

# 控制方程

## 1.1 张量基础

适当了解张量的基础知识,对学习、理解与使用计算流体力学(computational fluid dynamics, CFD)的概念是有益的。一方面,张量简化了矩阵的表达,能够同时观察到矩阵的整体与局部,对于掌握纳维-斯托克斯方程(Navier-Stokes equation, 简称 N-S 方程)有所帮助,进而有助于学习 CFD 的主体内容格式,即 N-S 方程的离散算法。另一方面,张量可以简化 CFD 算法代码的编写,将不同方向上需要重复编写的类似算法代码简化为一次编写,对 CFD 代码的编写、调试、维护与进一步发展均具有重要意义。

张量就是将矩阵下标化、指标化。例如,常见的笛卡儿坐标向量可以以张量法表达为

$$\mathbf{x} = [x \quad y \quad z] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] = x_i \quad (1.1)$$

又如,笛卡儿速度向量可以表达为

$$\mathbf{u} = [u \quad v \quad w] = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] = u_i \quad (1.2)$$

梯度也可以用张量法表示,如

$$\text{grad}(p) = \nabla p = \left[ \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} \right] = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (1.3)$$

上式中的  $x_i$ 、 $u_i$  与  $\frac{\partial p}{\partial x_i}$  分别为坐标向量、速度向量与压力梯度的张量表达式。这里介绍张量表达法两个非常重要的约定:

(1) 下标约定。下标  $i$  代表 1、2、3 中的任意一个,即

$$i = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

从编程的角度理解这一约定较为容易,即对  $i$  从 1~3 的一个循环。

更进一步,可以在张量表达式中引入新的下标,如引入一个新的下标  $j$ ,就可以用两个下标表示  $3 \times 3$  阶的矩阵:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{33} \\ \sigma_{31} & \sigma_{22} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma \quad (1.5)$$

这里的下标  $i, j$  是相互独立且自由变化的,因此又称为自由标。事实上,张量的阶数是由自由标决定的。例如,标量不存在自由标,因此是 0 阶张量;式(1.4)有 1 个自由标,因此是 1 阶张量;式(1.5)有 2 个自由标,因此是 2 阶张量;依次类推。

上述是下标不同的情况,如果张量中出现相同的下标,则需引入如下约定。

(2) 求和约定。求和约定是指,凡是引入了相同的下标,则意味着另含运算:将下标由 1~3 取值,然后求和。如

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (1.6)$$

这里的下标  $i$  不再能够自由变化,因此称为哑标,与自由标相对。

张量下标的特点:①默认值为 1、2、3;②哑标必须成双成对出现,并且符号不限,也就是说,  $\sigma_{ii} = \sigma_{jj}$ ;③等式中的各项自由标必须相同。

最后给出常见的张量运算。

(1) 缩并。缩并即令下标相等,如使  $\sigma_{ij}$  下标相等变化为  $\sigma_{ii}$ ,称为缩并一次。缩并一次阶数减 2,但仍为张量。

(2) 加减:

$$a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij} \quad (1.7)$$

加减之后的新张量阶数不变。

(3) 数乘:

$$ka_{ij} = c_{ij} \quad (1.8)$$

数乘之后新张量阶数不变。

(4) 并积(外积):

$$a_{ij}b_{kl} = c_{ijkl} \quad (1.9)$$

并积所形成的新张量阶数为原张量阶数之和。

(5) 点积(内积):

$$a_{ij} \cdot b_{kl} = a_{ik}b_{kj} = c_{ij} \quad (1.10)$$

点积所形成的新张量阶数为原张量阶数之和减 2,即实施了一次缩并,如两矩阵点积。

## 1.2 N-S 方程推导

N-S 方程是关于黏性流体的动力学方程,因而是流体力学的核心,CFD 的研究目的就是求解 N-S 方程,同时,湍流、多相流等模型也通常是通过拓展 N-S 方程提

出的,因此掌握 N-S 方程非常重要。考虑到 N-S 方程的推导与 N-S 方程离散计算过程有很大程度的相似性,本节将从与有限体积法相似的角度,针对图 1.1 中的控制体进行推导,以期更好地理解 N-S 方程。其中,作用在单位面积上的表面力(面应力)用应力张量  $\sigma_{ij}$  来表示。

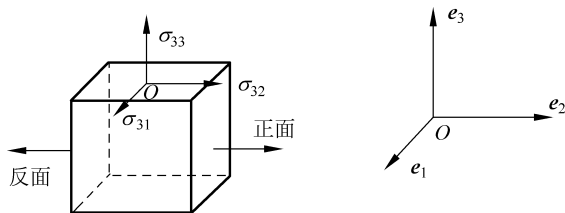


图 1.1 控制体与面应力示例

### 1.2.1 控制体与面应力

将流体空间离散分割为若干相邻接的控制体,如图 1.1 所示。这一控制体既要足够大,以保证包含足够多的流体分子而使流体连续性条件成立;又要足够小,以保证控制体内的流动为层流而非湍流。事实上,这一对控制体大小的要求正是对湍流计算直接数值模拟(direct numerical simulation, DNS)离散网格尺寸的要求,是合理且可以实现的。如果假设该控制体内始终包含相同的流体分子,即允许控制体形状变化,则该控制体就是拉格朗日坐标系下的流体微团。

为了简便且不失一般性,这里将控制体取为正六面体。控制体作用面法向方向与坐标轴相同的称为正面,反之称为负面。尽管一个控制体包含 6 个作用面,但每个作用面都与相邻的控制体共享,因此,对于一个控制体而言,独立的作用面是 3 个,可以只考虑 3 个正面。而对于每一个作用面,又存在 3 个独立方向的应力,因此,控制体的面应力可以用一个二阶张量  $\sigma_{ij}$  来表示。其中,下标  $i$  代表作用面,对应于作用面法线方向,而下标  $j$  对应于应力方向。当  $i=j$  时,  $\sigma_{ij}$  表示为正应力;当  $i \neq j$  时,  $\sigma_{ij}$  表示为切应力。图 1.1 给出了示例。

### 1.2.2 控制体物理量表述

控制体的物理量可以分为两大类:体积量与面积量,如图 1.2 所示。

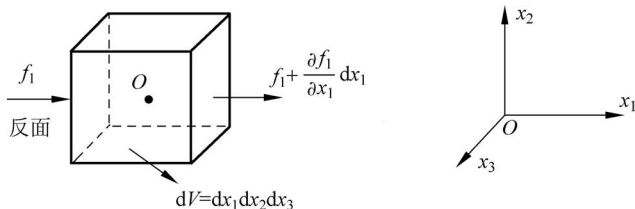


图 1.2 控制体物理量的表述

(1) 体积量。定义  $\varphi$  代表单位体积的物理量,也就是控制体的平均物理量,定义于控制体中心  $O$  点。因此,体积量为  $\varphi dV$ ,这里  $dV$  为控制体体积。 $\varphi$  为广义量,可以是标量、向量或张量等。

(2) 面积量。定义  $f_j$  为单位面积通量,其中  $f$  为广义量,下标  $j$  代表物理量的作用面。

对于流体力学,常见的单位面积通量见表 1.1。

表 1.1 常见的面积量

量的名称	量的符号
单位面积通量	$f_j$
流量	$\rho u_j$
热量	$q_j$
应力	$\sigma_{ji}$
应力功率	$\sigma_{ji} u_i$

设通量方向与坐标轴方向相同,并设净通量  $\phi$  等于单位时间内流出通量减去流入通量。例如,对于  $x_1$  轴方向(参考图 1.2),可得:

$$\phi(f_1) = \left( f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - f_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dV \quad (1.11)$$

其中,  $dV$  为控制体的体积。

对于  $x_2$  轴方向和  $x_3$  轴方向,同样可得:

$$\phi(f_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dV \quad (1.12)$$

$$\phi(f_3) = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dV \quad (1.13)$$

因此,净通量的表达式为

$$\phi(f) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dV = \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dV \quad (1.14)$$

### 1.2.3 连续性方程

连续性方程是质量守恒定律在定常流动的流体力学中的数学表述,意味着控制体内单位时间内净流入质量等于控制体内质量的变化率。其中,体积量为  $\rho dV$ ,面积量为  $f_j = \rho u_j$ ,据此并参考净通量表达式(1.14),可以写出连续性方程:

$$-\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} dV = \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

整理后即得：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.15)$$

式(1.15)还可以写为拉格朗日坐标系下的形式：

$$\frac{D(\rho dV)}{Dt} = 0 \quad (1.16)$$

式(1.16)的物理含义是在拉格朗日坐标系下,也就是在随体坐标系下,流体微团的质量变化率为0。其中的导数：

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (1.17)$$

称为随体导数或物质导数,代表微团某性质对时间的变化率。式(1.17)是 N-S 方程推导中经常需要用到的公式。

可以证明,流体微团的体积膨胀速率就是3个正交方向线变形速度的代数和,即

$$\frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (1.18)$$

因此式(1.16)又可以写为

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.19)$$

将式(1.17)代入可得,式(1.19)等同于式(1.15)。

#### 1.2.4 动量方程

动量方程是动量守恒定律在流体力学中的数学表述,意味着微团单位时间的动量变化率等于合力。其中,体积量为动量  $\rho u_i dV$  与体积力  $\rho F_i dV$ ,体积力为所有质量上的力,如重力;面积量为应力  $\sigma_{ji}$ 。据此可以写出动量方程：

$$\frac{D(\rho u_i dV)}{Dt} = \rho F_i dV + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV \quad (1.20)$$

将式(1.19)代入,式(1.20)可以简化为

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (1.21)$$

将式(1.17)代入,则上式可以进一步写为

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (1.22)$$

通过在式(1.22)中引入式(1.15),在 CFD 中,特别是在可压缩流动计算中,动量方程经常写为强守恒形式：

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (1.23)$$

### 1.2.5 能量方程

能量方程是能量守恒定律在流体力学中的数学表述,意味着微团单位时间的能量变化等于吸热率与功率之和。其中,吸热又包含生成热与热传导。因此,体积量为总能  $\rho E dV$ ,生成热功率为  $\rho Q dV$ ,以及体积力功率为  $\rho F_j u_j dV$ ,面积量为热传导  $q_j$  与应力功率  $\sigma_{ji} u_i$ 。据此可以写出能量方程:

$$\frac{D(\rho E dV)}{Dt} = \rho Q dV + \rho F_j u_j dV - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV + \frac{\partial(\sigma_{ji} u_i)}{\partial x_j} dV \quad (1.24)$$

$$E = e + \frac{1}{2} u_i u_i \quad (1.25)$$

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (1.26)$$

其中,  $e$  为单位质量流体内能,  $k$  为导热系数,  $T$  为温度。

类似于动量方程,能量方程(1.24)可以写为 CFD 中常用的强守恒形式:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E u_j)}{\partial x_j} = \rho Q + \rho F_j u_j - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial(\sigma_{ji} u_i)}{\partial x_j} \quad (1.27)$$

### 1.2.6 本构方程

在前述章节中,还有一个重要的变量没有定义,即应力  $\sigma_{ji}$ 。本构方程的任务,就是建立  $\sigma_{ji}$  的具体表达式。为此,对于牛顿流体,需要引入斯托克斯第一假设(Stokes first hypothesis)与斯托克斯第二假设(Stokes second hypothesis)。

斯托克斯第一假设包含以下 3 条内容:

- (1) 应力张量  $\sigma_{ij}$  是应变率张量  $S_{ij}$  的线性函数;
- (2) 应力张量  $\sigma_{ij}$  为对称各向同性,也就是说流体性质与方向无关,而且下标  $i$  与  $j$  可互换;
- (3) 应力应变率关系式不仅应适合运动的情况,也应适合静止的情况。也就是说,当  $S_{ij} = 0$  时,  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$ 。

这里的  $p$  就是流体静压,  $\delta_{ij}$  为克罗内克张量(Kronecker tensor):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.28)$$

而应变率张量  $S_{ij}$  则代表了流体微团的变形运动:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.29)$$

根据斯托克斯第一假设的第(1)条内容,应力张量的一般解为

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} + D_{ij} \quad (1.30)$$

其中,  $D_{ij}$  为常数张量,  $c_{ijkl}$  为一个四阶系数张量,包含 81 个变量。为了简化

$c_{ijkl}$ , 引入了斯托克斯第一假设的第(2)条内容。事实上, 二阶张量只有克罗内克张量满足各向同性性质, 因此, 对于四阶各向同性张量, 只有 3 种克罗内克张量组合:

$$c_{ijkl} = \gamma_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \gamma_2 \delta_{il} \delta_{jk} + \gamma_3 \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (1.31)$$

也就是说, 在引入各向同性假设后,  $c_{ijkl}$  由 81 个变量大幅简化为 3 个变量。再考虑对称性,  $c_{ijkl}$  的变量还可以进一步缩减为 2 个:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \quad (1.32)$$

再考虑斯托克斯第一假设的第(3)条内容, 可以获得:

$$D_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (1.33)$$

因此, 根据这 3 条斯托克斯假设, 可以获得应力应变率的关系式:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1.34)$$

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (1.35)$$

其中,  $\mu$  为层流黏性,  $\lambda$  则由斯托克斯第二假设给出: 热力学压强等于平均压强, 即  $\bar{p} = -\frac{1}{3} \sigma_{ii} = p$ 。由此可得:

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu \quad (1.36)$$

需要注意的是, 斯托克斯第二假设并不完善。事实上, 实验结果表明, 许多流体的  $\lambda$  为正值。但考虑到这一项本身的影响不大, CFD 中一般仍然沿用式(1.36)。

## 1.3 N-S 方程的具体形式及其变形

### 1.3.1 直角坐标系下的 N-S 方程

1.2 节推导了正交坐标系下的 N-S 方程, 这里将其张量的表达形式总结如下:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{F}_j^\nu}{\partial x_j} + \mathbf{S} \quad (1.37)$$

其中,  $\mathbf{Q}$  为守恒变量,  $\mathbf{F}$  为对流通量,  $\mathbf{F}^\nu$  为黏性通量,  $\mathbf{S}$  为源项。它们的定义分别如下:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_j = u_j \mathbf{Q} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_{1j} p \\ \delta_{2j} p \\ \delta_{3j} p \\ \rho u_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_j^\nu = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{1j} \\ \sigma_{2j} \\ \sigma_{3j} \\ \sigma_{kj} u_k + q_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_{v,1} \\ \rho f_{v,2} \\ \rho f_{v,3} \\ \rho f_{v,i} u_i \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

式中,  $\sigma_{ij}$  和  $q_j$  分别为

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (1.39)$$

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (1.40)$$

其中, 源项  $\mathbf{S}$  包含体积力强度项  $f_v$ , 一般可认为等于 0。

将以上张量形式在直角坐标系  $(x, y, z)$  展开, 则可得直角坐标系下的 N-S 方程展开形式:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{F}^v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}^v}{\partial z} + \mathbf{S} \quad (1.41)$$

其中,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho vw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(\rho E + p) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} - q_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_{v,x} \\ \rho f_{v,y} \\ \rho f_{v,z} \\ \rho(f_{v,x}u + f_{v,y}v + f_{v,z}w) \end{bmatrix} = 0$$

式中各量的关系为

$$\tau_{xx} = 2\mu u_x - \frac{2}{3}\mu(u_x + v_y + w_z), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu(u_y + v_x),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu(u_z + w_x), \quad \tau_{yy} = 2\mu v_y - \frac{2}{3}\mu(u_x + v_y + w_z),$$

$$\tau_{zz} = 2\mu w_z - \frac{2}{3}\mu(u_x + v_y + w_z), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu(v_z + w_y),$$

$$q_x = -kT_x, \quad q_y = -kT_y, \quad q_z = -kT_z, \quad k = \frac{\mu}{Pr}c_p$$

### 1.3.2 不可压缩流动 N-S 方程

对于不可压缩流动,其密度不随空间与时间变化,因此 N-S 方程形式又可以变化如下。

连续性方程:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.42)$$

动量方程:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\rho \partial x_j} - \frac{\partial (p \delta_{ij})}{\rho \partial x_j} \quad (1.43)$$

能量方程:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u_j \frac{\partial E}{\partial x_j} = Q + F_j u_j - \frac{\partial q_j}{\rho \partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\rho \partial x_j} - \frac{u_j}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (1.44)$$

与可压缩流动 N-S 方程相比,不可压方程的主要区别在于:

(1) 连续性方程没有时间项,无法使用时间推进法,方程求解过程复杂而晦涩;

(2) 密度不再为求解变量,因此一般引入压力作为求解变量;而连续性方程中的压力不是显式存在的,需要联合动量方程求解;

(3) 能量方程与其他方程解耦,也就是说,如果其他方程中的物性与温度无关,可以只求解连续性方程与动量方程来获得压力场与速度场。

### 1.3.3 非惯性坐标系下的 N-S 方程

在非惯性坐标系下,N-S 方程组的形式与静止坐标系中的完全一样,只是把所有坐标与速度都改成相对运动坐标系的坐标与速度(密度、压力、温度、内能满足客观不变原则,即不随坐标系变化而变化),并把源项  $\mathbf{S}$  中的体积力强度项  $\mathbf{f}_v$  换成  $\mathbf{f}_v - \mathbf{a}_e - \mathbf{a}_c$ 。其中,  $\mathbf{a}_e$  为迁移加速度,  $\mathbf{a}_c$  为哥氏加速度,它们分别定义如下:

$$\mathbf{a}_e = \frac{d\mathbf{V}_O(t)}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.45)$$

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r \quad (1.46)$$

其中,  $\mathbf{V}_O$  为运动坐标系原点  $O$  (相对于绝对坐标系) 的平动速度,  $\boldsymbol{\Omega}$  为该运动坐标系以其原点  $O$  为中心(相对于绝对坐标系)的转动角速度,  $\mathbf{r}$  为质点相对运动坐标系原点的矢径。下标  $r$  表示相对运动坐标系下的量,  $\mathbf{V}_r$  即该量的平动速度。

对于叶轮机械来说,常见的非惯性坐标系为绕  $z$  轴等角速度  $\omega$  旋转,且原点不动,即

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega \mathbf{r} \quad (1.47)$$

将式(1.45) ~ 式(1.47)代入源项  $\mathbf{S}$ , 此时非惯性坐标系下 N-S 方程组的源项形式为

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho(\omega^2 x + 2\omega v_r) \\ \rho(\omega^2 y - 2\omega u_r) \\ 0 \\ \rho\omega^2(u_r x + v_r y) \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

也就是说, 对于叶轮机械等以一定角速度旋转的情况而言, 固结在叶轮机械旋转坐标上的 N-S 方程形式上与式(1.37)或式(1.41)一致, 只需将其中的源项  $\mathbf{S}$  替换为式(1.48), 并把方程组中的所有坐标与速度都改成相对运动坐标系的坐标与速度。

简便起见, 在不引起混淆的情况下, 方程组中的所有变量均可略去下标  $r$ 。

### 1.3.4 任意曲线坐标系下的 N-S 方程

CFD 中的网格一般都是非正交网格, 因此需要将直角坐标系  $(x, y, z)$  下的 N-S 方程变换到任意曲线坐标系  $(\xi, \eta, \zeta)$ , 也就是计算坐标系下:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \bar{F}^\nu}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}^\nu}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{H}^\nu}{\partial \zeta} + \bar{S} \quad (1.49)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= JQ, \quad \bar{F} = J(\xi_t Q + \xi_x F + \xi_y G + \xi_z H), \\ \bar{G} &= J(\eta_t Q + \eta_x F + \eta_y G + \eta_z H), \quad \bar{H} = J(\zeta_t Q + \zeta_x F + \zeta_y G + \zeta_z H), \\ \bar{F}^\nu &= J(\xi_x F^\nu + \xi_y G^\nu + \xi_z H^\nu), \quad \bar{G}^\nu = J(\eta_x F^\nu + \eta_y G^\nu + \eta_z H^\nu), \\ \bar{H}^\nu &= J(\zeta_x F^\nu + \zeta_y G^\nu + \zeta_z H^\nu), \quad \bar{S} = JS \end{aligned}$$

其中,  $\xi_t, \eta_t, \zeta_t$  代表网格运动速度, 如果是静止网格, 则这 3 项均为 0;  $J$  为两个坐标系变换的雅可比系数, 即  $J = \det \left[ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right]$ , 因此:

$$J = x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) + x_\eta(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) \quad (1.50)$$

相应的测度系数(或网格变换函数)为

$$\xi_x = J^{-1}(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta), \quad \xi_y = J^{-1}(z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta), \quad \xi_z = J^{-1}(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta) \quad (1.51)$$

$$\eta_x = J^{-1}(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta), \quad \eta_y = J^{-1}(z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta), \quad \eta_z = J^{-1}(x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta) \quad (1.52)$$

$$\zeta_x = J^{-1}(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi), \quad \zeta_y = J^{-1}(z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi), \quad \zeta_z = J^{-1}(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \quad (1.53)$$