

3.1 电磁学全景知识结构的思维导图

电磁学是研究电磁现象的规律和应用的物理学分支学科。图 3.1 展示了电磁学全景知识结构的思维导图。本书仅给出静电场的基本规律、有导体的静电场、静电场中的电介质、恒定电流和电路、恒定电流的磁场、电磁感应和暂态过程、磁介质、时变电磁场和电磁波等章节的思维导图。

静电场的基本规律这一章节首先给出了两静止点电荷之间相互作用所遵从的库仑定律：

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_{12} \quad (3.1.1)$$

然后给出了描述静电场的电场强度 $\mathbf{E}$ ，并讨论了它的通量满足高斯定理、它的环境量满足环路定理，即

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} \quad (3.1.2a)$$

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.1.2b)$$

进而提出了电势 U 的概念，它和电场强度的关系为

$$\mathbf{E} = -\nabla U \quad (3.1.3)$$

学会计算静电场的电场强度及其电势是研究静电场的重点。

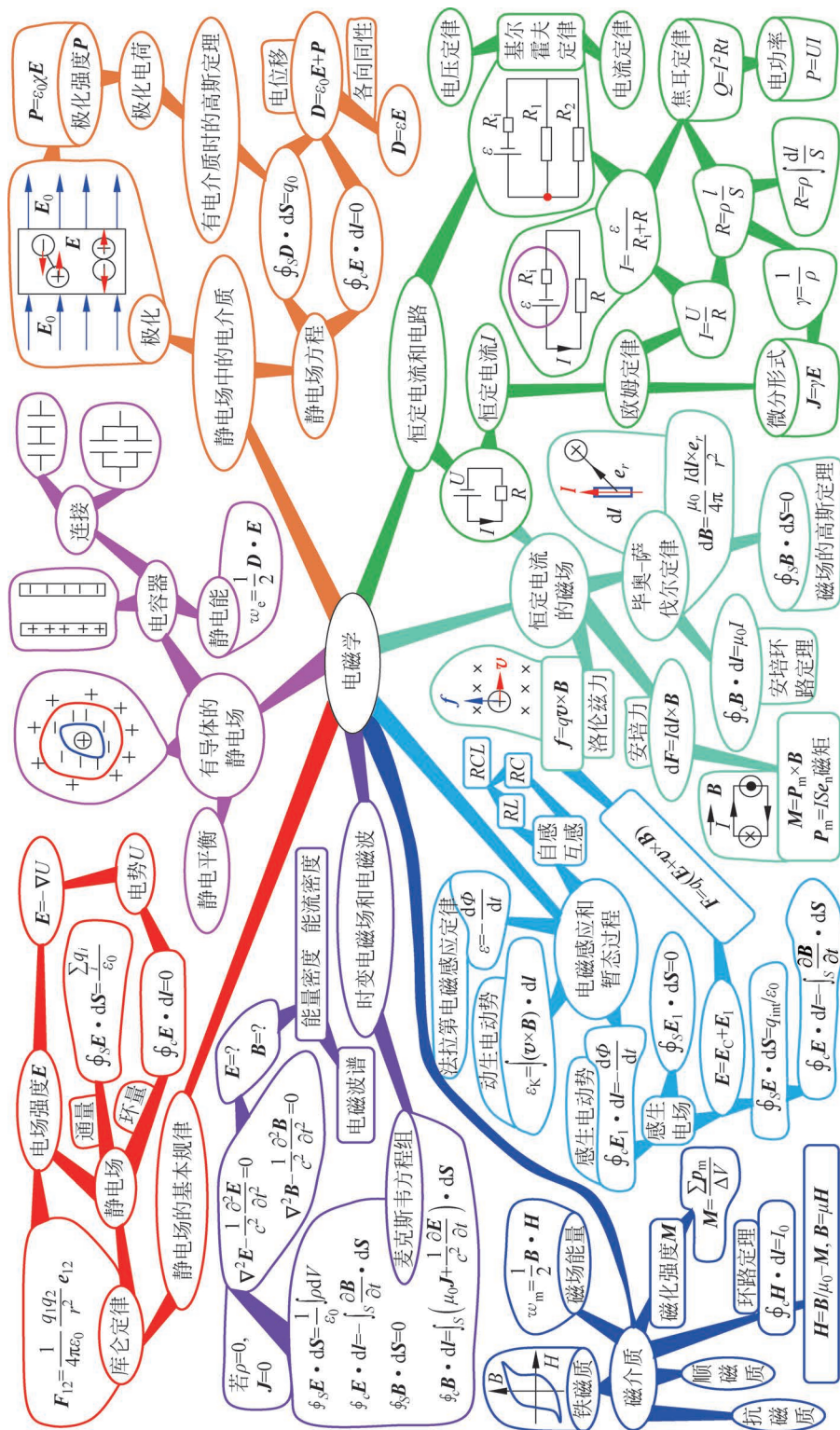
有导体的静电场这一章节主要研究导体在静电场中达到静电平衡的条件，讨论各种电容器的电容以及电容器连接（如串联、并联等）后的等效电容，进而研究电容器所储存的静电能，并给出静电能的能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (3.1.4)$$

静电场中的电介质这一章节主要研究电介质在静电场中出现电极化的现象。首先将介质中的电荷分为自由电荷和极化电荷，并引入极化强度 $\mathbf{P}$ 的概念，给出均匀各向同性电介质极化强度 $\mathbf{P}$ 和外电场 $\mathbf{E}$ 之间的关系为

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (3.1.5)$$

然后探讨有电介质时静电场的基本方程。其中，有电介质时的高斯定理的表达式为



$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0 \quad (3.1.6)$$

静电场的环路定理的表达式为

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.1.7)$$

其中, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, 称为电位移, 对于均匀各向同性电介质来说, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 。

恒定电流和电路这一章节首先给出形成恒定电流 I 的条件。然后介绍欧姆定律, 其表达式为

$$I = \frac{U}{R} \quad (3.1.8)$$

将其推广到含源电路, 得到全电路的欧姆定律的表达式为

$$I = \frac{\epsilon}{R_i + R} \quad (3.1.9)$$

并从节点处电荷守恒和沿一闭合回路一周的电势降为零两个角度, 导出基尔霍夫定律的电流定律和电压定律。对于长度为 l , 横截面为 S 的导体, 其电阻公式为

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (3.1.10)$$

其中, ρ 为电阻率; 电导率为 $\gamma = \frac{1}{\rho}$ 。可证明欧姆定律的微分形式为

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (3.1.11)$$

运用微积分的思想, 可得变截面导体的电阻公式为

$$R = \rho \int \frac{dl}{S} \quad (3.1.12)$$

最后, 介绍电流经过电阻产生热效应的焦耳定律和电功率, 它们的表达式分别为

$$Q = I^2 R t \quad (3.1.13)$$

$$P = UI \quad (3.1.14)$$

恒定电流的磁场这一章节首先给出稳恒电流产生磁场的毕奥-萨伐尔定律, 其表达式为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (3.1.15)$$

然后, 计算描述稳恒磁场性质的通量和环量, 即磁场的高斯定理和安培环路定理, 它们的表达式分别为

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.1.16)$$

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (3.1.17)$$

随后, 探讨电流元 $I d\mathbf{l}$ 在磁场中所受的安培力公式:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (3.1.18)$$

并将其推广至载流线圈所受力矩, 得

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B} \quad (3.1.19)$$

其中, $\mathbf{P}_m = I S \mathbf{e}_n$ 称为线圈的磁矩。最后, 研究带电粒子在磁场中所受的洛伦兹力, 其表达式为

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.1.20)$$

电磁感应和暂态过程这一章节首先给出法拉第电磁感应定律,其表达式为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.1.21)$$

然后,探讨动生电动势、感生电动势及感生电场通量的性质,它们的表达式分别为

$$\varepsilon_K = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (3.1.22)$$

$$\varepsilon_I = \oint_c \mathbf{E}_I \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.1.23)$$

$$\oint_S \mathbf{E}_I \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.1.24)$$

令总电场等于库仑电场和感生电场之和,即 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_I$, 则带电粒子在电磁场所受的洛伦兹力为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.1.25)$$

随后,得到总电场 $\mathbf{E}$ 所满足的性质,即它的通量和环量分别满足如下关系:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= q_{\text{int}}/\epsilon_0 \\ \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

最后,研究自感和互感现象,讨论 RL 、 RC 和 RCL 电路的变化规律。

磁介质这一章节首先介绍如何通过磁化强度 $\mathbf{M}$ 描述磁化现象,其定义式为

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{p}_m}{\Delta V} \quad (3.1.26)$$

然后探讨有磁介质时的环路定理,其表达式为

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_0 \quad (3.1.27)$$

其中,磁场强度 $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ 。对于各向同性磁介质来说, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ 。随后,讨论顺磁质、抗磁质和铁磁质的特征及其磁化产生机理。最后,导出磁场能量密度的公式:

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (3.1.28)$$

时变电磁场和电磁波这一节首先导出麦克斯韦方程组:

$$\left\{ \begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \\ \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \left(\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \right. \quad (3.1.29)$$

若 $\rho=0, \mathbf{J}=0$, 由麦克斯韦方程组讨论自由空间中电场和磁场所满足的微分方程组:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.30)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.31)$$

可以解出 E 和 B ($E=?$, $B=?$)。然后,探讨电磁波传播时的能量密度和能流密度。最后简单介绍电磁波谱的构成。

请构建自己的思维导图。

3.2 静电场基本规律的思维导图

静电场的基本规律主要研究电荷、点电荷间相互作用的库仑定律和对静电场的描绘方法。图 3.2 给出了静电场基本规律的思维导图。静电场是由静止电荷激发的场,而电荷又分为正、负电荷两种类型,同种电荷相互排斥,异种电荷相互吸引。根据电荷能否在其中流动,可将物质大致分为导体、半导体和绝缘体(电介质)。实验表明,电荷既不会创生,也不会凭空消灭,只会从一个物体转移到另一个物体,这称为电荷守恒定律。物体所带电荷量是量子化的、分立的,不能取任意值,只能是元电荷的整数倍。元电荷的电荷量为一个质子所带的电荷,其值为 $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。电子的电荷 $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$,其数值首先由密立根通过油滴实验测得,读者可试着以画思维导图的形式回顾该实验的原理。

与质点是力学中的理想模型类似,点电荷是电磁学中的理想模型。如图 3.2 橘黄色分支中的图所示,真空中相距为 r 的两个点电荷 q_1 和 q_2 之间的相互作用力遵从库仑定律,即电荷 q_1 受到电荷 q_2 的作用力为

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_{12} \quad (3.2.1)$$

反之,电荷 q_2 受到电荷 q_1 的作用力为

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_{21} \quad (3.2.2)$$

它们是一对作用力和反作用力。式中, ϵ_0 为真空中电容率。由试验电荷 q_0 所受合外力等于各分力的矢量和(力的叠加原理),即 $\mathbf{F}_{\text{tot}} = \sum \mathbf{F}_i$, 可得电场强度的叠加原理:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i \quad (3.2.3)$$

即一个场点处的电场强度等于每个点电荷在此处所激发的电场强度的矢量和。

静电场是矢量场,电场强度的定义式为

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0 \quad (3.2.4)$$

它表示单位正电荷在场点处所受的电场力。对于点电荷 q_i 来说,它在 r 处所产生的电场强度为

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (3.2.5)$$

一个点电荷系在同一场点所产生的总电场可由式(3.2.3)求出。对于连续带电体来说,电荷元 dq 在场点所产生的电场强度为

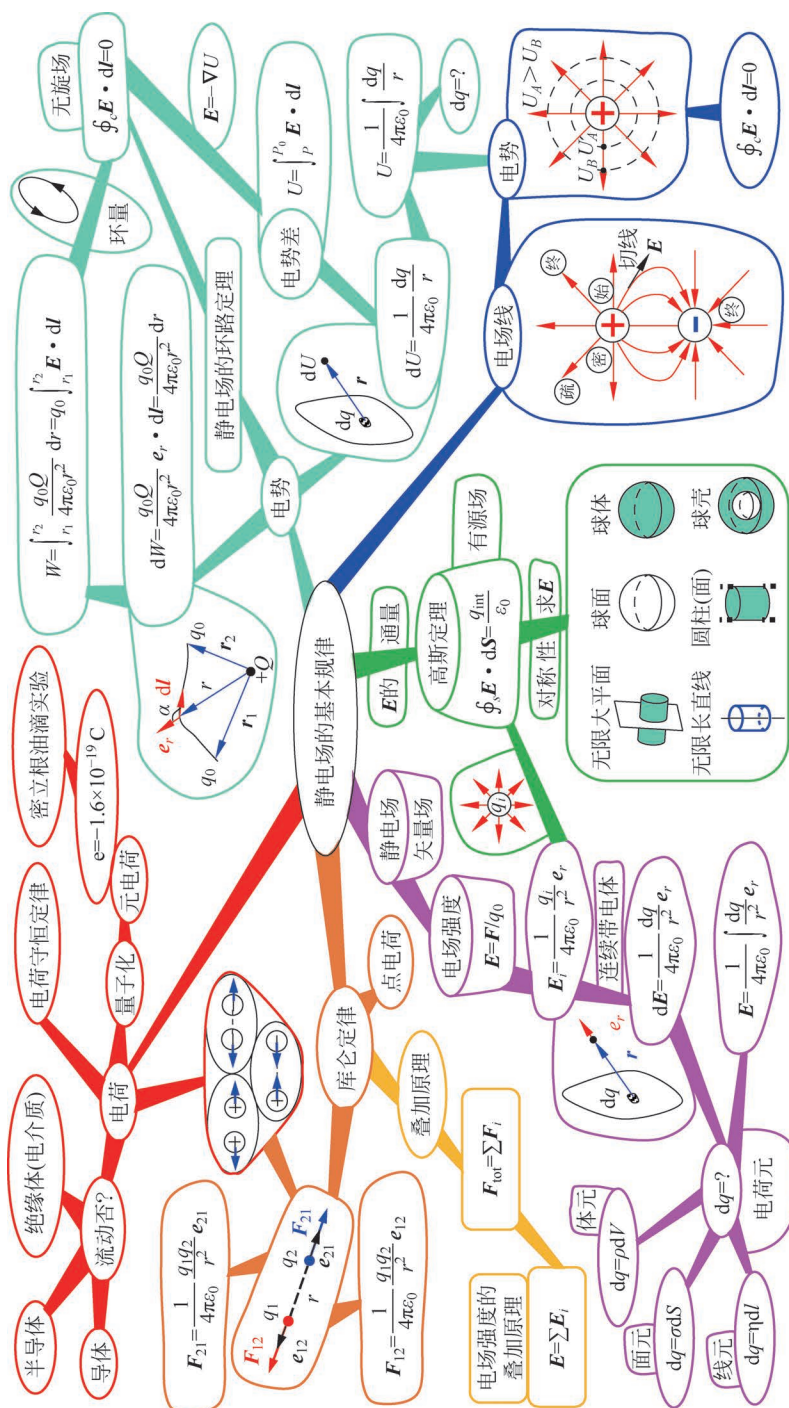


图 3.2 静电场基本规律的思维导图

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (3.2.6)$$

则由电场强度的叠加原理可知,连续带电体在场点所产生的总电场强度可由式(3.2.6)积分得到,即

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (3.2.7)$$

电荷元的具体形式($dq=?$)取决于带电物体的电荷分布。对于电荷为体分布、面分布和线分布的带电体来说,它们的 dq 可分别表示为

$$\begin{cases} dq = \rho dV \\ dq = \sigma dS \\ dq = \eta dl \end{cases} \quad (3.2.8)$$

其中, ρ 、 σ 和 η 分别为电荷的体密度、面密度和线密度。

在物理学中,对矢量场的描述通常会讨论矢量的通量和环量。从点电荷产生的电场对球面的通量出发,将其推广到点电荷系,可证明电场强度 $\mathbf{E}$ 对闭合曲面的通量遵循高斯定理,即

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (3.2.9)$$

它表明,在静电场中,对闭合曲面的电通量等于闭合曲面内的电荷代数和 q_{int} 的 $\frac{1}{\epsilon_0}$ 倍,而与闭合曲面外的电荷无关。这表明静电场是有源场,其场源就是电荷。如图 3.2 绿色分支中的图所示,对于高度对称性的带电体(如无限大平面、无限长直线、无限长圆柱(面)、球面、球体、球壳等带电体),使用高斯定理可很方便地求出它们所激发静电场的电场强度 $\mathbf{E}$ 的分布。

如图 3.2 蓝色分支中的图所示,为了形象地描述电场的分布,人们引入了电场线。规定电场线始于正电荷或无穷远,终于负电荷或无穷远;电场线的疏密程度代表电场的强弱,电场线上某点的切线方向代表该点电场强度的方向。再由 $\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ (静电场是无旋场)引入电势来描述电场。可证明,沿着电场线的方向,电势总是降低的。

如图 3.2 中的青色分支所示,通过研究库仑力做功的特点,从功能转化的角度,可证明,电场强度的环量满足静电场的环路定理,即

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.2.10)$$

下面考虑试验电荷 q_0 在静止点电荷 Q 所产生的电场中运动,计算库仑力所做的功 W 。点电荷 q_0 在 Q 产生的电场中移动 $d\mathbf{l}$,电场力所做的元功为

$$dW = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{l} = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \quad (3.2.11)$$

则点电荷 q_0 从 r_1 移动到 r_2 ,电场力所做的总功为

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = q_0 \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.2.12)$$

它仅与试验电荷的始末位置有关,而与路径无关。假如试验电荷绕闭合路径运动一周,则

$W=0$, 显然有环量 $\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 这说明静电场是无旋场。保守力做功与路径无关, 与此类比, 引入势能的概念, 可引入电势的概念来描述静电场。将单位正电荷从场点 P 移动到电势的参考点 P_0 , 电场力所做的功称为 P 和 P_0 两点之间的电势差, 即

$$U = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.2.13)$$

假如选取 P_0 点为电势零点, 则 U 称为 P 点的电势。可证明, 电场强度是电势梯度的负值, 即

$$\mathbf{E} = -\nabla U \quad (3.2.14)$$

对有限的带电体, 选无限远为电势零点, 电荷元 dq 在 $\mathbf{r}$ 处所产生的电势为

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \quad (3.2.15)$$

则带电体在 $\mathbf{r}$ 处所产生的电势可由式(3.2.15)积分得到, 即

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (3.2.16)$$

其中不同带电体的电荷元 dq 具有不同的形式($dq=?$), 请读者思考。比较式(3.2.7)和式(3.2.16)可知, 计算电势的分布显然较容易一些。一般来说, 先计算带电体所产生的电势分布, 然后使用式(3.2.14)研究其电场强度的分布特点。

请构建自己的思维导图。

3.3 有导体的静电场的思维导图

图 3.3 展示了有导体的静电场的思维导图。本节结合图 3.3 首先讨论静电场中的导体处于静电平衡时的性质, 然后研究导体系统储存电荷的能力(电容器的电容), 最后探讨带电体系的静电能。

处于静电场中的导体会产生感应电荷, 导体处于静电平衡的条件是: 导体内的电场强度为零, 即 $\mathbf{E}_{\text{内}} = 0$ 。可通过反证法来理解这一结果, 倘若 $\mathbf{E}_{\text{内}} \neq 0$, 导体中的自由电荷会在电场作用下继续移动, 这与静电平衡相矛盾。利用 $\mathbf{E}_{\text{内}} = 0$ 和高斯定理, 可以研究导体处于静电平衡的性质。如图 3.3 中红色分支左侧的图所示, 以平行导体表面的一个小面元 ΔS 为

底, 构造一个小圆柱体, 应用高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma_S \Delta S}{\epsilon_0}$, 可得该面元附近外侧的电场强度为

$$\mathbf{E}_S = \frac{\sigma_S}{\epsilon_0} \mathbf{e}_n \quad (3.3.1)$$

其中, σ_S 为该面元处电荷的面密度。若对导体内的任意小体积元 ΔV 使用高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\rho_i \Delta V}{\epsilon_0}$, 可得处于静电平衡导体内的自由电荷体密度 $\rho_i = 0$, 而其电荷面密度 $\sigma_S \neq 0$ 。

若从电势的角度来看, 处于静电平衡的导体上任意两点 a 和 b 的电势差为

$$U_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.3.2)$$

这说明, 此时的导体是等势体, 导体表面是等势面, 同样可用反证法来理解这一性质。

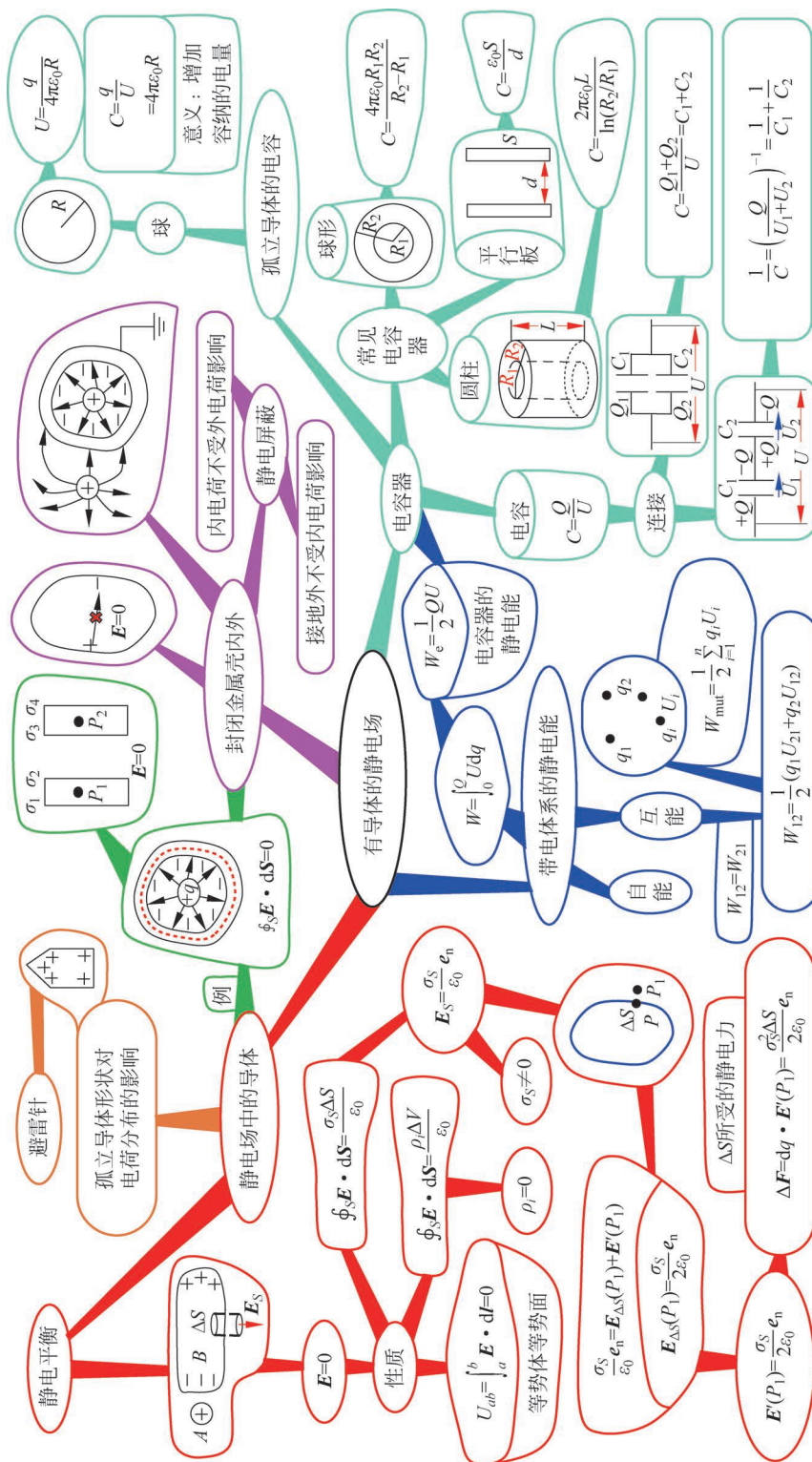


图 3.3 有导体的静电场的思维导图

下面来讨论导体表面上一带电面元 ΔS 所受的静电力。如图 3.3 中红色分支右侧的图所示,考查 ΔS 附近外侧一点 P_1 的电场强度,它包括 ΔS 所带电荷产生的电场强度 $E_{\Delta S}(P_1)$ 和导体表面除 ΔS 剩余部分所带电荷产生的电场强度 $E'(P_1)$ 两个部分,即

$$\frac{\sigma_S}{\epsilon_0} \mathbf{e}_n = \mathbf{E}_{\Delta S}(P_1) + \mathbf{E}'(P_1) \quad (3.3.3)$$

因 $\mathbf{E}_{\Delta S}(P_1) = \frac{\sigma_S}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n$, 则 $\mathbf{E}'(P_1) = \frac{\sigma_S}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n$, 那么, ΔS 所受的静电力为

$$\Delta \mathbf{F} = dq \cdot \mathbf{E}'(P_1) = \frac{\sigma_S^2 \Delta S}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n \quad (3.3.4)$$

实验表明,孤立导体的形状对电荷分布的影响很大。一般来说,导体表面的曲率越大,其电荷面密度也越大。避雷针正是利用这一性质来实现定点尖端放电,从而保护目标物免遭雷击的。

结合静电平衡条件 $\mathbf{E}=0$ 和高斯定理,可以分析静电场中各种形状的带电导体的电荷分布。例如,使用高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 分析如图 3.3 绿色分支中所示的封闭导体壳内部的感应电荷,可得其值为静电荷 q 的负值;再如,可由 P_1 和 P_2 的电场强度 $\mathbf{E}=0$ 求解平行板带电体的表面电荷密度 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 和 σ_4 。如图 3.3 中的玫红色分支所示,通过分析封闭金属壳内外的电场分布,可理解静电屏蔽的原理:封闭金属壳内表面的电荷并不受金属壳外电荷的影响;当封闭金属壳接地时,金属壳外的电场并不受壳内电荷的影响。

电容器是一种能够容纳电荷的电子元件。如图 3.3 中的青色分支所示,为了度量电容器容纳电荷能力的大小,引入电容的概念,电容的定义式为

$$C = \frac{Q}{U} \quad (3.3.5)$$

其中, Q 和 U 分别为电容的带电荷量和电压。对于孤立导体的电容,以带电导体球为例,带电荷量为 q , 半径为 R 的导体球的电压为

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (3.3.6)$$

则其电容为

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (3.3.7)$$

这表明,电容的物理意义是每增加单位电压时电容器所能增加容纳的电荷量。计算电容时,首先假设电容器带电,然后计算电容器的电压,最后使用定义式即可求出电容器的电容。依照此法,可求得常见电容器的电容。例如,球形电容器的电容为

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (3.3.8)$$

平行板电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (3.3.9)$$

圆柱形电容器的电容为