

第 1 章 函数及其模型



学习目标

1. 掌握集合的相关定义,熟悉函数的概念与性质.
2. 理解初等函数、复合函数与分段函数的概念与特征.
3. 熟悉函数建模的概念与方法步骤.



素质目标

1. 提高学生的创新能力、拓展能力,加深数学思维.
2. 培养学生解决问题的能力,提升学生的数学素养,培养学生的实际应用能力.
3. 培养学生正确的学习态度和价值观.

1.1 集合与函数

1.1.1 集合、区间和邻域

1. 集合

在中学阶段,我们了解过集合的概念.一般来说,由一些确定的不同的研究对象构成的整体称为集合.构成集合的对象,称为集合的元素.

集合一般用大写英文字母 A, B, C, \dots 表示,集合中的元素用小写英文字母 a, b, c, \dots 表示.若 a 是集合 M 中的元素,则记为 $a \in M$.

构成集合的元素具有三个性质:确定性、互异性、无序性.

高等数学中常用数集及其记法如下.

- (1) 全体非负整数组成的集合称为非负整数集或自然数集,记为 \mathbf{N} .
- (2) 全体整数组成的集合称为整数集,记为 \mathbf{Z} .
- (3) 全体正整数组成的集合称为正整数集,记为 \mathbf{Z}^+ 或 \mathbf{N}^+ .
- (4) 全体有理数组成的集合称为有理数集,记为 \mathbf{Q} .
- (5) 全体实数组成的集合称为实数集,记为 \mathbf{R} .

2. 区间

通俗地讲,区间就是介于两实数 a 与 b 之间的一切实数的集合,其中 a, b 称为区间

的两个端点,当 $a < b$ 时,称 a 为左端点, b 为右端点.

区间可理解为实数集 \mathbf{R} 的子集,可分为有限区间和无限区间.

(1) 有限区间: 设 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$

闭区间: 若 $A = \{x | a \leq x \leq b\}$, 则集合 A 称为以 a, b 为端点的闭区间, 记为 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

开区间: 若 $A = \{x | a < x < b\}$, 则集合 A 称为以 a, b 为端点的开区间, 记为 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}$$

左半开区间: 若 $A = \{x | a < x \leq b\}$, 则集合 A 称为以 a, b 为端点的左半开区间, 记为 $(a, b]$, 即

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

右半开区间: 若 $A = \{x | a \leq x < b\}$, 则集合 A 称为以 a, b 为端点的右半开区间, 记为 $[a, b)$, 即

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$$

(2) 无限区间

无限区间是指 a 与 b 两端点中至少有一个端点是正无穷大或负无穷大. 为了表示正无穷大或负无穷大, 我们引入记号“ $+\infty$ ”表示正无穷大, “ $-\infty$ ”表示负无穷大, 则无限区间可分为

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\} \quad [a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\} \quad (-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}$$

以后在不需要辨明所讨论区间是否包含端点, 以及是有限区间还是无限区间的场合, 我们就简单地称它为“区间”, 且常用 I 表示.

3. 邻域

由于有时需要讨论函数在一点附近的变化情况, 为了描述某一点附近的点所组成的集合, 下面介绍邻域的概念.

定义 1-1 设 $a, \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 数集 $\{x | |x - a| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$, 即实数轴上到点 a 的距离小于定长 δ 的点的全体, 称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$. 点 a 与数 δ 分别称为这个邻域的中心与半径. 如图 1-1 所示.

$$U(a, \delta) = \{x | |x - a| < \delta, x \in \mathbf{R}\} = (a - \delta, a + \delta)$$

当泛指某个邻域时, 也可以简单地记作 $U(a)$, 它表示以点 a 为中心的任何开区间.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后, 称为点 a 的空心(去心) δ 邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$, 如图 1-2 所示.

$$\begin{aligned} \dot{U}(a, \delta) &= \{x | 0 < |x - a| < \delta\} \\ &= (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \end{aligned}$$



图 1-1

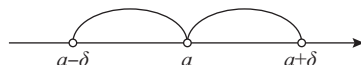


图 1-2

1.1.2 函数的概念

在自然现象或生产过程中,同时出现的某些变量,往往存在着相互依赖、相互制约的关系,其中,变量间的关系在数学上称为函数.

1. 函数的定义

定义 1-2 设 x 和 y 是两个变量, D 是 \mathbf{R} 的非空子集,对于任意 $x \in D$,变量 y 按照某个对应关系 f 有唯一确定的实数与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$. x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数的定义域,数集 $\{f(x)|x \in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域. 当 $x=x_0$ 时对应的函数值记为 $f(x_0)$.

由函数的定义可以看出,确定函数有两个要素:定义域和对应法则. 所以,两个函数相同的充分必要条件是两个函数的定义域和对应法则均相同.

在实际问题的应用中,函数的定义域要根据问题的实际意义来确定. 在数学的研究学习中,有时候不需要考虑函数的实际意义,对于用解析式表示的函数,定义域就是使解析式有意义的自变量的全体. 例如,函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$,函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为 $(-1,1)$.

【例 1-1】 判断下列函数是否表示相同的函数关系.

(1) 函数 $y=\frac{x^2}{x}$ 和 $y=x$;

(2) 函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$.

解: (1) 因为函数 $y=\frac{x^2}{x}$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0$,而函数 $y=x$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$,

它们的定义域不同,所以说函数 $y=\frac{x^2}{x}$ 与 $y=x$ 表示不同的函数关系.

(2) 函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $x \in \mathbf{R}$,而 $y=\sqrt{x^2}=|x|$,因此函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 有相同的定义域和对应法则,所以说函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 表示相同的函数关系.

【例 1-2】 求函数 $y=\frac{\lg(x+1)}{x-1}$ 的定义域.

解: 根据对数的真数必须为正数且分数的分母不能为零,可以得到该函数的自变量应满足不等式组 $\begin{cases} x+1>0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$,解得 $x>-1$ 且 $x \neq 1$,即

$$D=(-1,1) \cup (1,+\infty)$$

2. 函数的表示法

表示一个函数通常有三种方法:表格法、图像法和公式法.

(1) 表格法就是用表格来表达函数关系. 这种方法的优点是查找函数值比较方便, 缺点是数据有限、不直观, 不便于确定自变量和因变量的对应关系.

例如, 某公司 2021 年上半年某产品的销量如表 1-1 所示.

表 1-1 1—6 月某产品销量 单位: 个

月份 t	1	2	3	4	5	6
销量 y	1 900	1 850	2 000	1 950	1 920	1 890

(2) 图像法就是用图像来表达函数关系. 这种方法直观性强, 并可观察函数的变化趋势. 但根据函数图形求出的函数值一般准确度不高, 且不便于研究两个变量之间的关系.

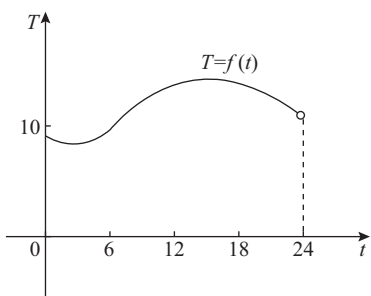


图 1-3

例如, 某海域昼夜水温 T 和时间 t 是两个变量, 通过自动温度记录仪可以描绘出一条曲线, 如图 1-3 所示. 这个图形表示了气温 T 和时间 t 之间的函数关系.

再如, 股票曲线反映股票当天的价格随时间的变化波动情况. 该曲线是以时间为自变量, 以价格为因变量的函数图像.

(3) 公式法就是用数学表达式表示函数关系. 例如 $y = (1+x)^2$, 这种方法的优点是形式简明, 便于理论研究与数值计算, 缺点是不够直观.

在用公式法表示的函数中, 有以下两种需要指明的情形.

① 分段函数: 在自变量不同变化的范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数, 称为分段函数.

例如, 绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

电学中的常用函数单位阶跃函数 $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.

【例 1-3】 求分段函数 $f(x)$ 的定义域和值域.

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 0 \\ -x-1, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

解: 如图 1-4 所示, $f(x)$ 的定义域为 $D = \{x \mid -1 \leq x < 1\}$; 其值域为 $Z = \{f(x) \mid -1 < f(x) < 1\}$.

函数由解析式给出时, 其定义域是使解析式有意义的一切自变量的值. 为此, 求函数的定义域时应遵守以下原则:

- 分式中分母不能为零;
- 偶次根式的被开方数非负;

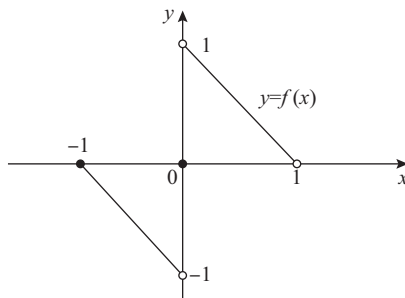


图 1-4

- 对数函数中真数部分大于零;
- 反三角函数 $\arcsin x$ 、 $\arccos x$, 要满足 $|x| \leq 1$;
- 多个函数和、差、积、商后形成的函数的定义域, 应是这几个函数定义域的交集;
- 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

② 显函数与隐函数: 若因变量 y 用自变量 x 的解析式直接表示出来, 即等号一端只有 y , 而另一端是 x 的表达式, 这样的函数称为显函数. 例如, $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \ln(x+1)$ 都是显函数.

若两个变量 x 与 y 之间的函数关系用方程 $F(x, y) = 0$ 来表示, 则称为隐函数. 我们称方程 $F(x, y) = 0$ 在区间 I 内确定了一个隐函数. 例如, $3x + y - 1 = 0$, $e^{x+y} - xy = 0$ 都是隐函数.

有的隐函数可以从关系式 $F(x, y) = 0$ 中解出 y , 此时隐函数转换为显函数. 例如, 由 $3x + y - 1 = 0$ 解出 y , 得显函数 $y = -3x + 1$. 把一个隐函数化成显函数的过程称为“隐函数的显化”. 多数隐函数不能从关系式 $F(x, y) = 0$ 中解出 y , 因此不能转换为显函数, 例如 $e^{x+y} - xy = 0$.

3. 反函数

很多问题都有相应的反问题, 对函数 $y = f(x)$ 来说, 给定自变量 x 的值求因变量 y 的值很容易, 直接将 x 的值代入函数表达式即可. 但在实际问题中, 可能遇到已知函数 y 的值, 求自变量 x 的对应值的情况. 为了方便研究, 我们引入反函数的概念.

定义 1-3 设 $y = f(x)$ 是 x 的函数, 其值域为 Z , 如果对于 Z 中的每一个 y 值, 都有一个确定的且满足 $y = f(x)$ 的 x 值与之对应, 则得到一个定义在 Z 上的以 y 为自变量, x 为因变量的新函数, 我们称之为 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$. 习惯上总是用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 所以通常把 $x = f^{-1}(y)$ 改写为 $y = f^{-1}(x)$.

对于函数而言, 单调函数一定有反函数, 而且单调增加(减少)函数的反函数也是单调增加(减少)的. 若从几何图形来看, 一个函数当且仅当它的图形与任意一条水平直线至多相交一次时, 才有反函数. 如果函数在其定义域内不是单调的, 则它没有反函数. 此时, 我们可以限制自变量的取值范围, 使得在这个范围内, 函数具有单调性, 从而求得此范围内的反函数. 例如, 对于 $y = x^2$ 在定义域内不单调, 所以没有反函数. 但如果限制 $x \in [0, +\infty)$, 则可得到反函数 $y = \sqrt{x}$; 若限制 $x \in (-\infty, 0]$, 则可得到反函数 $y = -\sqrt{x}$.

在同一直角坐标系下, 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

由反函数的定义可以发现, 函数 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数, 且 $f^{-1}[f(x)] = x$, $f[f^{-1}(y)] = y$.

【例 1-4】 求 $y = 2^{x-1}$ 的反函数.

解: 由 $y = 2^{x-1}$ 解得 $x = 1 + \log_2 y$, 然后交换 x 和 y , 得 $y = 1 + \log_2 x$. 即 $y = 1 + \log_2 x$ 是 $y = 2^{x-1}$ 的反函数.

1.1.3 函数的特性

下面讨论的函数的定义域都假设为 D .

1. 奇偶性

如果函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对于任意 $x \in D$ 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数; 若对于任意 $x \in D$ 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

关于函数的奇偶性, 有以下结论.

- (1) 偶函数的图像关于 y 轴对称, 奇函数的图像关于原点对称.
- (2) 判断一个函数是奇函数还是偶函数, 首先要看它的定义域是否关于原点对称, 然后再判断它的奇偶性.
- (3) 奇(偶)函数有以下运算性质.
 - ① 奇函数的代数和仍是奇函数, 偶函数的代数和仍是偶函数.
 - ② 奇数个奇函数的乘积是奇函数, 偶数个奇函数的乘积是偶函数.
 - ③ 偶函数与偶函数的乘积仍是偶函数, 奇函数与偶函数的乘积是奇函数.
 - ④ 奇函数与奇函数的复合函数是奇函数, 奇函数与偶函数的复合函数是偶函数, 偶函数与偶函数的复合函数是偶函数.

【例 1-5】 判断下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad (2) f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$$

解: (1) 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的定义域为 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, D 关于原点对称. 任意取 $x \in D$, 则 $-x \in D$, 有

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

所以 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 是偶函数.

(2) 函数 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ 的定义域为 $D = (-1, 1)$, D 关于原点对称. 任意取 $x \in D$, 则 $-x \in D$, 有

$$f(-x) = \lg \frac{1+x}{1-x} = \lg \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\lg \frac{1-x}{1+x} = -f(x)$$

所以 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ 是奇函数.

2. 单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内随 x 的增大而增大, 即对于 I 内的任意两点 x_1, x_2 , 当

$x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;反之,当 $x_2 < x_1$ 时,有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

例如, $f(x) = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 是单调增加的; $f(x) = x^2 + 1$ 在区间 $[0, +\infty)$ 是单调增加的,在区间 $(-\infty, 0]$ 是单调减少的.可见,函数的单调性一定要针对某个区间而言,同一函数在不同区间上的单调性有可能是不同的.

3. 周期性

对于函数 $f(x)$,如果存在一个常数 $T \neq 0$,对任意 $x \in D$,有 $x + T \in D$,且 $f(x + T) = f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为周期函数, T 为函数的周期.通常所说的周期函数的周期 T 是指满足上述条件的最小正周期.

例如, $y = \sin x, y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数, $y = \tan x, y = \cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

关于函数的周期性,我们有以下结论.

- (1) 若函数的周期为 T ,则在每个长度为 T 的相邻区间上,函数图像有相同的形状.
- (2) 若函数的周期为 T ,则 $nT (n \in \mathbf{Z})$ 也是函数的周期.
- (3) 若 $f(x)$ 的周期为 T ,则函数 $f(ax + b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$, ($a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$).

4. 有界性

对于函数 $f(x)$,若存在正常数 M 在区间 $I \subseteq D$ 内,对任意 $x \in I$,对应的函数值均有 $|f(x)| \leq M$ (可以没有等号),则称 $f(x)$ 在区间 I 内有界;如果不存在这样的正常数 M ,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内无界.

例如, $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界; $y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界,但在 $[-1, 2]$ 上有界.与单调性类似,函数的有界性也必须针对相应的区间而言,同一函数在不同区间上的有界性也可能不同.

常见的在整个定义域上有界的函数有 $y = \sin x, y = \cos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 等.



思考题 1.1

点 a 的空心邻域与点 a 的邻域有何区别?



练习题 1.1

1. 用区间表示满足下列不等式的集合.

- (1) $|x - 1| \leq 3$
- (2) $|x - 2| \geq 3$
- (3) $x^2 - 2x - 3 < 0$

2. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}} \quad (2) y = \ln \frac{1-x}{1+x}$$

3. 设 $f(x) = e^{\sin x^2}$, 求: $f(0), f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right), f[f(0)]$.

应用实践题 1.1

杭州电视台应某广告公司特约播放甲、乙两部连续剧. 经调查, 播放甲连续剧时, 平均每集的收视观众为 30 万人次; 播放乙连续剧时, 平均每集的收视观众为 25 万人次. 广告公司要求电视台每周两部剧共播放 8 集.

(1) 设每周播放 x 集甲连续剧, 甲、乙两部连续剧的收视观众人次总和为 y 万人次, 请找出 x 和 y 之间的关系.

(2) 已知电视台每周只能为该广告公司提供不超过 360min 的播放时间, 并且播放甲连续剧每集需 55min, 播放乙连续剧每集需 40min. 求电视台每周应播放甲、乙两部连续剧各多少集, 才能使每周收看甲、乙连续剧的观众人次总和最大, 并求出最大值.

1.2 基本初等函数与分段函数

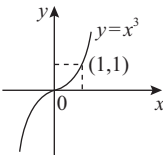
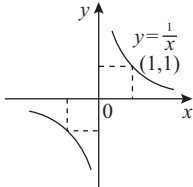
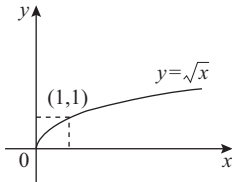
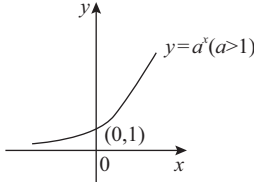
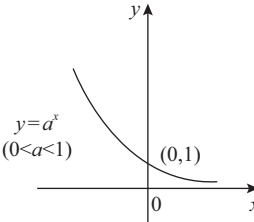
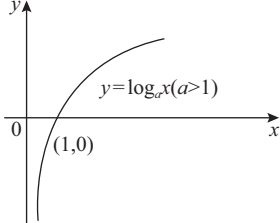
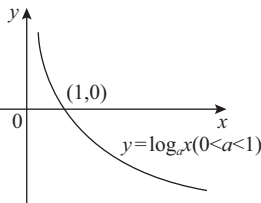
1.2.1 基本初等函数

我们通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 它们的图像、性质如表 1-2 所示.

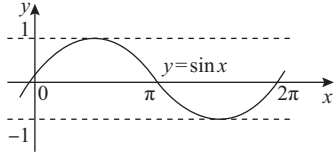
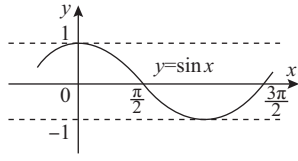
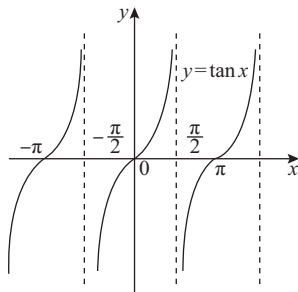
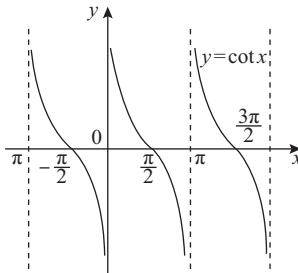
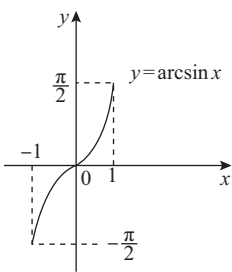
表 1-2 基本初等函数

函数名称	函数	定义域与值域	图 像	性 质
幂函数	$y=x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 单调增加
	$y=x^2$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		偶函数, 在 $(-\infty, 0)$ 内 单调减少 在 $(0, +\infty)$ 内 单调增加

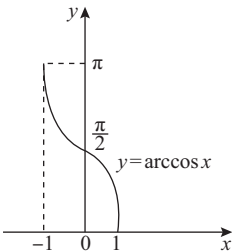
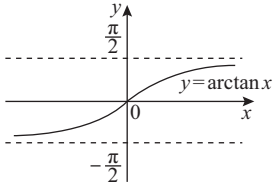
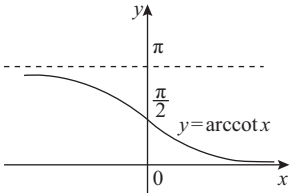
续表

函数名称	函数	定义域与值域	图 像	性 质
幂函数	$y = x^3$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 单调增加
	$y = x^{-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$		奇函数, 单调减少
	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$x \in [0, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		单调增加
指数函数	$y = a^x (a > 1)$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		单调增加
	$y = a^x (0 < a < 1)$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		单调减少
对数函数	$y = \log_a x (a > 1)$	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		单调增加
	$y = \log_a x (0 < a < 1)$	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		单调减少

续表

函数名称	函数	定义域与值域	图 像	性 质
三角函数	$y = \sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		奇函数, 周期 2π , 有界, 在 $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ 内单调增加, 在 $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ 内单 调减少
	$y = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		偶函数, 周期 2π , 有界, 在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 内单调减少, 在 $[2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi]$ 内单 调增加
	$y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 周期 π , 在 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单 调增加
	$y = \cot x$	$x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 周期 π , 在 $(k\pi, k\pi + \pi)$ 内单调减少
反三角函数	$y = \arcsin x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$		奇函数, 单调 增加, 有界

续表

函数名称	函数	定义域与值域	图 像	性 质
反三角函数	$y = \arccos x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$		单调减少, 有界
	$y = \arctan x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$		奇函数, 单调增加, 有界
	$y = \operatorname{arccot} x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, \pi)$		单调减少, 有界

三角函数中还有正割函数 $y = \sec x$ 和余割函数 $y = \csc x$, 其中 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$, 且 $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$, $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$.

1.2.2 复合函数

先看一个例子. 设, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $y = \sin u$, $u = x^2$, 有 $u = x^2 \in [0, +\infty)$, 又通过 $y = \sin u$ 得到 $y = \sin x^2 \in [-1, 1]$, 即通过中间变量 u , 从而构成 y 是 x 的函数, 于是称 $y = \sin x^2$ 是 $y = \sin u$ 和 $u = x^2$ 的复合函数. 由此可以看到, 通过复合的方法可以产生一个新的函数. 这类函数是在今后的学习中经常遇到的. 下面给出复合函数的定义.

定义 1-4 设有两个函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 且 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集非空, 那么 y 通过 u 的作用成为 x 的函数, 称 $y = f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y = f(u)$ 及函数 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, u 称为中间变量.

实际问题中, 经常会出现复合函数. 例如, 做自由落体运动的物体, 其动能 $E = \frac{1}{2}mv^2$ 速度 $v = gt$, 它们所构成的复合函数是 $E = \frac{1}{2}mg^2t^2$.

【例 1-6】 设 $f(x) = x^3 - x$, $\varphi(x) = \sin 2x$, 求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$.

解: 由复合函数的定义可知

$$f[\varphi(x)] = (\sin 2x)^3 - \sin 2x$$

$$\varphi[f(x)] = \sin 2(x^3 - x)$$

【例 1-7】 设 $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 2^x, & x > 0 \end{cases}$, 求 $f(-1)$, $f(0)$ 及 $f[f(-1)]$.

解: $f(-1) = 2 \times (-1) + 3 = 1$

$$f(0) = 2 \times 0 + 3 = 3$$

$$f[f(-1)] = f(1) = 2^1 = 2$$

【例 1-8】 下列复合函数是由哪些基本初等函数或简单初等函数复合而成的?

(1) $y = \arcsin(\ln x)$

(2) $y = \sin^2(3x+1)$

(3) $y = \ln(\tan e^{x^2+2\sin x})$

解: (1) 外层是反正弦函数, 即 $y = \arcsin u$, 内层是对数函数, 即 $u = \ln x$. 所以 $y = \arcsin(\ln x)$ 是由 $y = \arcsin u$ 、 $u = \ln x$ 复合而成的.

(2) 最外层是幂函数, 即 $y = u^2$, 从外向内第二层是正弦函数, 即 $u = \sin v$, 最内层是多项式函数, 即 $v = 3x+1$. 所以 $y = \sin^2(3x+1)$ 是由 $y = u^2$ 、 $u = \sin v$ 、 $v = 3x+1$ 复合而成的.

(3) 最外层是对数函数, 即 $y = \ln u$, 次外层是正切函数, 即 $u = \tan v$, 从外向内第三层是指数函数, 即 $v = e^w$, 最内层是简单初等函数, 即 $w = x^2 + 2\sin x$. 所以 $y = \ln(\tan e^{x^2+2\sin x})$ 是由 $y = \ln u$ 、 $u = \tan v$ 、 $v = e^w$ 、 $w = x^2 + 2\sin x$ 复合而成的.

注意:

(1) 并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数. 如 $y = \sqrt{u-2}$, $u = \sin x$ 在实数范围内就不能进行复合. 这是因为 $u = \sin x$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 中任何 x 的值对应的 u 值都小于 2, 它们都不能使 $y = \sqrt{u-2}$ 有意义. 因此, 两函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 能复合的充要条件是: 内函数 $u = \varphi(x)$ 的值域与外函数 $y = f(u)$ 的定义域的交集非空.

(2) 复合函数的复合过程是由内到外, 函数“套”函数而成的; 分解复合函数时, 是采取由外到内、层层分解的方法, 将复合函数拆分成若干基本初等函数或基本初等函数的四则运算的函数(简单初等函数).

1.2.3 分段函数

引例 1-1 某城市出租车的基本收费标准是: 行驶里程如果不超过 3 公里, 收费 13 元, 如果超过 3 公里, 则超出部分按每公里 2.3 元收费, 另外每次加收 1 元燃油附加费. 求行驶里程数 x 公里与费用 y 元之间的函数关系.

分析: 当 $x \leq 3$ 时, $y = 13 + 1 = 14$; 当 $x > 3$ 时, $y = 13 + (x - 3) \times 2.3 + 1 = 7.1 + 2.3x$. 所以, 行驶里程数 x 公里与费用 y 元之间的函数关系为

$$y = \begin{cases} 14, & 0 < x \leq 3 \\ 7.1 + 2.3x, & x > 3 \end{cases}$$

像上述函数这样,在其定义域内,当自变量在不同的范围内取值时,需用不同的数学式子表示,这类函数称为分段函数.

例如,符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 是一个分段函数,定义域为 $(-\infty, +\infty)$,其图形如图 1-5 所示.

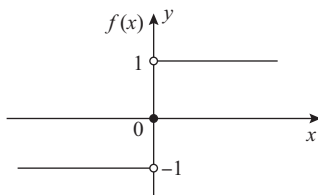


图 1-5

【例 1-9】 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$, 求 $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 和 $f(2)$, 并作出函数图形.

解: $f(0) = 2^0 = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $f(2) = 1$. 函数图形如图 1-6 所示.

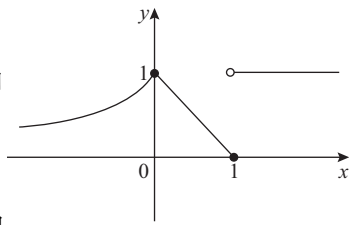


图 1-6



思考题 1.2

与初等函数相比较,分段函数在计算和应用时,应该注意哪些问题?



练习题 1.2

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \arccos \frac{1}{x} \quad (2) f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 2 \\ (x-2)^2, & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x-4, & x > 0 \end{cases}, \text{ 求 } f(0), f(-1), f(2), f[f(e+2)].$$

$$3. \text{ 设 } f(x) = 1-x^2, \varphi(x) = \cos x, \text{ 求 } f[\varphi(x)] \text{ 和 } \varphi[f(x)].$$

4. 写出下列各函数的复合过程.

$$(1) y = \arctan x^2 \quad (2) y = e^{\cos^2 x}$$

$$(3) y = (1 + \ln x)^3 \quad (4) y = \ln \sqrt{x + \sin x}$$



应用实践题 1.2

某厂生产了 1 600t 某种产品,该产品定价为 150 元/t,当销售量不超过 800t 时,按原

价出售;当超过 800t 时,超过部分按八折出售.试求销售收入与销售量之间的函数关系.

1.3 函数建模简述

1.3.1 数学建模的全过程

数学建模的全过程分为以下 7 个步骤.

(1) 模型准备:了解问题的实际背景,明确其实际意义,掌握对象的各种信息,用数学语言描述问题.

(2) 模型假设:根据实际对象的特征和建模的目的,对问题进行必要的简化,并用精确的语言提出一些恰当的假设.

(3) 模型建立:在假设的基础上,利用适当的数学工具刻画各变量之间的数学关系,建立相应的数学结构(尽量用简单的数学工具).

(4) 模型求解:利用获取的数据资料,对模型的所有参数作出计算(估计).

(5) 模型分析:对所得的结果进行数学上的分析.

(6) 模型检验:将模型分析结果与实际情形进行比较,以此来验证模型的准确性、合理性和适用性.如果模型与实际较吻合,则要对计算结果给出其实际含义,并进行解释;如果模型与实际吻合较差,则应该修改假设,再次重复建模过程.

(7) 模型应用:应用方式因问题的性质和建模的目的而异.

数学建模是运用数学的语言和方法,通过抽象、简化,建立适合的数学模型近似刻画并“解决”实际问题的一种强有力的数学手段.

1.3.2 数学模型的分类

数学模型可以按照不同的方式分类,下面介绍常用的几种分类方式.

(1) 按照所用方法分类可分为初等数学模型、几何模型、微分方程模型、图论模型、数学规划模型等.

(2) 按照应用领域分类可分为人口模型、生态模型、交通流量模型、环境模型、城镇规划模型、水资源模型、污染模型、生物学数学模型、医学数学模型、地质学数学模型、气象学数学模型、经济学数学模型、社会学数学模型、物理学数学模型、化学数学模型、天文学数学模型、工程学数学模型等.

(3) 按照建模目的分类可分为描述模型、分析模型、预报模型、决策模型、优化模型、控制模型等.

(4) 按照表现特点分类.数学模型按是否考虑随机因素的影响分为确定性模型和随机性模型,近年来随着数学的发展,又出现了突变性模型和模糊性模型;按是否考虑时间因素引起的变化分为静态模型和动态模型;按模型基本关系是否是线性分为线性模型和非线性模型,如函数、微分方程是否是线性的;按模型中的变量(主要是时间变量)为离散

还是连续的可分为离散模型和连续模型.

虽然现实中大多数问题都是随机性的、动态的、非线性的,但由于确定性、静态、线性模型更容易处理,因此建模时通常先考虑确定性、静态、线性模型.连续模型便于利用微积分方法求解,可做理论分析,而离散模型更适合在计算机上做数值计算,所以用哪种模型要根据具体问题和个人习惯而定.实际建模过程中,将连续模型离散化,或离散变量视为连续量都是经常采用的处理方法.

(5) 按照了解程度分类可分为白箱模型、灰箱模型、黑箱模型.白箱模型主要包括用力学、热学、电学等一些机理比较清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题,这方面的模型大多已经基本确定,主要研究的是相关优化设计和控制等问题;灰箱模型主要指生态、气象、经济、交通等领域中机理尚不十分清楚的现象,在建立和改善模型方面还需要深入研究;黑箱模型主要指生命科学和社会科学等领域中一些机理很不清楚的现象.当然,白箱、灰箱、黑箱模型之间并没有明显的界限,随着科技的发展和人类认识世界能力的增强,黑箱必将逐渐变成白箱.

现实中,我们描述一个模型往往不是只表达一种属性,而是同时表达多重属性,如确定性线性模型、连续动态模型、非线性数学规划模型等.

1.3.3 数学建模的方法与步骤

数学建模的方法大致有机理分析法、测试分析法和计算机仿真法.机理分析法要求分析事物的内在机理和规律,一般从基本物理定律以及系统的结构数据来推导模型.机理分析法包括用以建立变量之间函数关系的比例分析法;以求解离散问题为主的代数法;用以解决社会学和经济学等领域的决策、对策问题的逻辑法;以解决两个或两个以上变量之间的变化规律为主的微分方程建模法.测试分析法则是指从大量的观测数据中运用统计方法建立数学模型,常用的有多元回归分析法和时序分析法等.比较理想的是用机理分析法确定模型,然后用测试分析法估计参数.

建立数学模型、解决实际问题的过程因为题目不同、要求不同有较大区别,没有统一的模式.下面介绍一个简单的案例,说明数学建模的大致思路和步骤.

问题描述:甲、乙两地路程为 36km,两地间的道路上下坡交替出现.某人骑自行车从甲地到乙地需 192min,而从乙地到甲地可少用 24min.已知下坡比上坡平均每小时多行 5km,求上坡和下坡的速度分别是多少?

问题分析如下.

(1) 由于从甲地到乙地的道路上下坡交替出现,所以在实际行驶中也将上坡、下坡交替行驶.甲地到乙地道路示意图如图 1-7 所示.



图 1-7

由于不清楚道路每段上下坡的长度、弧度、角度等具体情况,要想利用传统运动学规律分段直接计算是不可能的,而且在每个上坡、下坡的速度也有区别,要想精确计算每时每刻的速度显然也不可能.根据题目信息,可以考虑适当简化问题.

(2) 转换思路,将上坡路、下坡路拼接在一起,拼接后甲地到乙地道路示意图如图 1-8 所示,且假定上坡、下坡速度是恒定的,即求平均速度.

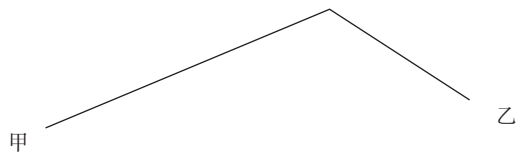


图 1-8

(3) 设从甲地到乙地上坡路长为 y km,则下坡路长为 $(36-y)$ km,上坡速度为 x km/h,则下坡速度为 $(x+5)$ km/h.

(4) 根据以上信息,利用运动学规律可建立方程组模型

$$\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{36-y}{x+5} = \frac{16}{5} \\ \frac{36-y}{x} + \frac{y}{x+5} = \frac{14}{5} \end{cases}$$

(5) 解上述方程组得两组解 $x=10, y=24; x=-3, y=444/25$.显然第二组解没有现实意义,从而上、下坡速度分别为 10km/h、15km/h.

(6) 进一步思考,当从甲地到乙地,再从乙地到甲地时,上、下坡的总和都是 36km,而一个来回所用的时间恰好是 6h,因此在上坡速度为 x km/h 的条件下,可建立方程模型

$$\frac{36}{x} + \frac{36}{x+5} = 6$$

显然这个模型比前一个更简洁、合理.

上述案例只是一个简单的应用问题,而实际问题要复杂得多.但是其求解过程却已经反映了数学建模的基本思想和步骤,即根据建模目的和问题背景做出适当的简化假设(上、下坡速度恒定);用数学的语言(各种字母、符号)描述问题中的变量;利用已知条件列出二元代数方程组,即数学模型;通过解方程组求出两组解;通过实践检验排除不合理的解;求得方程解,即上、下坡速度分别为 10km/h、15km/h;对模型进行改进.

一般地,数学建模的步骤大致如图 1-9 所示.

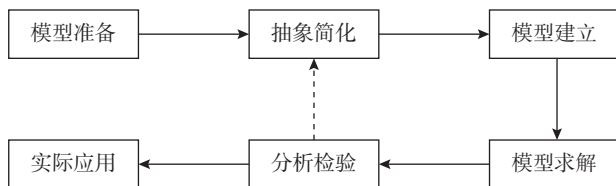


图 1-9

(1) 模型准备:对于一个实际问题,先要弄清楚问题的背景和建模的目的,同时收集

各种相关信息,如各种数据、对类似问题的研究等.

(2) 抽象简化:一个实际问题往往涉及的因素较多、关系复杂且具有不确定性,因此在全面分析问题的基础上,要抓住主要矛盾,忽略次要因素,并做出必要的、合理的假设,以规范和简化问题.同时利用各种数学符号表示问题中的各种变量,这称为抽象,也就是用数学的语言描述问题.经过这一步骤,一个实际问题已基本转化为一个数学问题了.

(3) 模型建立:运用适当的数学方法,如代数法、微分法、优化法、图论法、层次分析法、统计法等建立数学模型.

(4) 模型求解:运用相应的数学方法求解建立的模型,如代数方程的求解、微分方程的求解、图论算法的实现、统计模型参数的估计等.这里的求解包含两层含义:一是数学意义上的求解,一般能用数学方法推导、求出解析解的,最好求出准确解;二是利用计算机和数学软件进行的数值求解或模拟,这样得到的解一般是近似解.实际中两种方式会兼顾使用.

(5) 分析检验:对求解出来的结果必须在实际中进行检验,看是否符合实际情况,还要做误差分析、稳定性分析等.如果吻合效果不好或误差太大,可能需要修改假设,重新建模.

(6) 实际应用:与实际吻合效果较好,稳定性、可靠性良好的模型可以在实际中加以应用,并根据实际情况不断改进、优化.

综合习题 1

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求 $f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f\left(\frac{3}{2}\right)$.

2. 设 $f(x) = (x-1)^2, g(x) = \lg x$, 求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \lg \frac{1+x}{1-x}$

(2) $y = \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 - 5x + 6}$

(3) $y = \log_{x+1}(4-x^2)$

(4) $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$

4. 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y = \cos^2(2-3x)$

(2) $y = \ln[\ln(\ln x)]$

(3) $y = (x + \lg x)^3$

(4) $y = \sqrt{\log_a(\sin x + 2^x)}$

数学文化

把 function 翻译成函数的中国数学家李善兰

现在数学书中使用的“函数”一词是转译词.我国清代数学家李善兰在翻译《代数学》

(1859年)一书时,把 function 翻译成函数.

中国古代“函”字与“含”字通用,都有“包含”的意思,李善兰给出的定义是:“凡式中含天,为天之函数.”中国古代用天、地、人、物 4 个字表示 4 个不同的未知数或变量.这个定义的含义是:“凡是公式中含有变量 X ,则该式子叫作 X 的函数.”所以“函数”是指公式里含有变量的意思.

李善兰,字竟芳,号秋纫,浙江海宁人,出身于书香门第,少年时代便喜欢数学.9岁那年,李善兰在读家塾时,从书架上“窃取”中国古代数学名著——《九章算术》“阅之”,仅靠书中的注解,竟将全书 246 个数字应用题全部解出,自此,李善兰对数学的兴趣更为浓厚.

14岁时,李善兰迷上了徐光启、利玛窦合译的《几何原本》,尽通其义,可惜徐、利二人没有译出后面更艰深的几卷,李善兰深以为憾,常幻想有“好事者或航海译归”,使自己得窥全豹.

咸丰二年,他到了上海,结识了英国传教士伟烈亚力与艾约瑟,他们对李善兰的才能颇为欣赏,遂邀请他到墨海书院共译西方格致之书.墨海书院为英国传教士麦都斯所创立.此书院原为传教而设,其后译书范围从宗教书刊扩展到西方科技领域.李善兰到墨海书院之后,率先与伟烈亚力合作,翻译《几何原本》后九卷,以续成徐光启、利玛窦的未竟之业.

在中国近代史上,李善兰以卓越的数学研究成果引人瞩目.李善兰数学造诣颇深,“其精到之处自谓不让西人,抑且近代罕匹”.他编辑刊刻的《则古昔斋算学》中包括数学著作 13 种.

李善兰早期研究的数学课题,主要是我国明清以来的传统数学.比较突出的是他对“尖锥术”的独立研究.他在中国传统数学垛积术的极限方法基础上,发明了尖锥术,创立了各种三角函数和对数函数的幂级数展开式,以及几个重要积分公式的雏形.李善兰在创造“尖锥术”时,还没有接触微积分,但实际上他已经具有解析几何思想和微积分思想,“则以一端,即可闻名于世”.由此可见,即使没有西方传入的微积分,中国数学也将会通过自己的途径,运用独特的思想方式到达微积分,从而完成由初等数学到高等数学的跨越.

建模实践知识一 数学建模及学习方法

一、什么是数学建模——从包饺子和设路障说起

不少人认为需要用数学方法解决的基本都是高新技术、科学研究或者生产建设、经济管理中的重大问题,带着一些神秘色彩的数学离人们的日常生活很远.其实,通过数学建模可以分析我们身边的许多现象和问题.为了让数学走进生活,帮助大家更容易地了解什么是数学建模,本节将通过日常生活中两个实例的建模过程,简单介绍数学建模的方法和步骤.

1. 饺子中的数学

在最平凡的包饺子过程中还有什么数学问题吗?让我们从一个具体例子说起.

问题: 通常用 1kg 面和 1kg 馅包 100 个饺子. 某次, 馅做多了而面没有变, 为了把馅全部包完, 问: 应该让每个饺子小一些, 多包几个, 还是每个饺子大一些, 少包几个? 如果回答是包大饺子, 那么如果 100 个饺子能包 1kg 馅, 50 个饺子可以包多少馅呢?

分析: 很多人都会根据“大饺子包的馅多”的直观认识, 觉得应该包大饺子. 但是这个理由不足以令人信服, 因为大饺子虽然包的馅多, 但用的面皮也多, 这就需要比较馅多和面多二者之间的数量关系. 利用数学方法不仅可以确切地回答应该包大饺子, 而且能够给出数量结果, 回答比如“50 个饺子可以包多少馅”的问题.

首先, 把包饺子用的馅和面皮与数学概念联系起来, 那就是物体的体积和表面积. 用 V 和 S 分别表示大饺子馅的体积和面皮面积, v 和 s 分别表示小饺子馅的体积和面皮面积, 如果一个大饺子的面皮可以做成 n 个小饺子的面皮, 那么需要比较的是, V 与 nv 哪个大? 大多少?

假设: 容易想到, 进行比较的前提是所有饺子的面皮一样厚, 虽然这不可能严格成立, 但却是一个合理的假定. 在这个条件下, 大饺子和小饺子面皮面积满足

$$S = ns \quad (1-1)$$

为了能比较各个饺子馅的体积, 所需要的另一个假设是所有饺子的形状一样, 这是一个既近似又合理的假定.

模型: 能够把体积和表面积联系起来的是半径, 虽然球体的体积和表面积与半径间存在我们熟悉的数量关系, 但是对于一般形状的饺子, 仍然可以引入所谓的“特征半径” R 和 r , 使得

$$V = k_1 R^3, \quad S = k_2 R^2 \quad (1-2)$$

$$v = k_1 r^3, \quad s = k_2 r^2 \quad (1-3)$$

成立. 注意: 在所有饺子形状一样的条件下, 式(1-2)和式(1-3)中的比例系数 k_1 、 k_2 相同.

在式(1-2)和式(1-3)中消去 R 和 r 得

$$V = kS^{\frac{3}{2}}, \quad v = ks^{\frac{3}{2}} \quad (1-4)$$

其中 k 由 k_1 和 k_2 决定, 并且两个 k 相同. 现在只需在式(1-1)和式(1-4)的 3 个式子中消去 S 和 s , 就得到

$$V = n^{\frac{3}{2}} v = \sqrt{n} (nv) \quad (1-5)$$

式(1-5)就是包饺子问题的数学模型.

解释: 式(1-5)不仅定性地说明 V 比 nv 大(对于 $n > 1$), 大饺子比小饺子包得馅多, 而且给出了定量结果, 即 V 是 nv 的 \sqrt{n} 倍. 由此能够回答前面提出的“100 个饺子能包 1kg 馅, 50 个饺子可以包多少馅”的问题, 因为饺子数量由 $n_1 = 100$ 变成 $n_2 = 50$, 所以 50 个饺子能包 $\sqrt{n_1/n_2} = \sqrt{2} (\approx 1.4)$ kg 馅.

小结: 回顾整个建模过程, 关键的有以下几点:

- (1) 用数学语言(体积和表面积)表示现实对象(馅和面皮);
- (2) 作出简化、合理的假设(面皮厚度一样, 饺子形状一样);
- (3) 利用问题蕴含的内在规律(体积、表面积与半径之间的几何关系).

实际上, 在数学建模中这几条都是基本且关键的步骤.

我们身边还有一些现象与包饺子问题相似,例如到超市买东西,单位重量的物品,大包装的比小包装的便宜,你能建立一个类似的模型给出合理的解释吗?

2. 路障间距的设计

在校园、机关、居民区的道路中间,常常设置用于限制汽车速度的路障.看到路障你会想到哪些能够用数学解决的问题?

问题:路障之间相距太远起不到限制车速的作用,相距太近又会引起行车的不便,所以应该设计一个合适的间距.想一想:如果要求限制车速不超过 40km/h,路障的间距应该是多少?

分析:当汽车通过一个路障时,速度近于零,过了路障,司机就会加速,当车速达到 40km/h 时,让司机因为前面有下一个路障而减速,至路障处车速又近于零,如此循环,即可达到限速的目的.

按照这种分析,如果认为汽车在两个相邻路障之间一直在作等加速运动和等减速运动,那么只要确定了加速度和减速度这两个数值,根据基本的物理知识,就能很容易地计算出两个相邻路障之间应有的间距.

数据:要得到汽车的加速度和减速度,一个办法是查阅资料.通常可以查到:某牌号的汽车在若干秒内(或多远距离内)可以从静止加速到多大车速,或者某牌号的汽车在若干秒内(或多远距离内)可从多大车速紧急刹车至静止.由这样的数据推算出的是最大加速度和最大减速度,不能直接用于这里的问题.还有资料会给出加速度的一个范围,如从 1m/s^2 到 10m/s^2 ,也不适合此处使用.

比较实用的方法是进行测试.请驾驶普通牌号汽车的司机在与需设置路障环境相似的道路上,模拟有路障的情况作加速行驶和减速行驶,记录行驶中的车速和对应的时间.假定已经得到了如表 1-3 和表 1-4 的数据.

表 1-3 加速行驶的测试数据

速度/(km/h)	0	10	20	30	40
时间/s	0	1.6	3.0	4.2	5.0

表 1-4 减速行驶的测试数据

速度/(km/h)	40	30	20	10	0
时间/s	0	2.2	4.0	5.5	6.8

假设:汽车通过路障时车速为零,其后作等加速运动,当车速达到限速时立即作等减速运动,到达下一个路障时车速为零.

建模:记汽车加速行驶的距离为 s_1 ,时间为 t_1 ,加速度为 a_1 ,减速行驶的距离为 s_2 ,时间为 t_2 ,减速度为 a_2 ,限速为 v_{\max} .根据物理定律有

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2, \quad s_2 = \frac{1}{2}a_2t_2^2 \quad (1-6)$$

$$v_{\max} = a_1t_1, \quad v_{\max} = a_2t_2 \quad (1-7)$$

汽车在两相邻路障间行驶的总距离 $s = s_1 + s_2$, 从式(1-6)和式(1-7)中消去 t_1, t_2 得到

$$s = \frac{v_{\max}^2}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \quad (1-8)$$

式(1-8)为路障间距设计的数学模型. 对于某个给定限速 v_{\max} 的具体问题, 由测试数据估计出加速度 a_1 和减速度 a_2 后, 即可计算路障间距 s .

计算: 以速度 v 为横坐标、时间 t 为纵坐标, 将表 1-3 和表 1-4 的数据作散点图(图 1-9 和图 1-10 中的圆点), 可以看出速度与时间大致为线性关系, 这也可用于验证汽车在路障间作等加速运动和等减速运动的假设是否基本正确. 记等加速运动和等减速运动速度与时间的关系分别为 $t = c_1 v + d_1$ 和 $t = c_2 v + d_2$, 作为粗略估计, 不妨手工在图 1-9 上尽量靠近数据点画一条直线, 因为直线在 $v=0$ 和 $v=40$ 的 t 的坐标差约为 $5.3 - 0.3 = 5$,

所以图 1-9 直线的斜率为 $c_1 = \frac{5 \times 3.6}{40} = 0.45 (\text{s}^2/\text{m})$. 类似地处理图 1-10, 得到直线的斜率

为 $c_2 = \frac{7 \times 3.6}{40} = -0.63 (\text{s}^2/\text{m})$. 由图 1-10 和图 1-11 可知 d_1, d_2 很小, 视为 0, 于是加速度

$a_1 = \frac{1}{c_1}$, 减速度 $a_2 = -\frac{1}{c_2}$. 又按问题要求 $v_{\max} = 40 \text{ km/h} = 11.1 \text{ m/s}$, 将 a_1, a_2, v_{\max} 代入式

(1-8) 计算得 $s = \frac{11.1^2 \times (0.45 + 0.63)}{2} \approx 66.5 (\text{m})$. 可将路障间距设计为 67m.

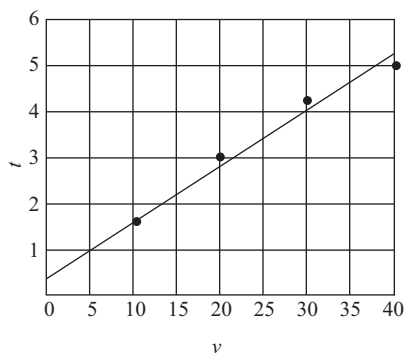


图 1-10

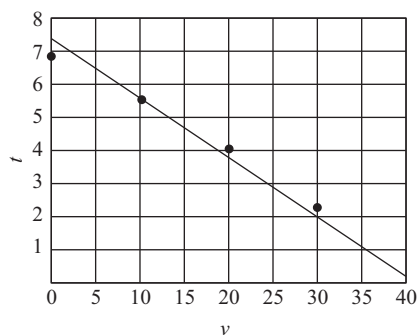


图 1-11

如果根据表 1-3 和表 1-4 的数据利用最小二乘法编程计算, 可得 $c_1 = 0.4536, c_2 = -0.6084, s = 65.5556 \text{ m}$, 与手算结果相差不大.

小结: 上述建模过程的关键除了作出简化、合理的假设(等加速和等减速行驶)及利用问题蕴含的内在规律(时间、距离、速度、加速度之间的物理关系)以外, 还需根据测试数据估计模型的参数(加速度和减速度), 这也是建模中常用的方法. 实际确定路障间距时还要考虑路口及居民楼、学校的位置等因素, 本模型不再详细讨论.

3. 数学模型和数学建模

数学模型(mathematical models)不需要从数学上严格定义, 一般可以描述为: 对现实世界的一个特定对象, 为了某个特定目的, 根据特有的内在规律, 作出必要的简化假设,

运用适当的数学工具,得到的一个数学结构.

数学建模(mathematical modeling)简称建模,是指建立数学模型的全过程,包括问题的表述和分析、模型的假设与构成、模型求解、结果解释、模型检验等.

数学建模可以用图 1-12 表示为从现实对象到数学模型,再从数学模型回到现实对象的一个循环、上升的全过程.

表述是将现实问题用数学语言和符号“翻译”成抽象的数学问题,属于归纳法,是依据个别现象推出一一般规律.数学模型的求解则属于演绎法,是按照普遍原理考察特定对象,导出结论.解释是把数学模型的解答“翻译”成现实对象,作出定性和定量的分析.最后,作为这个过程的重要一环,这些结果需要用实际的信息加以验证.建模可以看作两个来回“翻译”的循环.

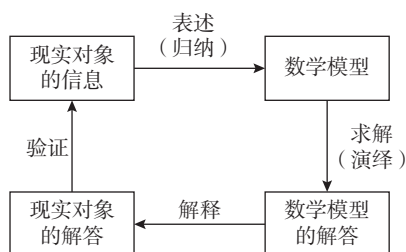


图 1-12

图 1-12 也揭示了现实对象和数学模型的关系.一方面,数学模型是将现象加以归纳、抽象的产物,它源于现实,又高于现实;另一方面,只有当数学建模的结果经受住实际对象的检验时,才能证明其正确性,在完成实践—理论—实践这一循环的同时,实现理论指导实践的发展.

二、为什么学习数学建模——顺应时代潮流与培养创新人才

数学建模并不是新东西,作为用数学方法解决实际问题的第一步,数学建模与数学有着同样悠久的历史.公元前 3 世纪,欧几里得在总结前人研究结果的基础上建立的欧几里得几何,就是针对现实世界的空间形式提出的一个数学模型.开普勒根据大量的天文观测数据总结出来的行星运动三大规律,后经牛顿利用万有引力公式,从力学原理出发给出了严格的证明,更是一个数学建模取得成功的例子.近代出现在流体力学、电动力学、量子力学中的一些重要方程,也都是抓住了该学科本质的数学模型,成为相关学科的核心内容和基本构架.

那么为什么直到 20 世纪后半叶,数学建模才逐渐得到人们的普遍重视和广泛应用,并且进入高等院校的课堂呢?

1. 数学建模顺应时代发展潮流,适应科技进步需要

近几十年来,时代发展和科技进步的大潮把数学建模从幕后推向了前台,主要有以下几个因素起到了巨大的推动作用.

(1) 电子计算机技术的出现和迅速发展,为数学建模的应用提供了强有力的工具

众所周知,在机械、电机、土木、水利等传统的工程技术领域中,许多实际问题都以力学、电学、热学、光学等物理学科的定律、法则,以及由此衍生、推导出来的公式、规范为基础,这些定律、公式又基本是以数学模型的形式表述的,可以说,数学建模在工程技术领域的应用由来已久.但是,随着科学技术和工艺水平的发展,设计、制造、生产、运行中的一些实际问题的数学模型越来越复杂,需要处理的数据越来越多,使用电子计算机出现之前的计算工具(从手算、算盘到计算尺、手摇计算机等)基本无法求解,数学模型陷入无用武之地的尴尬处境.

20世纪40年代,电子计算机的出现,以及其后几十年高速、大型计算机和与之相伴的微电子、自动化、激光、通信等科学技术的迅速发展,使得诸如大型机械、建筑构件的受力分析,巨型水坝的应力计算,涡轮机叶片、飞机机翼的设计,石油勘探的数据处理与含油层的识别,电力、化工生产运行过程的控制等重大项目中的数学建模课题迎刃而解.建立在数学模型和计算机技术基础上的模拟技术以快速、经济、方便等优势,快速替代了传统工程设计中的现场实验、物理模拟等手段.像气象预报、基因工程等领域中一些更为复杂的问题,也可以利用数学建模加以解决.

(2) 在高新技术领域,数学建模几乎是必不可少的手段

无论是发展通信、航天等高新技术本身,还是将高新技术用于传统工业去创造新工艺、开发新产品,计算机技术支持下的数学建模和数值模拟都是经常使用的有效手段.建模、计算和计算机图形学等相结合形成的计算机软件已经被固化于产品中,起着凝聚技术的核心作用,被认为是高新技术的主要特征之一.在这个意义上,数学不再仅仅作为一门学科,而是许多技术的基础,而且直接走向了技术的前台,“高技术本质上是一种数学技术”的观点被越来越多的人接受,而数学建模也因此成为数学技术的重要组成部分.

当今,微型计算机已经遍布于银行、超市、机场、图书馆、办公室,进入人们的日常生活中.每天都有海量数据涌入,需要由建模和计算形成的数学方法去粗取精、去伪存真、整理加工、寻找规律.在互联网飞速发展的时代,如果没有以数学建模为核心的搜索引擎,就不可能在百度、谷歌等网站上迅速找到千百万条相关的信息.可以说,在以高新技术为代表的知识经济的大潮里,计算机技术和数学建模互相促进,相辅相成.

(3) 数学迅速进入一些新领域,为数学建模开拓了许多新的发展方向

半个多世纪到一个世纪以前,在经济、人口、生物、生态、医学、地质、农业等领域,大体还停留在定性分析的阶段,数学的使用只限于非常初等的运算.随着社会发展科学化、定量化的需要,数学逐渐向这些领域渗透,人们认识到,一般工程技术领域存在着作为理论基础的物理定律和数学公式,而当用数学方法研究非物理领域的现象和规律时,首要和关键的一步就是建立与那个学科相应的数学模型.于是,一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、生物数学、数学生态学、数学地质学等应运而生.在这些学科中,利用各种数学方法建立不同类型、不同深浅程度、不同应用范围的模型,虽然有相当大可供开拓的余地但同时面临着许多本质性的困难,这就为数学建模提供了广阔的新天地.

教育特别是高等教育必须及时反映并适应科技发展和社会进步的需求,在上述时代背景下,数学建模课程于20世纪60年代开始在西方国家的一些大学里出现,并于80年

代初进入我国的大学。

2. 数学建模给教育改革和人才培养注入了强大的活力

数学教育本质上是一种素质教育,它不应仅使学生学到一些数学概念、方法和结论,而让学生领会数学的思想方法和精神实质,掌握数学学科的精髓,自觉地接受数学文化的熏陶,使数学成为得心应手的工具。

从小学、中学到大学,数学都是一门基础课、重点课,学习课时多,考试压力大。长期以来,数学的教学体系和教学内容形成了一种自我封闭的局面,教师教得非常辛苦,学生学得非常吃力,以致产生畏惧感,造成恶性循环。即使在考试中获得高分的学生,也大都不知道、更不会运用学到的数学知识去解决遇到的实际问题。

数学教育应该培养学生两种能力,一种是逻辑推导、证明、计算等,不妨简称“算数学”;另一种是以数学作为工具分析、解决实际问题,不妨简称“用数学”。两种能力的培养同等重要,然而长达十几年的数学教学显然是偏重前者、忽视后者的。

老师们在急迫地寻找解开数学教学困境的钥匙,同学们也迫切需要学到生动的、充满活力的数学知识。数学建模的引入,恰似一股湍急的溪流,注入了原有数学课程体系的大河,激起层层波浪,在教学过程中为数学和外部世界的联系提供了一种有效的方式,打开了一条通道。通过数学建模的学习及各种活动,学生亲身参与将数学应用于实际的尝试,体会发现和创造的过程,取得在传统的数学课堂里和书本上无法获得的宝贵经验和亲身感受。这种尝试必能启迪他们的数学心智,促使他们更好地应用数学、品味数学、理解数学最终热爱数学,在知识、能力及素质三方面迅速成长。毫不夸张地说,将数学建模引入大学课堂,是这些年规模最大、最成功的一项数学教学改革实践。

三、怎样学习数学建模——学习课程和参加竞赛

有人说,数学建模与其说是一门技术,不如说是一门艺术。众所周知,技术一般是有章可循的,许多工程领域都有专门的技术规范,只要严格按照规范去做,事情就可以完成得八九不离十。而艺术通常无法归纳出一般的准则或方法,一位出色的艺术家需要大量的观摩和前辈的指教,更需要亲身的实践。从这种意义上来说,数学建模更接近艺术,因为目前尚不能找到若干法则或规律,用以完成不同领域各种问题的建模。

这样看来,学习数学建模与学习一般的数学课程会有较大的不同。多数建模课程和建模教材主要讲解的是数学建模过程的一头一尾,即如何将实际问题表述成数学模型和如何用模型的结果分析、解释实际现象,至于建模过程的中段,即模型的求解部分,由于所用的数学方法基本是大家已经学过的,所以不会是讲授的重点。当然,如果用到数学公共课没有涉及的内容,则会有适当的补充。

1. 培养数学建模的意识和能力

在学习数学建模的过程中,与掌握一些建模方法、补充一些数学知识相比,更为重要、更加困难的是培养数学建模的意识和能力。

数学建模的意识是指对于日常生活和工作中需要或者可以用数学工具分析、解决的实际问题,能够敏锐地发现并从建模的角度去积极地思考、研究. 这些问题可能有几种不同的情况,第一种是必须用数学方法才能解决,需要做的大概就是如何建模了;第二种是虽然已经用工程或经验的办法处理,但是如果用数学方法可能效果更好,这就需要勇于和善于利用数学建模这个工具了;第三种是依靠经验和常识就能得到满意的处理,不一定要用建模解决的问题,但如果尝试从数学的角度去考虑,可以起到提高数学建模能力的作用.

至于数学建模的能力,内容很广泛,大体上包含以下内容.

(1) 想象力. 在已有形象的基础上,根据新的信息在头脑中创造出新形象的能力. 它是一种形象思维活动,可以通过细心观察、善于联想、勇于突破思维定式(如运用逆向思维、发散思维)等方式来培养.

(2) 洞察力. 透过现象看到本质,对复杂事物进行分析和判断的能力. 培养洞察力需要集中注意力、刻苦工作、勤于思考,适应和创造浓厚的学术环境,培养对科学研究敏锐的“感觉”.

(3) 类比法. 由一类事物具有的某种属性,推测类似事物也具有这种属性的推理方法. 因为同一个数学模型可以描述不同领域的对象,所以联想、类比是建模中常用的方法. 当然,类比的结果是否正确,需要由实践来检验.

(4) 较广博的数学知识. 对于已经学过微积分、线性代数、概率等基础课的大学生来说,还需要了解数值计算、数理统计、数学规划、数值模拟等学科中直接与应用相关的内容,如怎样用这些方法建模,怎样在计算机上用数学软件实现,怎样解释模型求解的结果等,并不需要深入了解这些学科的数学原理,本书的提高篇包含了这些内容的主要部分.

(5) 深入实际调查研究的决心和能力. 与埋头撰写纯数学论文不同,做数学建模首先要有到实际中去的决心和勇气,并且善于调查研究,掌握第一手材料.

从培养意识、提高能力的角度学习数学建模,基本是“学别人的”和“做自己的”两条途径,下面给出一些具体建议.

2. 案例研究——学习、分析、评价、改进和推广

案例研究(case studies)是学习数学建模课程的主要方法之一,这与法学、管理学的学习方法有些相近. 学习课堂上讲的和教材里写的别人做过的模型,不能听过、看过就算学了,应该通过学习、分析、评价、改进和推广几个步骤逐步深化. 首先是弄懂它,再分析它为什么这样做,哪些地方是关键,评价有什么优缺点,最后,如果可能,尝试改进、推广它. 让我们以一个日常生活中的现象作为案例来说明.

案例: 椅子放在不平的地面上.

问题提出: 在不平的地面上随意放一把四只脚的椅子,通常只有三只脚着地,不稳定. 在大多数情况只需挪动几下,就可以让四只脚着地,把椅子放稳. 试用数学建模的方法对这个现象加以描述.

模型假设:

- (1) 椅子四条腿一样长,四只脚的连线为正方形,每只椅脚与地面接触处为一个点.
- (2) 地面高度是连续变化的,沿任何方向都不会出现间断.

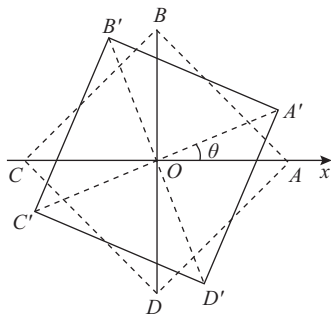


图 1-13

(3) 椅子在任何位置都至少有三只脚着地.

模型建立: 首先将椅子的位置表示出来. 由假设(1), 椅子四脚连线为正方形, 以中心为对称点, 正方形绕中心的旋转正好表示椅子位置的改变. 图 1-13 中椅子初始位置是正方形 $ABCD$, 对角线 AC 与 x 轴重合. 椅子绕中心 O 旋转角度 θ 后, 位置变成正方形 $A'B'C'D'$, 所以椅子的位置可用对角线 $A'C'$ 与 x 轴的夹角 θ 表示.

其次, 把椅脚着地转换为数量化的条件. 椅脚与地面的距离随椅子位置的变化而变化, 当距离等于零时椅脚着地.

虽然四只脚的椅子有 4 个距离, 但是利用中心对称性和至少三只脚着地, 可以将对角线上两只脚与地面的距离合在一起考虑.

对角线上两脚与地面距离之和是椅子位置 θ 的函数, 记 A, C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$, B, D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$. 由假设(2), 地面高度连续变化, 所以 $f(\theta)$, $g(\theta)$ 都是连续函数. 由假设(3), 椅子在任何位置 θ 至少有三只脚着地, 所以 $f(\theta)$, $g(\theta)$ 至少有一个为零, 那么二者的乘积等于零, 在初始位置 $\theta=0$, 不妨设 B, D 两脚着地, 即 $g(0)=0$, 而 $f(0)>0$.

最后, 改变椅子位置使四只脚着地, 就是要找一个角度 θ_0 使 $f(\theta_0), g(\theta_0)$ 同时等于零, 这可以归结为证明以下命题:

已知 $f(\theta), g(\theta)$ 是 θ 的连续函数, 对任意 $\theta, f(\theta)g(\theta)=0$, 且 $g(0)=0, f(0)>0$, 则存在 θ_0 使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

模型求解: 对以上命题给出一个简单证明.

(1) 将椅子绕中心旋转 90° , 即 $\pi/2$, 对角线 AC 与 BD 互换, 由 $g(0)=0, f(0)>0$ 可知 $g(\pi/2)>0, f(\pi/2)=0$.

(2) 引入函数 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$, 在区间 $[0, \pi/2]$ 上考察 $h(\theta)$, 因为 $f(\theta), g(\theta)$ 连续, 所以 $h(\theta)$ 也连续, 且在区间端点上有 $h(0)>0, h(\pi/2)<0$, 故必存在一点 $\theta_0 (0<\theta_0<\pi/2)$ 使得 $h(\theta_0)=0$, 于是 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$.

(3) 又因为 $f(\theta_0)g(\theta_0)=0$, 所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

模型解释: 在上述 3 个假设条件下, 将椅子绕中心旋转, 可以找到四只脚着地的稳定点.

分析与思考: 在理解的基础上, 可以做以下研究.

(1) 对模型假设进行分析

假设(1)对椅子本身的要求大致是合理的, 椅脚与地面点接触可看作几何抽象. 假设(2)相当于要求地面是数学上的连续函数, 不能出现如台阶形式的断裂. 假设(3)排除了地面上小范围内(相对于椅脚间距和椅腿长度而言)的深沟或凸峰使三只脚不能着地的情况, 对地面的要求更高.

由建模过程可以知道, 假设(2)的地面连续性和假设(3)的三只脚着地是证明命题的必要条件, 从常识看这对放稳椅子也是必需的, 而假设(1)的椅脚正方形只是为了得到简单的中心对称, 对证明命题不是必要的. 事实上, 可以将这个条件放宽到椅脚连线为长方

形或梯形的情况.

(2) 对建模的关键进行分析

建模的关键是用数学符号、数学语言把椅子的位置及四只脚着地的条件和结论表示出来. 利用椅脚的中心对称性, 用单变量 θ 表示椅子的位置, 用两个函数 $f(\theta), g(\theta)$ 表示椅脚与地面的距离, 从而得到四脚着地的条件和结论的数学关系.

(3) 对模型求解作仔细研究

可以发现证明过程中存在不严谨之处: 椅子的旋转轴在哪里? 它在旋转过程中怎样变化? 考虑如何给出更严谨的说明.

3. 参加数学建模竞赛, 做自己的模型

学习数学建模, 如果只停留在学习别人的模型上是远远不够的, 一定要亲自动手, 踏踏实实做几个实际题目. 不妨从包饺子这样的简单问题开始, 读者也可以利用本书习题中提供的需要自己作出假设、构造模型的题目, 当然更提倡读者在实际生活中发现、提出问题, 建立模型.

数学建模竞赛为同学们通过亲手做课题, 更快地提高用数学建模方法分析、解决实际问题的能力搭建了广阔的平台. 大学生数学建模竞赛是近年来我国高校蓬勃开展的一项学科竞赛活动, 有全国性的、地区性的, 更有院校自己组织的, 各种层次建模竞赛的内容、组织方式、评判标准等大致相同, 下面对竞赛的特点、参赛的过程和收获作简单介绍.

(1) 竞赛内容. 赛题由工程技术、管理科学及社会热点问题简化而成, 要求用数学建模的方法和计算机技术完成一篇包括模型的假设、建立和求解, 结果的分析 and 检验以及自我评价优缺点等方面的学术论文.

(2) 竞赛方式. 采取通信竞赛办法, 3 名大学生为一队, 在 3 天时间内完成, 可以使用任何资料和软件, 唯一的限制是不能与队外的同学、老师讨论赛题(包括在网上).

(3) 评判标准. 赛题没有标准答案, 评判以假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性、表述的清晰性为标准. 其中结果正确指的是与做出的假设和建立的模型相符合.

全国大学生数学建模竞赛从 1992 年开始举办, 规模由最初的几十所学校、几百个队, 发展到 2013 年的 1 300 多所院校、23 000 多个队, 参加院校、地区竞赛的人数更多. 数学建模竞赛之所以受到广大同学的欢迎, 主要是由于它的内容、形式和评判标准明显区别于大家熟悉的数学学科竞赛, 适合培养有创新精神和综合素质人才的需要.

参加数学建模竞赛的过程一般可以分为以下三个阶段.

(1) 赛前准备. 通过教师讲授、学生自学、讨论等方式了解数学建模的基本概念、方法和步骤, 学习求解模型的一些数学方法(数值计算、数理统计、数学规划、数值模拟等)及数学软件, 还可以演练往年的赛题和模拟题. 尽可能地选择不同专业、不同特质(认真踏实、思路灵活、写作好)的同学组队, 并在准备过程中进行充分磨合.

(2) 三天竞赛. 选定赛题既要抓紧时间又需充分讨论, 一定要把题目的要求吃透, 并拟定一个 3 人、3 天工作的初步计划. 开始时不要把目标定得过高, 不妨考虑用多数时间、多数人力保证基本模型的完成, 有余力再锦上添花. 论文写作要尽早开始, 用清晰、完整的

文章结构指导全队分工合作、有条不紊地完成任务。

(3) 赛后继续,结合三天的参赛总结整个竞赛准备过程的收获及经验教训,如果有兴趣和精力对赛题作进一步钻研,或者对赛题进行扩展研究,可以邀请教师和其他同学共同参加,我们更希望通过竞赛激发同学参与数学建模相关实践活动的兴趣。

二十多年来的事实说明,只要认真参加竞赛,同学们的收获和提高是多方面的。

首先,运用数学建模方法分析和解决实际问题的能力会得到切实的锻炼。赛题通常要运用到几门数学和计算机课程及多方面的知识,对于长期一门课、一门课学习的同学来说,这种训练运用综合知识的机会非常难得,对于同学独立工作能力的培养有很大的好处。

其次,合作精神与团队意识会得到培养和提高。竞赛需要3个人相互启发、争辩和相互妥协、合作,与以后经常面临的集体工作方式十分相近,对于一直在读书、做题、考试等个人奋斗的环境中成长起来的同学们来说,竞赛提供了一个既可以充分展示个人智商,又有助于培养与他人合作的情商的平台。

最后,竞赛需要快捷地搜集、整理、消化与题目有关的资料(主要依靠互联网),使之为我所用,对尚处于学习阶段的同学来说,这是少有的机会;一篇清晰、通畅阐明建模思路、假设、方法、结果等内容的论文,是参赛成果的集中体现,竞赛有益于文字表述能力的锻炼;赛题的实用性有助于培养同学们关注社会生活、理论联系实际学风;既充分开放、又有规则约束的竞赛方式,可以培养慎独、自律的良好道德品质。