$$

在本书中, $0 < \mu < \infty$, $F(0-) = F(0+) = 0$, $F(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 1$[2].

产品的瞬时失效率函数（或称为瞬时故障率函数）为

$$h(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} = -\frac{1}{\overline{F}(t)}\frac{\mathrm{d}\overline{F}(t)}{\mathrm{d}t}.$$

当 Δt $(\Delta t > 0)$ 很小时, $h(t)\Delta t \approx \Pr\{t < X \leqslant t + \Delta t | X > t\}$, 表示产品在时间 t 正常工作的条件下, 在 $(t, t+\Delta t]$ 内的失效概率[1-2]. 为表述方便, 在本书中, $h(t)$ 统称为失效率函数, 不采用瞬时失效率函数或瞬时故障率函数的表述方式.

由失效率函数 $h(t)$, 得到累积风险函数 $H(t) = \int_0^t h(u)\mathrm{d}u$, 表示 $(0,t]$ 内的平均失效次数, 且

$$\overline{F}(t) = \exp\left[-\int_0^t h(u)\mathrm{d}u\right] = \mathrm{e}^{-H(t)} \quad \text{或} \quad H(t) = -\ln \overline{F}(t).$$

换而言之, 失效分布函数、可靠度函数、失效率函数以及累积风险函数之间可以相互确定[2]. 当 t 很小时,

$$\frac{H(t)}{1+H(t)} \leqslant F(t) \leqslant H(t) \leqslant \frac{F(t)}{1-F(t)}.$$

0.2　失效率与维修建模的关系

当产品发生故障时, 采取故障小修策略使故障产品恢复工作, 修理时间可以忽略不计. 用 $0=Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant \cdots \leqslant Y_n \leqslant \cdots$ 表示产品依次发生故障的时间, 那么, $X_n = Y_n - Y_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 表示依次发生故障之间的时间间隔.

当 $F(t)=\Pr\{X_1 \leqslant t\}$ $(t \geqslant 0)$ 时, 修理对产品失效率不产生干扰的数学表达式为[2]

$$\Pr\{X_n \leqslant x | X_1+X_2+\cdots+X_{n-1}=t\} = \frac{F(t+x)-F(t)}{\overline{F}(t)} \quad (x>0),$$

它表示工作年龄为 t 的产品在时间 $(t, t+x]$ 内的失效概率, 其中, $x>0$, $t \geqslant 0$, $n=2,3,\cdots$.

当产品的工作年龄为 t $(t \geqslant 0)$ 时, 期望剩余寿命为[2]

$$\gamma(t) = \int_0^\infty \left[1 - \frac{F(t+x)-F(t)}{\overline{F}(t)}\right] \mathrm{d}x.$$

因为 $[F(t+x)-F(t)]/\overline{F}(t)$ 为 t 的连续严格单调递增函数, 所以, $\gamma(t)$ 为 t 的连续严格单调递减函数, 且

$$\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\overline{F}(t)} \int_t^\infty \overline{F}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{h(\infty)}.$$

在维修建模中, 通常假设 $h(t)$ 为 t 的连续严格单调递增函数. 特别地, 当 $F(t) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$ 时, $h(t)=\lambda$. 本书将讨论在指数型失效分布下, ① 没有采取预防性更换策略的必要性, 只需要采取事后性更换策略; ② 没有采取周期性更换策略的必要性, 只需要采取故障小修策略.

第 1 章　基本维修策略

1.1　基于工作年龄的预防性更换策略

> **若产品达到指定工作年龄 T $(0 < T \leqslant \infty)$ 仍然正常工作, 则对产品采取预防性更换策略; 若产品在工作年龄 T 之前发生失效, 则对产品采取事后性更换策略.**

在年龄更换策略下，产品更换时间 $Z_k = \min\{T, X_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 具有独立同分布函数[2]

$$\Pr\{Z_k \leqslant t\} = \begin{cases} F(t), & t < T, \\ 1, & t \geqslant T, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中, X_k 为预防性或事后性更换后的产品寿命或失效时间.

通常, 预防性或事后性更换时间可以忽略不计. 此时, 相邻两次更换的期望周期时长为

$$E(L) = T\overline{F}(T) + \int_0^T t\mathrm{d}F(t) = \int_0^T \overline{F}(t)\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

用 c_T 和 c_F $(c_T < c_F)$ 分别表示预防性和事后性更换成本, 那么, 一个更换周期的期望成本为

$$E(C) = c_T\overline{F}(T) + c_F F(T). \tag{1.3}$$

根据更新极限定理[3], 产品在长期运行后的期望成本率为[1-2]

$$C(T) = \frac{c_T + (c_F - c_T)F(T)}{\int_0^T \overline{F}(t)\mathrm{d}t}. \tag{1.4}$$

此时, 问题变成如何选择最佳的 T^* $(0 < T^* \leqslant \infty)$, 使 $C(T)$ 达到最小.

最佳的预防性更换策略如下[2]：

(1) 如果 $h(\infty) > c_F/[\mu(c_F - c_T)]$ 成立, 那么, 存在唯一有限的 T^* $(0 < T^* < \infty)$ 满足方程

$$h(T)\int_0^T \overline{F}(t)\mathrm{d}t - F(T) = \frac{c_T}{c_F - c_T}. \tag{1.5}$$

此时, 期望成本率为

$$C(T^*) = (c_F - c_T)h(T^*). \tag{1.6}$$

(2) 如果 $h(\infty) \leqslant c_F/[\mu(c_F - c_T)]$ 成立, 那么 $T^* = \infty$. 此时, 期望成本率为 $C(\infty) = c_F/\mu$, 表示没有必要采取预防性更换策略, 最佳的策略为事后性更换策略.

例 1.1 当产品的寿命分布为威布尔分布时, $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda t)^m}$ $(m > 1)$,

$$\mu = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right), \qquad h(t) = m\lambda^m t^{m-1},$$

其中, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ $(\alpha > 0)$. 显然, $h(t)$ 为 t 的连续严格单调递增函数. 根据式 (1.5) 可知, 最佳的 T^* $(0 < T^* < \infty)$ 满足方程

$$m\lambda^m T^{m-1}\int_0^T \exp[-(\lambda t)^m]\mathrm{d}t + \exp[-(\lambda T)^m] = \frac{c_F}{c_F - c_T}. \tag{1.7}$$

此时, 期望成本率为

$$C(T^*) = (c_F - c_T)m\lambda(\lambda T^*)^{m-1}, \tag{1.8}$$

且近似的 $\widetilde{T}^*$ 满足[4]

$$\lambda\widetilde{T}^* = \left(\frac{1}{m-1}\frac{c_T}{c_F - c_T}\right)^{1/m}. \tag{1.9}$$

表 1.1 所示为数值计算结果.

表 1.1 当 $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t^2}$ 时, 最佳的 T^* 和近似的 $\widetilde{T}^*$

c_T/c_F	0.01	0.05	0.10	0.50	1.00
T^*	0.10	0.23	0.34	1.09	∞
$\widetilde{T}^*$	0.10	0.23	0.33	1.00	∞

特别地, 当 $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ 时, $h(t) = \lambda$, 式 (1.5) 的左边恒等于 0, 所以 $T^* = \infty$. 换而言之, 在指数型失效分布下, 产品失效率恒等于常数, 没有采取预防性更换策略的必要性, 只需采取事后性更换策略[4-5]. 此外, 当上述威布尔分布中 $m < 1$ 时, 可以得到相同的结论. 关于 $m \leqslant 1$ 情况下的年龄更换策略问题, 将在第 6 章展开讨论.

接下来, 考虑预防性和事后性更换时间不能忽略不计, 且均为随机变量的情况[4]. 预防性更换时间服从均值为 β_T 的分布函数 $G_T(t)$, 事后性更换时间服从均值为 β_F $(\beta_T < \beta_F)$ 的分布函数 $G_F(t)$. 此时, 产品的期望可用度为

$$A(T) = \frac{\int_0^T \overline{F}(t)\mathrm{d}t}{\int_0^T \overline{F}(t)\mathrm{d}t + \beta_F F(T) + \beta_T \overline{F}(T)}. \tag{1.10}$$

显然

$$\lim_{T\to 0} A(T)=0,\quad \lim_{T\to\infty} A(T)=\frac{\mu}{\mu+\beta_F}.$$

利用相同的解析方法得到唯一有限的 T_A^* $(0<T_A^*<\infty)$, 使 $A(T)$ 达到最大, 且满足方程

$$\frac{\beta_F F(T_A^*)+\beta_T\overline{F}(T_A^*)}{\int_0^{T_A^*}\overline{F}(t)\mathrm{d}t}=(\beta_F-\beta_T)h(T_A^*). \tag{1.11}$$

如果要指定某个可用度取值 A 作为最小化 $C(T)$ 的约束条件, 那么 A 满足不等式

$$\frac{\mu}{\mu+\beta_F}<A\leqslant\frac{1}{(\beta_F-\beta_T)h(T_A^*)+1}. \tag{1.12}$$

同理, 如果要指定某个成本率取值 C 作为最大化 $A(T)$ 的约束条件, 那么 C 满足不等式

$$(c_F-c_T)h(T^*)\leqslant C\leqslant\frac{c_F}{\mu}. \tag{1.13}$$

用 T_1 和 T_2 $(T_1\leqslant T_2)$ 表示方程 $A(T)=A$ 的两个解, 得到 $T_1\leqslant T_A^*\leqslant T_2$. 以 $A(T)\geqslant A$ 为约束条件, 式 (1.5) 中的 T^* 修改如下：

(1) 如果 $T^*\leqslant T_1$ 成立, 那么 T^* 修改为 T_1, 来满足可用度约束条件.

(2) 如果 $T_1<T^*<T_2$ 成立, 那么 T^* 保持不变, 此时, T^* 满足可用度约束条件.

(3) 如果 $T^*\geqslant T_2$ 成立, 那么 T^* 修改为 T_2, 来满足可用度约束条件.

用 T_3 和 T_4 $(T_3\leqslant T_4)$ 表示方程 $C(T)=C$ 的两个解, 得到 $T_3\leqslant T^*\leqslant T_4$. 以 $C(T)\leqslant C$ 为约束条件, 方程 (1.11) 中的 T_A^* 修改如下：

(1) 如果 $T_A^*\leqslant T_3$ 成立, 那么 T_A^* 修改为 T_3, 来满足成本率约束条件.

(2) 如果 $T_3<T_A^*<T_4$ 成立, 那么 T_A^* 保持不变, 此时, T_A^* 满足成本率约束条件.

(3) 如果 $T_A^*\geqslant T_4$ 成立, 那么 T_A^* 修改为 T_4, 来满足成本率约束条件.

1.2　带有故障修理的周期性更换策略

当产品发生故障时, 采取故障小修策略使故障产品恢复工作, 修理对产品失效率不产生干扰. 为防止不断增加的累积修理成本, 在工作年龄 JT $(J=1,2,\cdots)$ 采取周期性更换策略.

在周期性更换策略下, 用 c_M 和 c_T 分别表示故障小修成本与周期性更换成本, 那么, 期望成本率为[1-2]

$$C(T)=\frac{1}{T}[c_M H(T)+c_T]. \tag{1.14}$$

最佳的周期性更换策略如下[2]：

(1) 如果 $\int_0^\infty t\mathrm{d}h(t) > c_T/c_M$ 成立, 那么, 存在唯一有限的 T^* $(0 < T^* < \infty)$ 满足方程

$$Th(T) - H(T) = \frac{c_T}{c_M} \quad \text{或} \quad \int_0^T t\mathrm{d}h(t) = \frac{c_T}{c_M}. \tag{1.15}$$

此时, 期望成本率为

$$C(T^*) = c_M h(T^*). \tag{1.16}$$

(2) 如果 $\int_0^\infty t\mathrm{d}h(t) \leqslant c_T/c_M$ 成立, 那么 $T^* = \infty$. 此时, 期望成本率为 $C(\infty) = c_M h(\infty)$, 表示没有必要采取周期性更换策略, 最佳的策略为故障小修策略.

例 1.2 当产品的寿命分布为威布尔分布时, $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda t)^m}$ $(m > 1)$, $h(t) = m\lambda^m t^{m-1}$, $H(t) = (\lambda t)^m$, 根据式 (1.15) 得

$$T^* = \left[\frac{c_T}{(m-1)\lambda^m c_M}\right]^{1/m}. \tag{1.17}$$

此时, 期望成本率为

$$C(T^*) = c_M m\lambda(\lambda T^*)^{m-1}. \tag{1.18}$$

表 1.2 所示为数值计算结果.

表 1.2 当 $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t^2}$ 时, 最佳的 T^*

c_T/c_M	0.01	0.05	0.10	0.50	1.00
T^*	0.10	0.22	0.32	0.71	1.00

特别地, 当 $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ 时, $h(t) = \lambda$, 式 (1.15) 的左边恒等于 0, 所以 $T^* = \infty$. 换而言之, 在指数型失效分布下, 没有采取周期性更换策略的必要性, 只需要采取故障小修策略[4-5].

此外, 对比式 (1.15) 和式 (1.5), 当 $c_M = c_F - c_T$ 时,

$$Th(T) - H(T) \geqslant h(T)\int_0^T \overline{F}(t)\mathrm{d}t - F(T),$$

得到最佳的周期性更换时间小于或等于最佳的年龄更换时间[6].

以 J $(J = 1, 2, \cdots)$ 为决策变量, 在工作年龄 JT 采取周期性更换策略. 此时, 式 (1.14) 变为

$$C(J) = \frac{1}{JT}[c_M H(JT) + c_T]. \tag{1.19}$$

构建不等式 $C(J+1)-C(J)\geqslant 0$, 得

$$JH[(J+1)T]-(J+1)H(JT)\geqslant \frac{c_T}{c_M}, \tag{1.20}$$

得到不等式 (1.20) 的左边部分 $L(J)$ 为 J 的严格单调递增函数, 且

$$L(J)>\int_0^{JT}[h(JT)-h(t)]\mathrm{d}t>L(J-1).$$

由此, 如果 $\int_0^{\infty}[h(\infty)-h(t)]\mathrm{d}t>c_T/c_M$ 成立, 那么, 存在唯一有限且最小的 J^* ($1\leqslant J^*<\infty$) 满足不等式 (1.20), 使 $C(J)$ 达到最小, 否则 $J^*=\infty$.

对于上述周期性更换策略, 在工作年龄 jT ($j=0,1,2,\cdots,J-1$) 采取不完美的预防性维修策略, 使产品的实际工作年龄 t 减少到维修前的 at ($0<a\leqslant 1$), 那么, 期望成本率为[2]

$$C(J)=\frac{1}{JT}\left[c_M\sum_{j=0}^{J-1}\int_{A_jT}^{(A_j+1)T}h(t)\mathrm{d}t+(J-1)c_P+c_T\right], \tag{1.21}$$

其中, $A_j=a+a^2+\cdots+a^j$ ($j=1,2,\cdots$) 且 $A_0=0$, c_P 为不完美的预防性维修成本. 特别地, 当 $a=1$ 和 $c_P=0$ 时, 式 (1.21) 变为式 (1.19).

最佳的 J^* ($1\leqslant J^*<\infty$) 满足不等式

$$\sum_{j=0}^{J-1}\left[\int_{A_JT}^{(A_J+1)T}h(t)\mathrm{d}t-\int_{A_jT}^{(A_j+1)T}h(t)\mathrm{d}t\right]\geqslant \frac{c_T-c_P}{c_M}. \tag{1.22}$$

接下来, 在工作年龄 jT ($j=1,2,\cdots,J-1$) 采取不完美的预防性维修策略, 使产品的实际失效率函数 $h(t)$ 减少到维修前的 $bh(t)$ ($0<b\leqslant 1$), 那么, 期望成本率为[2]

$$C(J)=\frac{1}{JT}\left[c_M\sum_{j=0}^{J-1}b^j\int_{jT}^{(j+1)T}h(t)\mathrm{d}t+(J-1)c_P+c_T\right]. \tag{1.23}$$

特别地, 当 $b=1$ 和 $c_P=0$ 时, 式 (1.23) 变为式 (1.19).

最佳的 J^* ($1\leqslant J^*<\infty$) 满足不等式

$$\sum_{j=0}^{J-1}\left[b^J\int_{JT}^{(J+1)T}h(t)\mathrm{d}t-b^j\int_{jT}^{(j+1)T}h(t)\mathrm{d}t\right]\geqslant \frac{c_T-c_P}{c_M}. \tag{1.24}$$

当产品的寿命分布为威布尔分布时, $F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t^m}$ ($m>1$), 不等式 (1.22) 变为

$$\lambda T^m\sum_{j=0}^{J-1}\left(A_{J+1}^m-A_J^m-A_{j+1}^m+A_j^m\right)\geqslant \frac{c_T-c_P}{c_M}. \tag{1.25}$$

不等式 (1.24) 变为

$$\lambda T^m \sum_{j=0}^{J-1} \left\{ b^J[(J+1)^m - J^m] - b^j[(j+1)^m - j^m] \right\} \geqslant \frac{c_T - c_P}{c_M}. \tag{1.26}$$

1.3 周期性与序贯性检测策略

采取检测策略发现产品故障, 对故障产品进行维修或更换. 如何确定检测间隔以权衡检测成本与故障停工成本, 是研究故障检测策略的基本问题. 典型的检测策略为周期性检测策略和序贯性检测策略.

产品寿命为随机变量 X, 具有分布函数 $F(t) = \Pr\{X \leqslant t\}$, 密度函数 $f(t) = \mathrm{d}F(t)/\mathrm{d}t$, 均值 $\mu = \int_0^{\infty} \overline{F}(t)\mathrm{d}t$, 失效率函数 $h(t) = f(t)/\overline{F}(t)$. 在时间 $T_0, T_1, \cdots (T_0 = 0$, 且 $T_0 < T_1 < \cdots < T_{k-1} < T_k < \cdots)$ 采取检测策略发现产品故障. 用 c_T 表示检测成本, c_F 表示事后性更换成本, c_D 表示单位时间故障停工成本.

当产品在时间 $[T_{k-1}, T_k]$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 内发生故障时, 期望检测与故障停工成本为

$$C(T_{k-1}, T_k) = \int_{T_{k-1}}^{T_k} [c_T k + c_D(T_k - t)]\mathrm{d}F(t). \tag{1.27}$$

根据式 (1.27), 直到检测到产品故障并采取更换策略, 期望成本为[2]

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{T}_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{T_k}^{T_{k+1}} [c_T(k+1) + c_D(T_{k+1} - t)]\mathrm{d}F(t) + c_F \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [c_T + c_D(T_{k+1} - T_k)]\overline{F}(T_k) - c_D\mu + c_F, \end{aligned} \tag{1.28}$$

其中, $\boldsymbol{T}_k = (T_1, T_2, \cdots)$ 为序贯性检测时间.

求 $C(\boldsymbol{T}_k)$ 关于 T_k 的导数并令其为 0, 最佳的序贯性检测时间 $\boldsymbol{T}_k^* = (T_1^*, T_2^*, \cdots)$ 满足方程[2]

$$T_{k+1} - T_k = \frac{F(T_k) - F(T_{k-1})}{f(T_k)} - \frac{c_T}{c_D}, \tag{1.29}$$

且 $\boldsymbol{T}_k^*$ 的数值计算过程如下:

(1) 利用 $c_T = c_D \int_0^{T_1} F(t)\mathrm{d}t$ 计算 T_1.

(2) 根据式 (1.29) 计算 $T_2, T_3, \cdots$.

(3) 计算 $\delta_k = T_{k+1} - T_k$, 当 $\delta_k > \delta_{k-1}$ 时, 减少 T_1, 重复步骤 (2); 当 $\delta_k < 0$ 时, 增加 T_1, 重复步骤 (2).

(4) 按照上述步骤, 得到 $T_1 < T_2 < \cdots$, 那么, $T_k^* = (T_1^*, T_2^*, \cdots)$, 其中, $T_1^* = T_1$, $T_2^* = T_2, \cdots$.

相邻两次更换的期望周期时长为

$$E(L) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{k+1}[F(T_{k+1}) - F(T_k)] = \sum_{k=0}^{\infty} (T_{k+1} - T_k)\overline{F}(T_k), \tag{1.30}$$

期望成本率为[2]

$$C(T_k) = \frac{c_T \sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{F}(T_k) - c_D\mu + c_F}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} (T_{k+1} - T_k)\overline{F}(T_k)} + c_D. \tag{1.31}$$

当 $T_k = kT$ 时, 上述序贯性检测策略变为周期性检测策略.

例 1.3 当 $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ 时, 式 (1.28) 变为

$$C(T) = \frac{c_T + c_D T}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda T}} - \frac{c_D}{\lambda} + c_F, \tag{1.32}$$

最佳的 T^* $(0 < T^* < \infty)$ 满足方程

$$\mathrm{e}^{\lambda T} - (1 + \lambda T) = \frac{c_T}{c_D/\lambda}. \tag{1.33}$$

此时, 期望成本为

$$C(T^*) = \frac{c_D}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda T^*} - 1) + c_F. \tag{1.34}$$

表 1.3 所示为数值计算结果.

表 1.3 当 $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ 时, 最佳的 λT^*

$\lambda c_T/c_D$	0.01	0.05	0.10	0.50	1.00
λT^*	0.14	0.30	0.42	0.86	1.15

当 $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ 时, 式 (1.31) 变为

$$C(T) = \frac{1}{T}\left[c_T - \left(\frac{c_D}{\lambda} - c_F\right)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda T})\right] + c_D. \tag{1.35}$$

最佳的 T^* $(0 < T^* < \infty)$ 满足方程

$$1 - (1 + \lambda T)\mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{c_T}{c_D/\lambda - c_F}. \tag{1.36}$$

当 $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t^m}$ $(m > 1)$ 时, 近似的 T_k^* 满足方程 $\lambda T_k^* \approx (k\lambda T^*)^{1/m}$, 其中, T^* 满足方程 (1.36)[7].

若产品在时间 $[T_{k-1}, T_k]$ $(k=1,2,\cdots)$ 内发生故障, 且故障停工成本从 T_{k-1} 开始计算, 则式 (1.28) 变为[2]

$$\begin{aligned} C(T_k) &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{T_k}^{T_{k+1}}[c_T(k+1)+c_D(T_{k+1}-T_k)]\mathrm{d}F(t)+c_F \\ &= c_T\sum_{k=0}^{\infty}\overline{F}(T_k)+c_D\sum_{k=0}^{\infty}(T_{k+1}-T_k)[\overline{F}(T_k)-\overline{F}(T_{k+1})]+c_F, \end{aligned} \tag{1.37}$$

最佳的序贯性检测时间 $T_k^*=(T_1^*, T_2^*, \cdots)$ 满足方程

$$T_{k+1}-2T_k+T_{k-1}=\frac{\overline{F}(T_{k+1})-2\overline{F}(T_k)+\overline{F}(T_{k-1})}{f(T_k)}-\frac{c_T}{c_D}. \tag{1.38}$$

当 $T_k=kT$ 和 $F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$ 时, 式 (1.38) 变为

$$(\mathrm{e}^{\lambda T}-1)-(1-\mathrm{e}^{-\lambda T})=\frac{c_T}{c_D/\lambda}. \tag{1.39}$$

用 $T_0=0<T_1<\cdots<T_{N-1}$ 表示序贯性检测时间, 如果在 T_N 没有检测到故障, 则采取预防性更换策略, 那么, 在 T_N 之前检测到故障的期望成本为

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{T_{k-1}}^{T_k}[c_Tk+c_D(T_k-t)+c_F]\mathrm{d}F(t), \tag{1.40}$$

在 T_N 采取预防性更换策略的期望成本为

$$(c_TN+c_F)\overline{F}(T_N), \tag{1.41}$$

其中, c_F 表示上述两种情况下的更换成本. 此时, 相邻两次更换的期望周期时长为

$$\begin{aligned} E(L) &= \sum_{k=1}^{N}T_k[F(T_k)-F(T_{k-1})]+T_N\overline{F}(T_N) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}(T_{k+1}-T_k)\overline{F}(T_k), \end{aligned} \tag{1.42}$$

期望成本率为[2]

$$C(T_k)=\frac{c_T\sum\limits_{k=0}^{N-1}\overline{F}(T_k)-c_D\int_0^{T_N}\overline{F}(t)\mathrm{d}t+c_F}{\sum\limits_{k=0}^{N-1}(T_{k+1}-T_k)\overline{F}(T_k)}+c_D. \tag{1.43}$$

当 $T_k=kT$ 和 $F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$ 时, 式 (1.43) 变为

$$C(T)=\frac{c_T}{T}-\frac{1}{\lambda T}(1-\mathrm{e}^{-\lambda T})\left(c_D-\frac{\lambda c_F}{1-\mathrm{e}^{-\lambda NT}}\right)+c_D. \tag{1.44}$$