第 3 章

CHAPTER 3

复变函数级数

在高等数学课程中，我们学习了实变函数级数。在计算过程中，运用级数近似表示函数带来了很多便利。级数是研究复变函数理论和应用的重要工具。本章将围绕复变函数级数及复变函数的幂级数展开。我们将看到，一个函数是否解析与能否展开为幂级数是等价的，并由此发现解析函数的一些其他重要性质，从而加深对解析函数的认识。

3.1 复数项级数（complex number series）

复变函数项级数

3.1.1 复数项级数的概念（concepts of complex number series）

设有复数序列 $\{w_k\}$，其中 $w_k=u_k+\mathrm{i}v_k$，$k=1,2,\cdots$ 为复数，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = w_1 + w_2 + \cdots + w_k + \cdots \tag{3.1.1}$$

称为复数项级数。前 n 项和 $S_n=w_1+w_2+\cdots+w_n$ 称为级数的部分和。若部分和构成的复数序列 $\{S_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 有限，则称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ 级数收敛（convergent）于 S，记作

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} w_k \tag{3.1.2}$$

式(3.1.2)称为复数项级数的和。若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ 级数发散（divergent）。

3.1.2 复数项级数的性质（properties of complex number series）

和实变项级数类似，复数项级数的收敛可以使用柯西收敛准则判定。

定理 3.1 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ 级数收敛的充分必要条件是：对于给定的任意小正数 ε，必存在自然数 N，使得 $n>N$ 时，$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} w_k\right|<\varepsilon$，其中 p 为任意正整数。

Theorem 3.1 A sufficient and necessary condition for series to converge $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ is that: Given any small positive number ε, it is possible to find an integer N so that $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k\right| < \varepsilon$ for every $n > N$, p is an arbitrary positive integer.

实际上,根据上述柯西收敛准则判断级数是否收敛是比较困难的,一般不会运用定理 3.1 判断级数的收敛性,需要寻求其他的判定方法,本节将介绍若干判定定理。由于复数项级数可以写作以下形式

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} w_n = \sum_{k=1}^{n} u_k + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} v_k \tag{3.1.3}$$

因此,根据实数项级数收敛的有关结论,可以得出判断复数项级数收敛的简单方法。

定理 3.2 设 $w_k = u_k + \mathrm{i}v_k (k=1,2,3,\cdots)$,则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ 收敛的充分必要条件是级数的实部 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 和虚部 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 都收敛。

Theorem 3.2 Suppose that $w_k = u_k + \mathrm{i}v_k (k=1,2,3,\cdots)$, the sufficient and necessary conditions for the convergence of $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ is that both $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ and $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ converge.

定理 3.2′ 设 $w_k = u_k + \mathrm{i}v_k (k=1,2,3,\cdots)$,且 $S = a + \mathrm{i}b$,则 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ 收敛于 S 的充分必要条件是 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = a$ 且 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} v_k = b$。

Theorem 3.2′ Suppose that $w_k = u_k + \mathrm{i}v_k (k=1,2,3,\cdots)$ and $S = a + \mathrm{i}b$, if and only if $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = a$ and $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} v_k = b$, $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ converges to S.

定理 3.3 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ 收敛的必要条件是 $\lim_{k\to\infty} w_k = 0$

Theorem 3.3 If the terms of an infinite series do not tend to zero, that is $\lim_{k\to\infty} w_k \neq 0$, then the series $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ diverges.

这个定理用于对级数收敛性的初步判断(preliminary test),当 $\lim_{k\to\infty} w_k \neq 0$ 时,可以直接判定级数发散,当 $\lim_{k\to\infty} w_k = 0$ 时,则需要运用其他定理判定级数是否收敛。

例 3.1 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{\mathrm{i}}{2^n}\right)$ 的敛散性。

解:由定理 3.2 可知,只需讨论级数的实部级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和虚部级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 的敛散性。因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故原级数发散。

绝对收敛级数(absolutely convergent series) 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|w_k|$ 收敛,称原级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$

为绝对收敛级数。

条件收敛级数(conditionally convergent series) 若复数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ 收敛,但级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$ 发散,则称原级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ 为条件收敛级数。

因为

$$|w_{k+1}+w_{k+2}+\cdots+w_{k+p}| \leqslant |w_{k+1}|+|w_{k+2}|+\cdots+|w_{k+p}|$$

由柯西收敛准则可证明绝对收敛的级数必定是收敛的。

定理 3.4 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 必收敛,但反之不一定成立。

Theorem 3.4 If the series $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converges, but not vice versa.

例如,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\mathrm{i}=\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 是收敛的,但各项取模后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\mathrm{i}\right|= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,因此原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\mathrm{i}$ 条件收敛。

另外,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ 的各项均为非负实数,因此 $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ 为正项实级数。可运用正项级数的收敛性判别法则,如比较判别法、比值判别法或根式判别法等判断其收敛性。

令 $w_n=u_n+\mathrm{i}v_n$,则有 $|u_n|\leqslant|w_n|$,$|v_n|\leqslant|w_n|$,因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |v_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |w_n| \tag{3.1.4}$$

又有 $|w_n|=\sqrt{u_n^2+v_n^2}\leqslant|u_n|+|v_n|$,因此可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n^2+v_n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |v_n| \tag{3.1.5}$$

由式(3.1.4)知,若 $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ 收敛于有限值,则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$、$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 必收敛于有限值。由式(3.1.5)知,若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$、$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 收敛于有限值,则 $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ 必收敛于有限值。因此有以下定理。

定理 3.5 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 绝对收敛的充分必要条件是实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛。

Theorem 3.5 The series $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ absolutely converges if and only if both $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ are absolutely convergent.

例 3.2 判定下列级数的敛散性,若收敛,是条件收敛还是绝对收敛?

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(8\mathrm{i})^n}{n!}$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}\mathrm{i}\right]$。

解：(1) 令 $\left|\frac{(8\mathrm{i})^n}{n!}\right|=\frac{8^n}{n!}=w_n$，由正项级数的比值判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_{n+1}}{w_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{8^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{8^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n+1}=0$$

因此级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(8\mathrm{i})^n}{n!}\right|=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ 收敛，则原级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(8\mathrm{i})^n}{n!}$ 绝对收敛。

(2) 因为实部和虚部构成的两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 都收敛，故原级数收敛，但因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 为条件收敛，由定理 3.5 可知原级数为条件收敛。

3.1.3 复变函数项级数(series of complex functions)

复变函数项级数 设$\{f_k(z)\}(k=0,1,2,\cdots)$是定义在区域 D 上的复变函数序列，则称表达式

$$\sum_{k=0}^{\infty}f_k(z)=f_0(z)+f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_k(z)+\cdots \tag{3.1.6}$$

为复变函数项级数。该级数前 $n+1$ 项和 $S_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}f_k(z)$ 称为级数的部分和(partial sum)。

如果对于区域 D 内某点 z_0，复变函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z_0)$ 收敛，则称 z_0 为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 的一个收敛点；若级数在区域 D 内的每一点都收敛，则称该级数在 D 内收敛，收敛点的集合称为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 的收敛域。若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z_0)$ 发散，则称 z_0 为级数的发散点，发散点的集合称为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 的发散域。如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 在 D 内处处收敛，则其和一定是 z 的函数，记为 $S(z)$，称为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 在 D 内的和函数。也即对任意的 $z\in D$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z)=S(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$。

判定复变函数项级数的收敛性常用到以下定理。

定理 3.6 复变函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 收敛的充分必要条件是，对于 D 内各点 z，任意给定 $\varepsilon>0$，必有 $N(z)$存在，使得当 $n>N(z)$时，对于任意的正整数 p 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(z)\right|<\varepsilon$$

Theorem 3.6 A sufficient and necessary condition for the convergence of series $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$: Given any small positive number $\varepsilon>0$, it is possible to find an integer $N(z)$ so that $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right|<\varepsilon$ for every $n>N(z)$. Where, p is an arbitrary positive integer.

一致收敛(uniformly convergent) 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个与 z 无关的自然数 N,使得对于区域 D 内(或曲线 L 上)的一切 z 均有:当 $n>N$ 时,$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right|<\varepsilon$($p$ 为任意正整数),则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内(或曲线 L 上)一致收敛。

M 判别法(majorant test) 对于复变函数序列 $\{f_n(z)\}$,存在正数序列 $\{M_n\}$,使得对一切 z,有

$$|f_n(z)| \leqslant M_n, \quad n=0,1,2,\cdots \tag{3.1.7}$$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛,则复函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 绝对且一致收敛。该方法又称为维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法。

Weierstrass M test If we can construct a series of positive numbers $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, in which $|f_n(z)| \leqslant M_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ for all z in domain D and $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ is convergent, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ will be absolutely and uniformly convergent in domain D.

例 3.3 讨论复级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛性,并讨论该级数在闭圆域 $|z| \leqslant r(r<1)$ 上的一致收敛性。

解:首先对 z 的范围分情况讨论。

(1) 当 $|z|<1$ 时,正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ 收敛,故此时原级数绝对收敛,其部分和

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$$

因为 $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$,所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

当 $|z| \geqslant 1$ 时,$|z|^n \geqslant 1$,所以一般项 z^n 不可能以零为极限,从而级数发散。

(2) 在闭圆域 $|z| \leqslant r(r<1)$ 上,显然满足 $|z^n| \leqslant r^n$。因此,根据 M 判别法,该级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 在闭圆域上绝对且一致收敛。

幂级数

3.2 幂级数(power series)

3.2.1 幂级数概念(concepts of power series)

幂级数 设 z_0、a_k 为复常数,表达式

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_k(z-z_0)^k + \cdots \tag{3.2.1}$$

称为以 z_0 为中心的幂级数。以 0 为中心的幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \cdots \tag{3.2.2}$$

称为麦克劳林级数(Maclaurin series)。

如果幂级数在某点 z 收敛,则该点称为幂级数的收敛点;如果幂级数在某点 z 发散,则该点称为幂级数的发散点。如果幂级数在某点集 E 上每一点都收敛,则该点集 E 称为幂级数的收敛域;如果幂级数在某点集 E 上每一点都发散,则称该点集 E 为幂级数的发散域。

现在,考察级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k||z-z_0|^k$ 的收敛性,由比值判别法(ratio test)知

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right||z-z_0| = \frac{|z-z_0|}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|}$$

可以得到,当 $|z-z_0| < \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ 时

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k} < 1$$

则原级数绝对收敛。当 $|z-z_0| > \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ 时有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k} > 1$$

则原级数发散。定义收敛半径为

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

可以看出,在半径为 R 的圆内域 $|z-z_0|<R$ 幂级数绝对收敛,圆外域 $|z-z_0|>R$ 幂级数发散。

3.2.2 收敛半径与收敛圆(radius of convergence and circle of convergence)

若存在正数 R,使得当 $|z-z_0|<R$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 收敛,而当 $|z-z_0|>R$

时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 发散，则称 R 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径（radius of convergence），$|z-z_0|=R$ 称为收敛圆（circle of convergence）。给定一个幂级数，可以运用比值法（D'Alembert formula）或根式法求得其收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{3.2.3}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{3.2.4}$$

当 R 无穷大时，幂级数在整个平面收敛；当 R 为 0 时，幂级数在全平面发散。

例 3.4　（1）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的敛散性；

（2）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径并讨论在 $z=0,2$ 点处的敛散性。

解：（1）收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3}=1$$

因此，级数在单位圆内 $|z|<1$ 绝对收敛，在圆外发散。在收敛圆上，有 $|z|=1$，因此原级数每一项取模得到级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

该级数收敛，所以原级数在收敛圆上处处绝对收敛，故处处收敛。

（2）收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

因此，级数在圆 $|z-1|=1$ 内绝对收敛，圆外发散。当 $z=0$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，它是交错级数，级数收敛；当 $z=2$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，级数发散。

例 3.5　求下列幂级数的收敛圆：

（1）$\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k z^{2k}$；

（2）$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}z^{2k}$。

解：可以看出，两个级数都只有偶数项，属于隔项级数，不能直接运用比值法求其收敛半径。

（1）运用变量替换法令 $t=z^2$，变量替换后原级数写为 $\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k t^k$，求得其收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$，因此级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k t^k$ 的收敛域为 $|t|<\frac{1}{2}$，反变换回去有 $|z^2|<\frac{1}{2}$，因此原级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k z^{2k}$ 的收敛域为 $|z|<\frac{\sqrt{2}}{2}$。

(2) 这个级数的收敛半径可以用(1)的办法,也可以用根式判别法,结论是一样的。这里用根式判别法

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{1}{2^{2k}}\right|^{\frac{1}{2k}}}=2$$

3.2.3 幂级数的性质(properties of power series)

幂级数在数学分析中是一个重要概念,其性质主要包括以下几方面。

(1) 幂级数在收敛圆内绝对且一致收敛。

(2) 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 的收敛半径为 R_1,$g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ 的收敛半径为 R_2,则在 $|z|<R=\min(R_1,R_2)$ 内,两函数的和差及乘积构成的新级数收敛:

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n \tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned}f(z)g(z)&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_0+a_{n-1}b_1+a_{n-2}b_2+\cdots+a_0 b_n)z^n\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

(3) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R,那么有

① 它的和函数 $f(z)$,即 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 在收敛圆 $|z-z_0|<R$ 内解析;

② 幂级数在其收敛圆内可逐项求导或逐项积分,即

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}[c_n(z-z_0)^n]'=\sum_{n=0}^{\infty}nc_n(z-z_0)^{n-1} \tag{3.2.7}$$

$$\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z c_n(z-z_0)^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} \tag{3.2.8}$$

且逐项求导或逐项积分后的新级数与原级数具有相同的收敛半径。

例 3.6 设有幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}z^n(0<a<1)$,求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}z^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n$ 的收敛半径。

解:容易求得,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}z^n$ 的收敛半径都等于1,但级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n$ 的收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{a^n}{1+a^n}}{\frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a^{n+1}}{a(1+a^n)}=\frac{1}{a}>1$$

这就是说，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n$ 自身的收敛圆域大于 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}z^n$ 的公共收敛圆域 $|z|<1$。但应注意，等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n$$

成立的条件是三个级数都收敛，因此收敛圆域仍为 $|z|<1$，不能扩大。这个例题可以帮助我们深度理解幂级数的性质(2)，由两个幂级数求和差或乘积得到的新级数在 $|z|<R=\min(R_1,R_2)$ 内一定收敛，但并不意味着新级数的收敛半径一定小于原级数。

例 3.7　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^{n+1}$ 在收敛圆内的和函数。

解：求得此级数的收敛圆为 $|z|=1$，设和函数

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^{n+1},\quad |z|<1$$

逐项求导得

$$S'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z},\quad |z|<1$$

两边从 0 到 z 积分，有

$$S(z)\Big|_0^z=\int_0^z\frac{1}{1-z}\mathrm{d}z,\quad |z|<1$$

又由原级数得 $S(0)=0$，因此有

$$S(z)=-\ln(1-z),\quad |z|<1$$

3.3　泰勒级数(Taylor series)

由 3.2 节可知，一个幂级数的和函数在其收敛圆内部是一个解析函数。那么任何一个解析函数是否能用幂级数来表示呢？这个问题不但有理论意义，而且很有实用价值，将在本节讨论。

3.3.1　解析函数的泰勒展开式(Taylor expansion of analytic function)

泰勒级数 1

定理 3.7　设 $f(z)$在区域 D：$|z-z_0|<R$ 内解析，则对 D 内任意点 z，$f(z)$可展开为泰勒级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,\quad |z-z_0|<R \tag{3.3.1}$$

其中，$a_k=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi-z_0)^{k+1}}=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，且展式是唯一的。曲线 C 为区域 D 中包围 z_0 的任一简单闭曲线。特别地，当 $z_0=0$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ 称为麦克劳林级数(Maclaurin series)。

Theorem 3.7　Suppose that a function f is analytic throughout a disk $|z-z_0|<R$, centered at z_0 and with radius R, then $f(z)$ has a unique power series representation

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,\quad |z-z_0|<R$$

Where, $a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{k+1}}=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, $k=0,1,2,\cdots$. C is a simple closed contour, taken in the positive sense, in domain D.

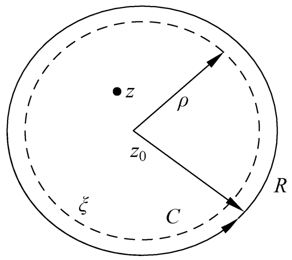

图 3.1　泰勒展开定理证明

证明：在区域 D 上作圆周 C：$|\xi-z_0|=\rho(\rho<R)$，如图 3.1 所示。因为函数 $f(z)$在区域 D 内解析，由柯西公式有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \tag{3.3.2}$$

观察式(3.3.2)，要将 $f(z)$展开为以 z_0 为中心的幂级数形式

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,\quad |z-z_0|<R$$

需要将式(3.3.2)右侧被积函数$\frac{1}{\xi-z}$展开为幂级数，考虑使用基本公式 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$，$|z|<1$，则需要找到模值小于1的某个表达式。观察发现，$\xi$ 在圆C 上，故$|\xi-z_0|=\rho$，z 在 C 的内部，故$|z-z_0|<\rho$，从而有$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1$，因此

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}} \tag{3.3.3}$$

于是有

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}} \tag{3.3.4}$$

代入式(3.3.2)，并交换积分与求和顺序，有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n \tag{3.3.5}$$

式(3.3.5)可以简写为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{3.3.6}$$

其中，系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{3.3.7}$$

由闭路变形定理可知，C 可变形为区域D 中任一简单闭曲线，这样便得到了 $f(z)$在圆内域$|z-z_0|<R$ 的幂级数展开式，但上述展开式是否唯一呢？可以证明其唯一性。假设 $f(z)$在$|z-z_0|<R$ 内可展开为另一展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(z-z_0)^n \tag{3.3.8}$$

$f(z)$是解析函数，因此存在 n 阶导数，对式(3.3.8)两边求 n 阶导数，有

$$f^{(n)}(z)=n!d_n+(n+1)!d_{n+1}(z-z_0)+\cdots \tag{3.3.9}$$

令式(3.3.9)中 $z=z_0$，可得到

$$d_n=\frac{f^n(z_0)}{n!}=c_n,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{3.3.10}$$

故展开式系数唯一。

3.3.2 泰勒级数的收敛半径(radius of convergence of Taylor series)

定理 3.8 若一个解析函数展开成以 z_0 为中心的泰勒级数，则其收敛圆是以 z_0 为圆心，以 z_0 与最近奇点 b 之间距离 $|z_0-b|=R$ 为半径的圆，R 即为泰勒级数的收敛半径。

如果在以 z_0 为中心的圆域 $|z-z_0|<R$ 内，一个函数可以展开成泰勒级数，则该函数必须解析，那么所有奇点必须位于圆域外。这样，就不难证明上述定理。当然，也可由泰勒展开式中的系数 a_k 表达式求得收敛半径。

例如，若已知函数$\dfrac{1}{1-z}$在以 $z_0=0$ 为中心的圆域内可以展开为泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_k z^n$，有两种方法确定其收敛半径。一种方法是求得$a_k$，然后通过3.2节的方法求得收敛半径，第二种方法是分析函数$\dfrac{1}{1-z}$ 的奇点与展开中心 $z_0=0$ 之间的关系得到收敛半径。该函数只有一个奇点 $z_1=1$，因此收敛半径为该奇点与展开中心的距离，即$R=|z_1-z_0|=1$，展开后幂级数的收敛域为$|z-z_0|<R$，即$|z|<1$。第二种方法是函数的解析性与是否能展开成泰勒级数联系的灵活应用，该方法常常对于复杂函数更为方便。

例 3.8 已知 $f(z)=\dfrac{z^{2006}}{(z-10)(z-3)^{2008}}$可以展开为以 $z_0=0$ 为中心的泰勒级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k z^k$，求该泰勒级数的收敛域。

解：可以看出，函数要展开为泰勒级数，过程是相当烦琐的，因此运用第二种方法计算收敛域更为方便。

函数 $f(z)$有两个奇点 $z_1=3$ 和 $z_2=10$，距离展开中心 $z_0=0$ 最近的奇点为 $z_1=3$，且距离为$|z_1-z_0|=3$。因此该泰勒级数的收敛半径为 3，收敛域为$|z|<3$。

3.3.3 将函数展开成泰勒级数的实例(examples of Taylor series expansion)

泰勒级数 2

将简单的解析函数展开为泰勒级数，可以使用泰勒展开定理中的基本公式，即直接展开法。

例 3.9 在 $z_0=0$ 的邻域上把 $f(z)=e^z$ 展开为泰勒级数。

解：对函数 $f(z)=e^z$ 求导，有 $f^{(k)}(z)=e^z$，在 $z_0=0$ 时，$f^{(k)}(z_0)=1$，因此有

$$c_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}=\frac{1}{k!}$$

于是得到泰勒展开式为

$$f(z)=\mathrm{e}^z=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

例 3.10 在 $z_0=0$ 的邻域上将 $f_1(z)=\sin z$ 和 $f_2(z)=\cos z$ 展开为泰勒级数。

解：对函数 $f_1(z)=\sin z$ 求导，有

$$f_1'(z)=\cos z$$

$$f_1''(z)=-\sin z$$

$$f_1^{(3)}(z)=-\cos z$$

$$f_1^{(4)}(z)=\sin z$$

四阶导数为函数本身，因此更高阶导数是前四阶导数的重复，在 $z_0=0$ 处有

$$f_1(0)=0,\quad f_1'(0)=1,\quad f_1''(0)=0,\quad f_1^{(3)}(0)=-1,\quad f_1^{(4)}(0)=0$$

按照定义式有

$$c_{2n}=0,\quad c_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!},\quad n=0,1,2,\cdots$$

得到展开式为

$$f_1(z)=\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots$$

同理也可以得到 $f_2(z)=\cos z$ 在 $z_0=0$ 邻域上的泰勒展开式

$$f_2(z)=\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots$$

两级数的收敛半径均为无穷大。

当 $f(z)$ 较复杂时，求 $f^{(n)}(z_0)$ 比较麻烦。因为泰勒展开式的唯一性，可以灵活使用间接展开法，利用基本展开公式及幂级数的代数运算、代换、逐项求导或逐项积分等方法将某一函数展开成幂级数，常用的基本展开公式有

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\quad |z|<1 \tag{3.3.11}$$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1 \tag{3.3.12}$$

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n},\quad |z|<1 \tag{3.3.13}$$

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<+\infty \tag{3.3.14}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\quad |z|<+\infty \tag{3.3.15}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad |z|<+\infty \tag{3.3.16}$$

这些基本公式可以看作有一定条件的恒等式，对于具有类似形式的函数，只要寻找到满足一定条件的表达式，就可以运用这些恒等式简便地完成级数展开，同时利用条件表达式得到收敛域。

例 3.11 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$，在 $|z-1|<2$ 内展开成幂级数。

解：函数 $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$ 有一个奇点 $z=-1$，而在 $|z-1|<2$ 内处处解析，所以可展开成 z 的幂级数。展开域中心为 1，展开后幂级数形式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_k(z-1)^n$，运用式(3.3.11)，有

$$f(z)=\frac{z}{z+1}=1-\frac{1}{1+z}=1-\frac{1}{(z-1)+2}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n=1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(z-1)-\frac{1}{8}(z-1)^2+\cdots$$

由基本公式的使用条件 $\left|\dfrac{z-1}{2}\right|<1$ 可得该级数的收敛域为 $|z-1|<2$，于是有

$$f(z)=\frac{z}{1+z}=1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}},\quad |z-1|<2$$

需要说明的是，将一个复变函数展开为幂级数，必须同时写出收敛域，因为只有在收敛域内，幂级数才收敛，且和函数为解析函数 $f(z)$。

例 3.12 将 $f(z)=\dfrac{1}{z+2}$ 在 $z_0=2$ 处展开为泰勒级数。

解：函数 $f(z)=\dfrac{1}{z+2}$ 只有一个奇点 $z=-2$，而在 $|z-2|<4$ 内处处解析，所以可展开为 z 的幂级数。展开中心为 2，展开后幂级数形式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_k(z-2)^n$，运用式(3.3.11)，有

$$f(z)=\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4+z-2}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{4}\right)^n,\quad |z-2|<4$$

例 3.13 将 $f(z)=e^{z^2}\sin z^2$ 展开为泰勒级数。

解：运用式(3.3.14)和式(3.3.16)有

$$f(z)=e^{z^2}\sin z^2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{2k}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{4n+2}$$

$$=\left(1+z^2+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\cdots\right)\left(\frac{z^2}{1!}-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-\frac{z^{14}}{7!}+\cdots\right)$$

$$=z^2-\frac{z^6}{6}+z^4+\frac{z^6}{2}\cdots=z^2+z^4+\frac{z^6}{3}+\cdots,\quad |z|<\infty$$

例 3.13 中，也可以运用欧拉公式有

$$f(z)=e^{z^2}\sin z^2=e^{z^2}\frac{e^{iz^2}-e^{-iz^2}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[e^{(1+i)z^2}-e^{(1-i)z^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^{2n}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n z^{2n}}{n!}\right]=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(1+i)^n-(1-i)^n]z^{2n}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}(e^{i\frac{n\pi}{4}}-e^{-i\frac{n\pi}{4}})z^{2n}}{n!2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}z^{2n}=z^2+z^4+\frac{z^6}{3}+\cdots,\quad |z|<+\infty$$

可以看出,运用欧拉公式可以得到幂级数的通式,但需要花费更多的时间。在具体的工程实践中,经常只需要级数的前几项,因此可以选择第一种方法完成级数的展开。

例 3.14 将函数 $f(z)=\ln(1+z)$ 在 $z_0=0$ 处展开成幂级数。

解:函数 $f(z)=\ln(1+z)$ 只有一个奇点 $z=-1$,而在 $|z|<1$ 内处处解析。函数可以展开成以 $z_0=0$ 为中心的幂级数。又因为导函数

$$[\ln(1+z)]'=\frac{1}{1+z}$$

运用基本公式,右侧函数展开为幂级数

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1$$

两边计算定积分 $\int_0^z$,有

$$\ln(1+z)\big|_0^z=\int_0^z\frac{1}{1+z}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(-1)^n z^n dz$$

从而有

$$\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1},\quad |z|<1$$

例 3.15 将函数 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 在 $z_0=0$ 处展开成幂级数。

解:函数 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 在单位圆周 $|z|=1$ 上有一个奇点 $z=-1$,而在 $|z|<1$ 内处处解析,所以它在 $|z|<1$ 内可展开成 z 的幂级数

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n,\quad |z|<1$$

例 3.16 将函数 $\arctan z$ 在 $z_0=0$ 处展开为泰勒级数。

解:因为 $(\arctan z)'=\frac{1}{1+z^2}$,因此先将 $\frac{1}{1+z^2}$ 展开为泰勒级数,再逐项积分得到原函数的泰勒级数。

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n},\quad |z|<1$$

两边积分

$$\int_0^z\frac{1}{1+\xi^2}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^z\xi^{2n}d\xi,\quad |z|<1$$

得

$$\arctan z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\quad |z|<1$$

例 3.17　将 $f(z)=\dfrac{1}{1-3z+2z^2}$ 在 $z_0=0$ 处展开为泰勒级数。

解：$f(z)=\dfrac{1}{1-3z+2z^2}=\dfrac{1}{(1-2z)(1-z)}=\underbrace{\dfrac{2}{1-2z}}_{I}-\underbrace{\dfrac{1}{1-z}}_{II}$

又因为第一项在 $|2z|<1$ 条件下可展开为 $I=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2z)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n+1}z^n$，而第二项在 $|z|<1$ 条件下可展开为 $II=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$，因此函数 $f(z)$ 的展开式为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)z^n$$

且该泰勒级数收敛域为 $|2z|<1$ 和 $|z|<1$ 的交集 $|z|<\dfrac{1}{2}$。

3.4　洛朗级数(Laurent series)

由 3.3 节的讨论知，若函数在给定的圆域内解析，则可以将其展开成泰勒级数。但很多时候，某些函数在讨论的区域中存在奇点，特别是有时需要讨论奇点邻域上函数的性质。那么，能否在挖掉奇点的复连通区域上将函数展开成幂级数呢？这就是本节要讨论的问题——洛朗级数。洛朗级数和泰勒级数都是研究复变函数的有力工具。

3.4.1　洛朗级数定义(definition of Laurent series)

洛朗级数 1

在 3.3 节中，将函数 $\dfrac{1}{1-z}$ 在以 $z_0=0$ 点为中心的圆域 $|z|<1$ 上展开为幂级数 $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$。事实上，该函数在整个复平面上仅有 $z_1=1$ 一个奇点，也就是说，函数在 $z_1=1$ 以外的点都是解析的，那么在 $|z|>1$ 的区域内能否展开为幂级数呢？观察发现，当 $|z|>1$ 时，有 $\dfrac{1}{|z|}<1$，即 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$，从而可得

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots \tag{3.4.1}$$

因此，函数 $\dfrac{1}{1-z}$ 在除 $|z|=1$ 的整个复平面都可以展开为幂级数，即

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots,\quad |z|>1 \tag{3.4.2}$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots,\quad |z|<1 \tag{3.4.3}$$

也就是说，如果不限制一定要展开为只含正幂次项的幂级数，那么就有可能将一个函数在除奇点外的整个复平面展开为幂级数，这就是洛朗级数。

将形如式(3.4.4)的级数称为洛朗级数。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \cdots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots \tag{3.4.4}$$

其中,z_0、c_n($n=0,\pm1,\pm2,\cdots$)为复常数。容易看出,洛朗级数是一个双边幂级数,由正幂项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$(含常数项)和负幂项级数 $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ 两部分组成。洛朗级数可看成正幂项级数与负幂项级数的和,我们规定,当且仅当正幂项级数和负幂项级数都收敛时原级数收敛。

正幂项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 和 3.3 节的幂级数相同,其收敛域是一个圆内域。设其收敛半径为 R_2,则当 $|z-z_0|<R_2$ 时该级数收敛,而当 $|z-z_0|>R_2$ 时级数发散。

负幂项级数 $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 是新类型的级数,如果令 $\xi=(z-z_0)^{-1}$,可以得到我们熟悉的单边幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\xi^n = c_{-1}\xi + c_{-2}\xi^2 + \cdots + c_{-n}\xi^n + \cdots \tag{3.4.5}$$

其收敛域为 ξ 平面上以 $\xi=0$ 为中心的圆域,设其收敛半径为$\frac{1}{R_1}$,则当 $|\xi|<\frac{1}{R_1}$时级数收敛。变量替换后有 $\left|\frac{1}{z-z_0}\right|<\frac{1}{R_1}$,也即 $|z-z_0|>R_1$,所以负幂项级数在 z 平面上的圆外域 $|z-z_0|>R_1$ 收敛。同理可以得到,该幂级数在 z 平面上的圆内域 $|z-z_0|<R_1$ 是发散的。

综上可知,同时满足 $|z-z_0|<R_2$ 和 $|z-z_0|>R_1$ 时原级数收敛。当 $R_1>R_2$ 时,两个收敛域的交集等于空集,此时原级数发散。当 $R_1<R_2$ 时,洛朗级数在正幂项级数和负幂项级数收敛域的公共部分 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内收敛,在圆环外发散。而在圆环的两个边界 $|z-z_0|=R_1$、$|z-z_0|=R_2$ 上,可能有些点收敛,有些点发散。

因此,洛朗级数的收敛域为圆环域:$R_1<|z-z_0|<R_2$。需要指出的是,在一些特殊情况下圆环域的内半径 R_1 可能为 0,外半径 R_2 可能是无穷大。

定理 3.9 设函数 $f(z)$在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析,则在此圆环内 $f(z)$必可展开成洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{3.4.6}$$

其中,系数

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi, \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{3.4.7}$$

曲线 C:$|z-z_0|=R(R_1<R<R_2)$为圆环域内包围 z_0 的任意闭合圆周(或简单闭曲线),逆时针为正方向。根据闭路变形定理,C 可以是以 z_0 为圆心以 R 为半径的圆,即 $|z-z_0|=R(R_1<R<R_2)$。

式(3.4.6)称为函数 $f(z)$在该圆环域内的洛朗展开式。负幂项部分称为洛朗级数的主要部分(principal part),正幂项部分称为洛朗级数的解析部分(analytic part),又称为正则

部分。可以证明洛朗展开式是唯一的。

Theorem 3.9　Suppose that a function $f(z)$ is analytic throughout an annular domain $R_1<|z-z_0|<R_2$ centred at z_0, then at each point in the domain, $f(z)$ has the series representation

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

Where, $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ and C denotes any positively oriented simple closed contour around z_0 and lying in that domain. It can be $C:|z-z_0|=R(R_1<R<R_2)$.

证明：设 z 是圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内任一点，作以 z_0 为中心，位于圆环内的圆周 Γ_1：$|z-z_0|=\rho_1>R_1$，Γ_2：$|z-z_0|=\rho_2<R_2$，$(\rho_1<\rho_2)$，两者均为逆时针方向，且 z 满足 $\rho_1<|z-z_0|<\rho_2$，如图 3.2 所示。

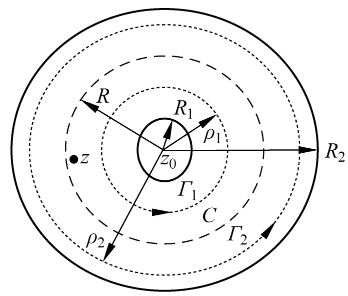

图 3.2　洛朗展开定理的证明

因为 $f(z)$ 在闭圆环域 $\rho_1\leqslant|z-z_0|\leqslant\rho_2$ 内解析，其边界 $\Gamma=\Gamma_2+\Gamma_1^-$，所以由复连通区域的柯西积分公式有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

即

$$f(z)=\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi}_{I}+\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{z-\xi}d\xi}_{II}$$

类似泰勒展开定理的证明过程，上式右端第一个积分 I 可写成

$$I=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\quad n=0,1,2,\cdots$$

设 $C:|z-z_0|=R$，且满足 $\rho_1<R<\rho_2$，则由闭路变形定理式(2.2.7)，系数 c_n 也可表示为

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{3.4.8}$$

右端第二个积分 II 中 ξ 是 Γ_1 上的点，故有 $|z-z_0|>|\xi-z_0|$，即 $\left|\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0}\right|<1$，所以有

$$\frac{1}{z-\xi}=\frac{1}{-(\xi-z_0)+(z-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0}}=\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{(\xi-z_0)^{l-1}}{(z-z_0)^l}$$

因此

$$II=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{z-\xi}d\xi=\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}f(\xi)\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{(\xi-z_0)^{l-1}}{(z-z_0)^l}d\xi\right]$$

交换求和与积分顺序,有

$$Ⅱ=\sum_{l=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}f(\xi)(\xi-z_0)^{l-1}d\xi\right](z-z_0)^{-l}$$

$$\overset{n=-l}{=}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\right](z-z_0)^n$$

运用闭路环形定理有

$$Ⅱ=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\right](z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n$$

其中,$C:|z-z_0|=R$,沿逆时针方向。综上讨论,可得

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n,\quad R_1<|z-z_0|<R_2 \tag{3.4.9}$$

其中,$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$。类似于泰勒展开定理,也可以证明洛朗展开式是唯一的。

由证明过程可知,定理中的 $C:|z-z_0|=R$ 也可以写成圆环域 $R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant R_2$ 内绕 z_0 的任一正向简单闭曲线。另外,一个函数可能在几个圆环域内解析,在不同的圆环域内的洛朗展开式是不同的,但在同一圆环域内,不论用何种方法展开,所得的洛朗展开式是唯一的。

需要注意洛朗级数展开系数与泰勒级数展开系数在写法上的区别。洛朗展开式中的 c_n 不能写成 $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$。这是因为,积分路径处于复连通区域中,曲线 C 内部可能包围了奇点。多数情况下,z_0 就是函数 $f(z)$ 的奇点,而奇点处 $f^{(n)}(z_0)$ 不存在。

在上述定理中,如果 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 上解析,则当 $n\leqslant-1$ 时被积函数 $\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析,由柯西积分公式可知,当 $n\leqslant-1$ 时,$c_n=0$。这种情况下,洛朗级数就退化成为泰勒级数。由此可见,泰勒级数是洛朗级数的特殊情况。

3.4.2 洛朗级数的收敛性(convergence of Laurent series)

设 a、b 分别为函数 $f(z)$ 的两个相邻奇点,将函数展开为以 z_0 为中心的洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$,则该级数必在环域 $|a-z_0|<|z-z_0|<|b-z_0|$ 内收敛(设 $|a-z_0|<|b-z_0|$)。

洛朗级数 2

3.4.3 洛朗级数展开实例(examples of Laurent series expansion)

理论上,可以运用洛朗级数展开定理中式(3.4.6)和式(3.4.7)完成函数的洛朗级数展开。但由前面的讨论可知,积分形式的系数公式计算往往是相当困难的,因此只有个别情况直接运用展开定理进行洛朗级数展开。因为洛朗展开式的唯一性,常常借助一些已知的级数基本公式及逐项求导、逐项积分、代换等简便方法将函数展开成为洛朗级数。

这里需要注意，不管运用哪种级数展开方式，最后需要将级数合并同类项，也就是说，从最终级数表达式很容易看出其第 n 项的系数，这对于幂级数的性质研究和应用都非常重要。

例 3.18　把函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 在以 $z=0$ 为中心的圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数。

解：因为函数形式简单，可以用直接法展开，利用式(3.4.7)有

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\dfrac{e^\xi}{\xi^2}}{(\xi-0)^{n+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^\xi}{\xi^{n+3}}d\xi$$

其中，C 为圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内的任意一条简单曲线。

当 $n+3\leqslant 0$，即 $n\leqslant -3$ 时，由于 $e^z z^{-n-3}$ 解析，$c_n=0$，即

$$c_{-3}=0,\quad c_{-4}=0,\quad c_{-5}=0,\quad \cdots$$

当 $n+3>0$，即 $n>-3$ 时，运用高阶导数式(2.3.9)有

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^\xi}{\xi^{n+3}}d\xi=\frac{1}{(n+2)!}(e^\xi)^{(n+2)}\Big|_{\xi=0}=\frac{1}{(n+2)!}$$

故有

$$\frac{e^z}{z^2}=\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{z^n}{(n+2)!}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}z+\frac{1}{4!}z^2+\cdots$$

当然也可以运用式(3.3.14)完成级数展开，有

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{z^2}&=\frac{1}{z^2}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}z+\frac{1}{4!}z^2+\cdots,\ |z|<+\infty\end{aligned}$$

可以看出，间接展开法比直接展开法更加高效。

例 3.19　函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在下列圆环域内是处处解析的，将函数 $f(z)$ 在这些环域内展开成幂级数。

(1) $0<|z|<1$；　　(2) $1<|z|<2$；

(3) $2<|z|<+\infty$；　　(4) $0<|z-1|<1$。

解：观察以上几个环域发现，前三个环域的中心都是 0，因此展开的形式为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n$，最后一个环域 $0<|z-1|<1$ 的中心为 1，因此展开的级数形式为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-1)^n$。

(1) 先将 $f(z)$ 写成部分分式，即

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$$

由于 $|z|<1$，从而 $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$，利用式(3.3.11)有

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\quad |z|<1$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\quad \left|\frac{z}{2}\right|<1$$

所以有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n,\quad 0<|z|<1$$

(2) 在环域 $1<|z|<2$ 内,有 $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, $\left|\frac{z}{2}\right|<1$,所以有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=\cdots-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\cdots,\quad 1<|z|<2$$

(3) 由于 $|z|>2$,所以 $\left|\frac{2}{z}\right|<1$, $\left|\frac{1}{z}\right|<\left|\frac{2}{z}\right|<1$,所以有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)\frac{1}{z^{n+1}}=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots,\quad |z|>2$$

(4) 因为 $0<|z-1|<1$,所以

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

第二个分式本来就是 1 为中心的洛朗级数,只需要将第一项展开,运用式(3.3.11),有

$$f(z)=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{z-1},\quad 0<|z-1|<1$$

例 3.20 将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)^2}$ 在 $0<|z-2|<1$ 内展开为洛朗级数。

解:由环域 $0<|z-2|<1$ 可知,展开的级数形式应为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-2)^n$。$\frac{1}{z-2}$ 本身就是这种幂级数形式,因此只需要对 $\frac{1}{(z-3)^2}$ 进行幂级数展开,然后逐项乘以 $\frac{1}{z-2}$ 即可。又因为

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-2)-1}=-\frac{1}{1-(z-2)}=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-2)^n,\quad |z-2|<1$$

而

$$\frac{1}{(z-3)^2}=-\left(\frac{1}{z-3}\right)'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}n(z-2)^{n-1}$$

$$=1+2(z-2)+\cdots+n(z-2)^{n-1}+\cdots,\quad |z-2|<1$$

所以有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}\frac{1}{(z-3)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n(z-2)^{n-2}$$
$$=\frac{1}{z-2}+2+3(z-2)+\cdots+n(z-2)^{n-2}+\cdots,\ 0<|z-2|<1$$

也可以将去心邻域中的闭合环路积分与洛朗级数系数联系起来，在洛朗展开式中第 n 项的系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

令 $n=-1$，可得

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3.4.10}$$

或写为

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z \tag{3.4.11}$$

可以看出，由幂级数展开式的系数可以直接计算得到函数沿闭合路径 C 的回路积分，即

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}c_{-1} \tag{3.4.12}$$

这样，只需要求得函数 $f(z)$在 z_0 去心邻域上幂级数的-1次幂系数，即可得到去心邻域中的闭合环路积分。需要注意一点，曲线 C 必须是环域中围绕中心 z_0 的闭合环路。

例 3.21 计算积分$\oint_{|z|=2}\frac{z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z}\mathrm{d}z$。

解：函数 $f(z)=\frac{z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z}$在 $1<|z|<+\infty$内解析，而积分路径$|z|=2$ 在此环域内，故可以在 $1<|z|<+\infty$上将函数展开为洛朗级数，然后运用式(3.4.12)求出积分。注意到$\left|\frac{1}{z}\right|<1$，因此有

$$f(z)=\frac{z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z^{-1}-1}=-\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z^{-1}}$$
$$=-(1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots)\left[1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots\right]$$
$$=-\left(1+\frac{2}{z}+\frac{5}{2z^2}+\cdots\right)$$

故 $c_{-1}=-2$，从而有

$$\oint_{|z|=2}\frac{z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}c_{-1}=-4\pi\mathrm{i}$$

3.5 单值函数的孤立奇点(isolated singular points of single-valued functions)

孤立奇点
的分类

若函数 $f(z)$在某点 z_0 不可导，而在 z_0 的任意邻域内除 z_0 外连续可导，则称 z_0 为

$f(z)$的孤立奇点；如果在 z_0 的无论多小的邻域内总可以找到 z_0 以外的不可导点，则称 z_0 为 $f(z)$的非孤立奇点(nonisolated singular points)。孤立奇点比较常见，比如 $z_0=0$ 是函数$\dfrac{1}{z}$和 $e^{1/z}$ 的孤立奇点，$z_1=i$ 和 $z_2=-i$ 是函数$\dfrac{1}{1+z^2}$的两个孤立奇点。再举一个非孤立奇点的例子，比如点$\dfrac{1}{\sin(1/z)}$存在无穷多个奇点 $z_0=0$，$z_k=\dfrac{1}{k\pi}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$，如图 3.3 所示。考查其中一个奇点 $z_0=0$，可以看到，由于当 $k\to\infty$时，$z_k\to0$，无论在 $z_0=0$ 多小的邻域内都可以找到其他的奇点，因此 $z_0=0$ 是函数$\dfrac{1}{\sin(1/z)}$的非孤立奇点。

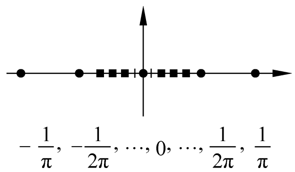

图 3.3　非孤立奇点

在孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<R$ 上，单值解析函数 $f(z)$可以展开为 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$，该级数叫作孤立奇点的洛朗级数展开。其中，正幂部分 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 是该级数的解析部分(the analytic part)，负幂部分 $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-z_0)^n$ 是该级数的主要部分(the principal part)，级数中负一次幂系数 c_{-1} 具有特殊的作用，被称为 $f(z)$在点 $z=z_0$ 处的留数(residue)。

根据孤立奇点邻域 $0<|z-z_0|<R$ 上洛朗级数的特点，可以将孤立奇点分为三大类。如果主要部分不存在，即洛朗级数为

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots \tag{3.5.1}$$

则该孤立奇点称为可去奇点(removable singular points)，显然有

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=c_0 \tag{3.5.2}$$

可见，该函数在可去奇点的邻域上是有界的。如果定义新的函数

$$g(z)=\begin{cases}f(z), & z\neq z_0\\ c_0, & z=z_0\end{cases} \tag{3.5.3}$$

则函数在 z_0 点的奇异性就可去了，可以将其看作解析函数，这也是称其为可去奇点的由来。

容易证明，以下每一条都可以作为判定孤立奇点 z_0 为可去奇点的充分必要条件(sufficient and necessary conditions)，也可作为可去奇点的定义。

(1) $f(z)$在奇点 z_0 去心邻域内的洛朗级数无主要部分。

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$，$c_0\neq\infty$。

(3) $f(z)$在 z_0 的去心邻域内有界。

例如，$z_0=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$的奇点，又因为在 $z_0=0$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$上函数可展开为

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!},\quad 0<|z|<+\infty \tag{3.5.4}$$

可以看出，该幂级数没有主要部分，因此 $z_0=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 的可去奇点。如果定义新的函数

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & z\neq 0\\ 1, & z=0\end{cases}$$

该函数就是 $|z|<+\infty$ 域上的解析函数了。

如果在环域 $0<|z-z_0|<R$ 上洛朗级数的主要部分为有限项，即

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{n=-m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\\&=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1}+\cdots+\\&\quad c_0+c_1(z-z_0)+\cdots,\ c_{-m}\neq 0\end{aligned}\tag{3.5.5}$$

则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点(poles of order m)。显然，对于极点 z_0 有 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$。

例如，函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)^2}$ 只有 $z_0=2$ 一个奇点。可以看出，函数 $f(z)$ 本身就是一个只有 -2 次幂的幂级数形式，因此 $z_0=2$ 为函数的二阶极点。而函数 $g(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 有两个奇点 $z_1=1$、$z_2=2$，且在奇点 $z_1=1$、$z_2=2$ 邻域上的级数展开形式分别为

$$\begin{aligned}g(z)&=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-1}\,\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1-(z-1)}\\&=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n,\quad 0<|z-1|<1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(z)&=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}\,\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}\,\frac{1}{1+(z-2)}\\&=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n,\quad 0<|z-2|<1\end{aligned}$$

所以两个奇点均是一阶极点，又称为单极点(simple pole)。极点还可以由定理 3.10 判定。

零点(zero) 不恒等于零的解析函数 $f(z)$ 如果能表示成

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)\tag{3.5.6}$$

其中，m 为正整数，$\varphi(z)$ 在 z_0 点解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$，那么 z_0 称为 $f(z)$ 的 m 阶零点。

定理 3.10 如果 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶极点，那么 z_0 就是函数 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点，反过来也成立。

Theorem 3.10 If z_0 is the pole of order m for the function $f(z)$, then z_0 is the zero of order m for the function $\dfrac{1}{f(z)}$ and vice versa.

可以证明，以下每一条都可以作为孤立奇点 z_0 为 m 阶极点的充分必要条件。

(1) $f(z)$ 在奇点 z_0 的去心邻域内的洛朗级数形式为

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\quad c_{-m}\neq 0\tag{3.5.7}$$

(2) $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)}$，$\varphi(z)$解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$。

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=a(a\neq 0)$。

实际上，孤立奇点 z_0 是极点的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$，但不能判断极点阶数。

如果函数在环域 $0<|z-z_0|<R$ 上洛朗级数的主要部分为无穷项，即

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{3.5.8}$$

则称 z_0 为 $f(z)$的本性奇点(essential singular point)。在本性奇点处，极限 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$不存在。

例如，$z_0=0$ 为函数 $e^{\frac{1}{z}}$ 的奇点，又因

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n},\quad 0<|z|<+\infty$$

有无穷多项负幂项，故 $z_0=0$ 是函数 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点。沿正实轴和负实轴两个不同方向求得极限$\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{1}{z}}$值分别为$\infty$和 0，因此该极限不存在。

可以证明，以下每一条都可以作为孤立奇点 z_0 为本性奇点的充分必要条件。

(1) $f(z)$在奇点 z_0 去心邻域内的洛朗级数形式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\quad c_{-\infty}\neq 0 \tag{3.5.9}$$

(2) 极限 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$不存在。

对于无穷远点这类特殊的奇点，我们使用变量替换法讨论。通过变换 $t=1/z$，将函数 $f(z)$化作 $f(1/t)$，若 $t=0$ 是 $f(1/t)$的可去奇点，则 $z=\infty$就是 $f(z)$的可去奇点，若 $t=0$ 是 $f(1/t)$的极点，则 $z=\infty$就是 $f(z)$的极点，若 $t=0$ 是 $f(1/t)$的本性奇点，则 $z=\infty$就是 $f(z)$的本性奇点。

比如，$z=\infty$是复变函数 $f(z)=1+z$ 的单极点，$z=\infty$是复变函数 $f_1(z)=e^z$，$f_2(z)=\sin z$，$f_3(z)=\cos z$ 的本性奇点。

例 3.22 判断 $z_0=1$ 是函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$的何种类型奇点。

解：在 $z_0=1$ 的去心邻域上，函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$展开为洛朗级数

$$e^{\frac{1}{z-1}}=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots$$

因此，$z_0=1$ 为 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$的本性奇点。

对于形式为 $f(z)=e^{g(z)}$的函数，如果 $g(z)$以 z_0 为极点，那么 $z=0$ 为 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点。例如，例 3.22 中的函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$，由于$\dfrac{1}{z-1}$以 $z_0=1$ 为一阶极点，因此 $z_0=1$ 是函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$的本性奇点。

例 3.23 求下列函数的孤立奇点，并指出类型。

(1) $f(z)=\dfrac{z-2}{(z^2+1)(z-1)^2}$；

(2) $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^2}$。

解：(1) 复变函数 $f(z)=\dfrac{z-2}{(z^2+1)(z-1)^2}=\dfrac{z-2}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})(z-1)^2}$，由定理 3.10 可知三个孤立奇点分别为 $z_1=\mathrm{i}$，$z_2=-\mathrm{i}$，$z_3=1$，且三个奇点分别为单极点、单极点、二阶极点。

(2) 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^2}=\dfrac{(z-1)(z+1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^2}$的奇点为

$$z_k=k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

因为

$$\begin{aligned}\lim_{z\to1}(z-1)f(z)&=\lim_{z\to1}(z-1)^2\frac{(z+1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^2}\\&=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)^2}{(\sin\pi z)^2}\lim_{z\to1}(z+1)(z-2)^3=-\frac{2}{\pi^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to-1}(z+1)f(z)&=\lim_{z\to-1}(z+1)^2\frac{(z-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^2}\\&=\lim_{z\to-1}\frac{(z+1)^2}{(\sin\pi z)^2}\lim_{z\to-1}(z-1)(z-2)^3=\frac{54}{\pi^2}\end{aligned}$$

$$\lim_{z\to2}f(z)=\lim_{z\to2}\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^2}=\lim_{z\to2}\frac{(z-2)^3}{(\sin\pi z)^2}\lim_{z\to2}(z^2-1)=0$$

当 $k\neq1,-1,2$ 时，有

$$\lim_{z\to k}(z-k)^2f(z)=\lim_{z\to k}\frac{(z-k)^2}{(\sin\pi z)^2}\lim_{z\to k}(z^2-1)(z-2)^3=\frac{(k^2-1)(k-2)^3}{\pi^2}$$

因此，三个奇点 1、−1、2 分别为单极点、单极点和可去奇点，其他 $k(k\neq1,-1,2)$为二阶极点。

3.6 基于 MATLAB 的幂级数展开（power series expansion based on MATLAB）

本节介绍幂级数展开及求和函数的编程实现。如果一个幂级数是收敛的，可以运用函数实现幂级数和函数的计算，也可以将一个解析函数展开为以给定点为中心的泰勒级数。常见的 MATLAB 级数操作命令如下：

syms var1, var2, …	%定义变量
s=symsum(f, n, a, b)	%其功能是计算级数和 $\sum_{n=a}^{b} f$。其中 f 是包含符号变量 n 的表达式。当 %f 的表达式中只含一个变量时，参数 n 可省略
r=taylor(f, n, z, z0)	%将函数 f 展开为以 z0 为中心的泰勒级数。其中，z 是变量，n 为泰勒 %展开式项数，其默认值为 n=6，z0 的默认值为 z0=0
gamma(n+1)	%求阶乘 n!

例 3.24 求下列幂级数的和函数。

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^{n+1};\ f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n;\ f_3(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n。$$

MATLAB 代码：

```
clear
clc
syms n z;
f1=z^(n+1)/(n+1);                    %级数 f1
s1=symsum(f1,n,0,inf)
f2=(-1)^n*(n+1)*z^n;                 %级数 f2
s2=symsum(f2,n,0,inf)
f3=z^n/gamma(n+1);                   %级数 f3
s3=symsum(f3,n,0,inf)
```

结果如下：

```
s1 =-log(1-z)
s2 =1/(z+1)^2
s3 =exp(z)
```

例 3.25 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$展开成以 1 为中心的泰勒级数。

MATLAB 代码：

```
syms z
f=z/(z+1);
r=taylor(f,8,z,1)
```

运行结果为

```
r=1/4+1/4*z-1/8*(z-1)^2+1/16*(z-1)^3-1/32*(z-1)^4+1/64*(z-1)^5-1/128*
(z-1)^6+1/256*(z-1)^7
```

运用 MATLAB 编程也可以观察级数的收敛性。

例 3.26 观察下列级数的部分和变化趋势。

$$f_1(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\quad f_2(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

MATLAB 代码：

```
clear
clc
clf
for n=1:100
    for k=1:n
        f1(k)=1/k;                   %级数 f1
        f2(k)=(-1)^k/k;              %级数 f2
    end
    s1(n)=sum(f1);                   %计算 f1 所有元素总和
    s2(n)=sum(f2);                   %计算 f2 所有元素总和
end
```

```
figure(1)
plot(s1)
figure(2)
plot(s2)
```

运行结果如图 3.4 所示。可以看出，f_1 发散，f_2 收敛，运用 symsum()函数还可以求出收敛和，语句和结果如下：

```
sym n;
symsum((-1)^n/n,1,inf)
```

运行结果为

```
ans =-log(2)
```

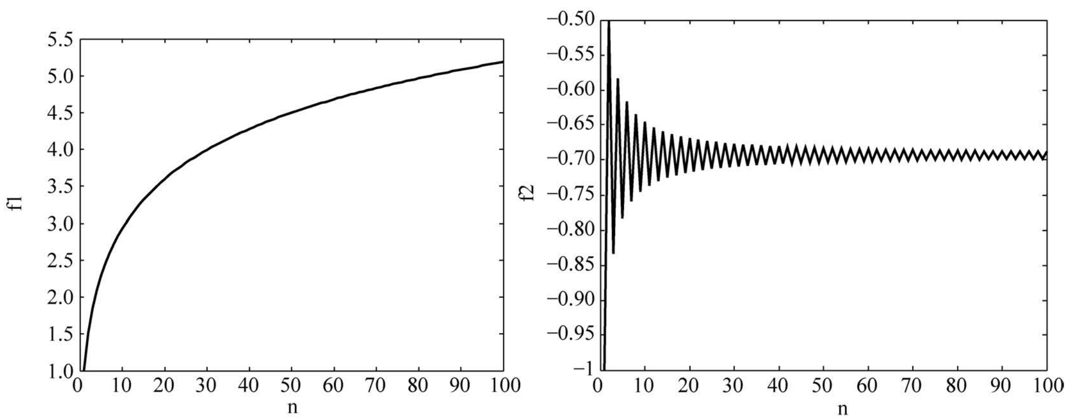

图 3.4　级数部分和的变化趋势

第 3 章习题

1. 判断下列级数的收敛性与绝对收敛性。

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^k}{k}$；　(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^k}{k^2}$。

2. 确定下列级数的收敛半径。

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$；　(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{\ln k}z^k$；　(3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}z^k$；

(4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}z^{2k}$；　(5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[2+(-1)^k]^k z^k$。

3. 已知幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k z^k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k z^k$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，确定下列级数的收敛半径。

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}k^n a_k z^k$；　(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^k a_k z^k$；　(3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k^n z^k$；

(4) $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)z^k$；　(5) $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k-b_k)z^k$；　(6) $\sum_{k=0}^{\infty}a_kb_kz^k$；

(7) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}z^k$。

4. 将下列函数展开成泰勒级数，并指出其收敛域。

(1) $\frac{1}{(1-z)^2}$在 $z=0$ 处；　(2) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$在 $z=0$ 处；　(3) $\frac{z-3}{(z-1)(z-2)}$在 $z=0$ 处；

(4) $\arctan z$ 在 $z=0$ 处；　(5) $\frac{1}{1+z+z^2}$在 $z=0$ 处；　(6) $\frac{z^2}{(z+1)^2}$在 $z=1$ 处；

(7) $\frac{z}{z+2}$在 $z=1$ 处。

5. 将下列函数在指定环域内展开为洛朗级数。

(1) $\frac{z+1}{z^2(z-1)}$，$0<|z|<1$，$1<|z|<\infty$；　(2) $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$，$1<|z|<2$；

(3) $\frac{z-3}{(z-1)(z-2)}$，$1<|z|<2$，$1<|z-1|<\infty$；　(4) $\frac{1}{z^2-3z+2}$，$2<|z|<\infty$。

6. 将函数 $f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$在下列区域中展开为级数。

(1) $0<|z|<1$；　(2) $0<|z-1|<1$；　(3) $|z+1|<1$；　(4) $|z+1|>2$。

7. 求出下列函数的奇点，并确定它们是哪一类的奇点(对于极点，要指出它们的阶)。

(1) $\frac{z-1}{z(z^2+4)^2}$；　(2) $\frac{z^5}{(1-z)^2}$；　(3) $\frac{z}{\sin z}$；　(4) $\frac{z}{1-\cos z}-\frac{2}{z^3}$；

(5) $z^9\cos\frac{1}{z}$；　(6) $\frac{z}{z+1}$；　(7) $\frac{e^z}{1+z^2}$；　(8) $ze^{\frac{1}{z}}$。

8. 已知 $f(z)=\frac{z^6}{(z-10)^8}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-1)^k$，求该幂级数的收敛半径。

9. 将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}$在 $z=0$ 处展开为幂级数并指出收敛半径。

10. 函数 $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$以 $z=0$ 为中心的洛朗级数展开式为

$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{z}-\sum_{k=0}^{\infty}z^k=-\frac{1}{z}-1-z-z^2-z^3\cdots,\quad 0<|z|<1$$

和

$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{1-1/z}\right)=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots,\quad 1<|z|<\infty$$

这是否与洛朗级数展开的唯一性相矛盾？说明理由。

11. 在 $z=1$ 的邻域上，将函数 $f(z)=\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$展开为洛朗级数，并判断 $z=1$ 的奇点类型。