

动态系统建模——传递函数

动态系统的分析和数学建模是分析系统及设计控制器的基础。本章将讨论经典控制理论的建模方法,即采用拉普拉斯变换和传递函数来描述系统。本章的学习目标为:

- 掌握线性时不变系统中输入与输出之间的卷积关系。
- 掌握建立动态系统微分方程的方法与流程,熟悉典型系统的微分方程。
- 理解在经典控制理论中引入拉普拉斯变换的意义和优点。
- 掌握拉普拉斯变换及其逆变换。
- 理解传递函数的概念和意义,掌握使用传递函数描述动态系统与控制系统的方法。

2.1 卷积与微分方程

2.1.1 卷积

研究动态系统的输入与输出之间的关系可以帮助我们了解动态系统的本质。对于线性时不变系统而言,其输入与输出之间是卷积(Convolution)关系,即系统的输入会对未来一段时间之内的系统输出产生影响。做一个直观比喻,向平静的水中扔一颗石子,水面会产生涟漪。如果在第一次涟漪消失之前,向水中的同一位置再扔一颗石子,那么这两次产生的涟漪便会叠加在一起。在这个例子中,扔石子这个动作是系统的输入,产生的涟漪是系统的输出。因此,某个时刻的涟漪是前面几次石子入水后叠加的效果。这个叠加用数学语言表示即为卷积,下面将通过一个例子推导卷积的公式,一步步揭开卷积的面纱,从而了解动态系统的本质。

考虑一个在日常生活中最常见到的线性欠阻尼弹簧,如图 2.1.1(a)所示,弹簧力与压缩程度成正比(线性),而且不管在什么时间去压缩或者拉伸这个弹簧,它的动态特性都不变(时不变),因此这是一个线性时不变系统。定义系统的输出为弹簧位移 $x(t)$,向上为正方向,系统的输入为外力 $u(t)$ 。在没有外力的作用下,弹簧会静止在其平衡位置。如果对弹簧施加一个短暂的向上外力 $u(t)$,如图 2.1.1(b)所示,弹簧的位移 $x(t)$ 会不断地振动并衰减,最终回到平衡位置。

下面请读者思考一个问题,当系统的输入 $u(t)$ 连续不间断地作用在弹簧上时(如图 2.1.1(c)所示),弹簧的位移 $x(t)$ 将如何变化?

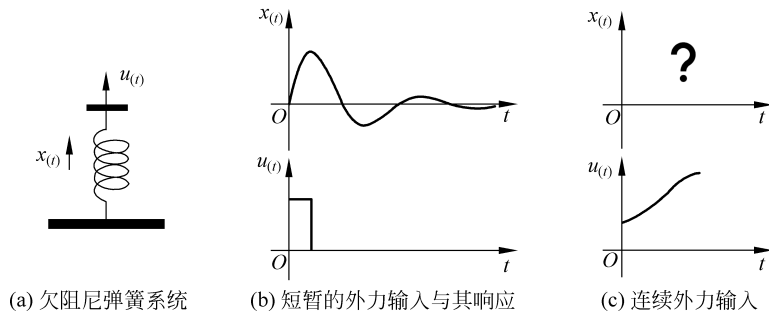


图 2.1.1 欠阻尼弹簧系统的输入输出响应

这并不是一个很容易回答的问题。为了便于研究,首先将 $u(t)$ 近似地划分为三个离散型的输入 $u_{0(t)}$ 、 $u_{1(t)}$ 和 $u_{2(t)}$,如图 2.1.2(a)所示的三个小区域块,其中每一块的宽度为 ΔT 。

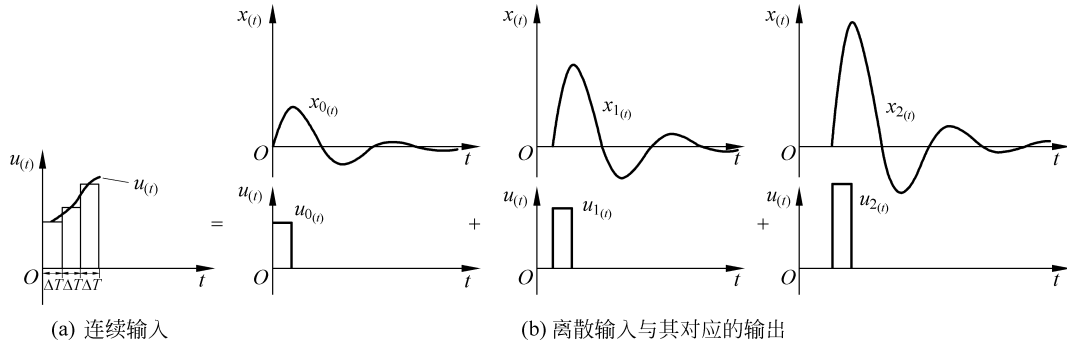
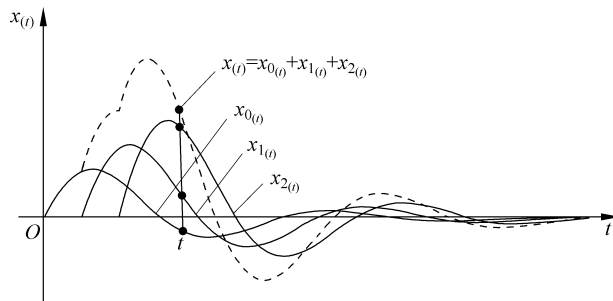


图 2.1.2 弹簧系统连续输入离散化及其响应

当这三个离散的输入分别作用在系统上时,其对应的输出是 $x_{0(t)}$ 、 $x_{1(t)}$ 和 $x_{2(t)}$ 。因为这是一个线性时不变系统,所以三个输出的形状相同,它们之间只存在延迟和幅度上的差别,如图 2.1.2(b)所示。当这三个离散的输入接连作用在系统上时,系统的输出为

$$x(t) = x_{0(t)} + x_{1(t)} + x_{2(t)} \quad (2.1.1)$$

图 2.1.3 所示的虚线部分显示了这三个输出叠加后的系统输出结果。

图 2.1.3 $x_{0(t)}$ 、 $x_{1(t)}$ 、 $x_{2(t)}$ 和 $x(t)$ 随时间的变化

上述例子直观地描述了离散系统输出叠加的概念。若要使用数学方法对其进行深入剖析,首先要得到 $u_{0(t)}$ 、 $u_{1(t)}$ 和 $u_{2(t)}$ 以及 $x_{0(t)}$ 、 $x_{1(t)}$ 和 $x_{2(t)}$ 的表达式,掌握这些信息后便可以将其从离散形式推广到连续形式,得到 $u(t)$ 与 $x(t)$ 的关系。

其控制框图如图 8.5.2 所示,其中虚线框内即为 PID 控制器,可以表达为

$$C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s \quad (8.5.3)$$

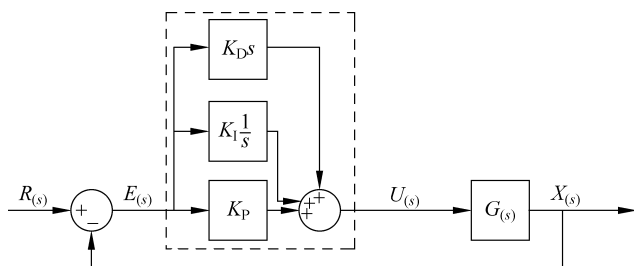


图 8.5.2 并联型 PID 控制器框图

式(8.5.1)以及图 8.5.2 所表达的 PID 控制器中的比例项,积分项和微分项是并联的,因此也称为并联型 PID 控制器。与之对应的为标准型 PID 控制,式(8.5.1)可以写成

$$\begin{aligned} u(t) &= K_P e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt} \\ &= K_P \left(e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int e(t) dt + \tau_D \frac{de(t)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

其中, $\tau_I = \frac{K_P}{K_I}$ 称为积分时间(Integral Time), $\tau_D = \frac{K_D}{K_P}$ 称为微分时间(Derivative Time),这两项体现了 PID 控制器当中的积分项,微分项与比例项之间的关系。

通过图 8.5.3 进一步理解这两项“时间”的具体含义。首先分析积分时间,考虑一个比例积分控制系统,控制量为

$$u(t) = K_P \left(e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int e(t) dt \right) \quad (8.5.5)$$

如图 8.5.3(a)所示,假设误差从 0 开始,在 t_0 时刻突然跳至一个固定值 e 。这样的误差将导致控制器的比例项产生即时响应 $K_P e$ 。积分项的响应则从零开始逐渐累加,根据式(8.5.5),当 $e(t)$ 为常数 ($e(t) = e$) 时,控制器中的积分项为 $\frac{K_P}{\tau_I} e \int_{t_0}^t dt = \frac{K_P}{\tau_I} e (t - t_0)$ 。当 $t = t_0 + \tau_I$ 时,积分项为 $\frac{K_P}{\tau_I} e (t_0 + \tau_I - t_0) = \frac{K_P}{\tau_I} e \tau_I = K_P e$,与控制器中的比例项相等。因此,在常数误差情况下,积分项追上比例项所需要的时间就是积分时间 τ_I ,积分时间较长的比例积分控制器中的比例部分权重较大。

同理,分析微分时间,考虑一个比例微分控制器:

$$u(t) = K_P \left(e(t) + \tau_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (8.5.6)$$

如图 8.5.3(b)所示,假设误差 $e(t)$ 从 0 开始,在 t_0 时刻起以固定速率增加(在图中显示为斜率为 $\frac{de(t)}{dt}$ 且保持不变的一条直线),此时控制器的微分项将为固定值,即 $K_P \tau_D \frac{de(t)}{dt}$ 。而比例项则将从零开始增加,在经过 τ_D 时间后,误差变为 $\frac{de(t)}{dt} \tau_D$,比例项则达到 $K_P \frac{de(t)}{dt} \tau_D$,在微分时间结束时追赶上微分项。因此微分时间较长的比例微分控制器中微分部分的权重较大。

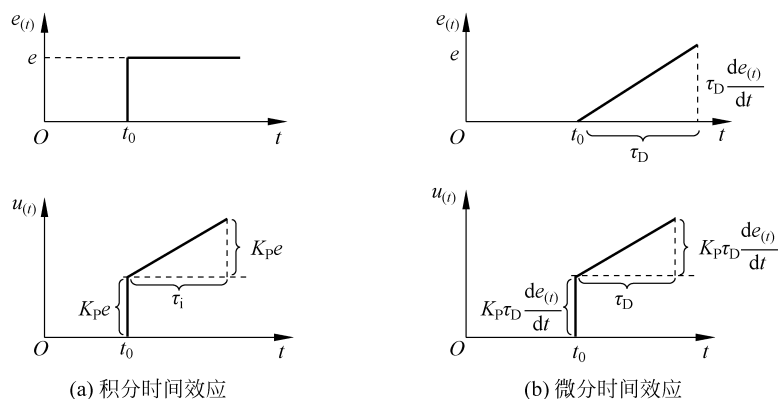


图 8.5.3 理解标准 PID 控制器中的两个“时间”

以上两个时间都体现了“追赶”的含义,值得注意的是,积分时间是指积分项追赶比例项所用的时间。微分时间则是指比例项追赶微分项所用的时间。这也和比例、积分、微分的物理意义相契合。“过去(积分)”在追赶“现在(比例)”,而“现在(比例)”在追赶“未来(微分)”。

对式(8.5.4)两边做拉普拉斯变换,可得到标准型 PID 的传递函数形式:

$$U(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) E(s) \quad (8.5.7)$$

其控制框图如图 8.5.4 所示,其中虚线框内即为标准型 PID 控制器,可以表达为

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) \quad (8.5.8)$$

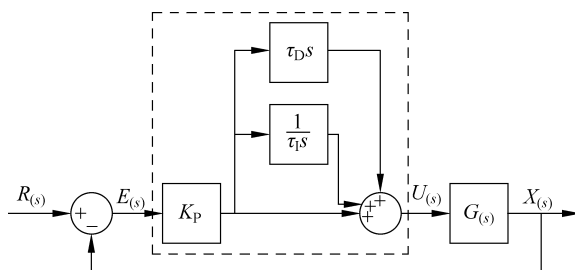


图 8.5.4 标准型 PID 控制器框图

比较图 8.5.4 与图 8.5.2 可以发现,并联型 PID 控制器易于理解,比例、积分、微分项都有独立的增益,可以单独调节,因此调节过程比较灵活与方便。而标准型 PID 控制器只有一个增益 K_P ,这意味着在确定了积分时间与微分时间之后,可以方便地通过调节一个参数来调节系统的瞬态响应。同时,标准型 PID 也可以更好地对闭环系统根轨迹以及频率响应(参考第 9 章)进行分析。这种紧凑的设计被广泛用于工业与商业软件当中。

8.6 本章要点总结

- 根轨迹的研究对象预定义。
 - 根轨迹的应用与研究要满足图 8.1.1 中的单位反馈闭环控制系统图标准形式。

请参考代码 10.7: 10-7_Reduced_Order_Observer_Design. m。

10.4.4 观测器的滤波器性质

相较于全阶观测器,降阶观测器所构建的动态系统更简单且耦合性更低,在例 10.4.2 中,我们只需要考虑 $\bar{z}_{(t)}$ 的微分方程,因此容易更加快速地收敛。通过图 10.4.3(b)与图 10.4.2(b)可以发现,对比全阶观测器,使用降阶观测器时 $\hat{z}_{2(t)}$ 的观测结果收敛速度更快。但是,降阶观测器也有其劣势,首先对比全阶观测器,降阶观测器的表达更加复杂。同时,观察式(10.4.37), $\hat{z}_{1(t)}$ 直接通过测量的输出 $y_{(t)}$ 计算得到,这意味着测量误差将直接影响 $\hat{z}_{1(t)}$,并传递给 $\hat{z}_{2(t)}$ 。相反,观察式(10.4.15),全阶观测器的设计是两个一阶微分方程,可以理解为通过观测器在系统的输出上连接了两个一阶低通滤波器,它们将平滑高频噪声。

为验证上述情况,针对 10.4.3 节的例子,假设测量系统输出的传感器存在高频噪声,即 $y_{(t)} = z_{1(t)} + [0.1\sin(20\pi t)]$ 。在使用全阶观测器时,观测结果如图 10.4.5 所示。在两幅图中都看不到噪声的痕迹。而当使用降阶观测器时,估计值如图 10.4.6 所示。其中, $\hat{z}_{1(t)} = y_{(t)}$ 就是测量的结果,测量噪声被完整地继承下来。在估计 $z_{2(t)}$ 时,使用了式(10.4.37),即 $\hat{z}_{2(t)} = [0.5]\hat{z}_{1(t)} + \bar{z}_{(t)}$,其中, $[0.5]\hat{z}_{1(t)}$ 继承了部分(此例中是一半)的测量噪声,而 $\bar{z}_{(t)}$ 是通过一阶观测器得到的结果,因此过滤掉了噪声,所以 $\hat{z}_{2(t)}$ 的估计噪声比 $\hat{z}_{1(t)}$ 小。

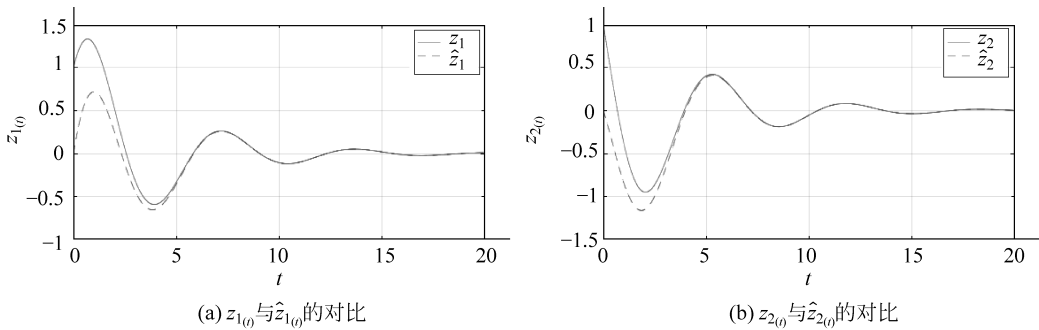


图 10.4.5 使用全阶观测器估计值与实际值对比——包含测量噪声情况

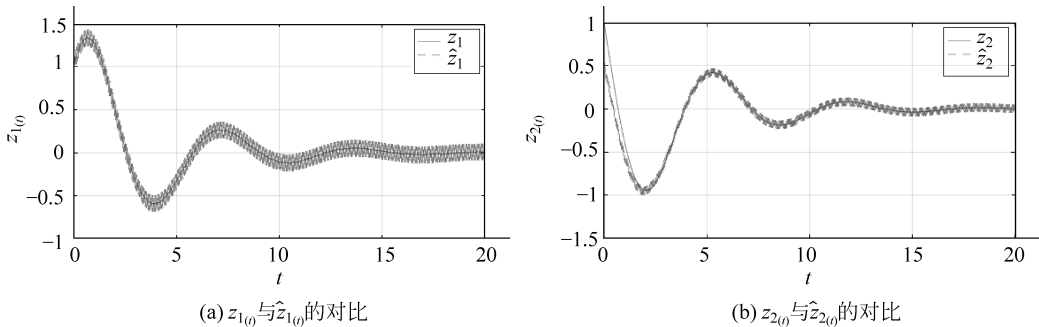


图 10.4.6 使用降阶观测器估计值与实际值对比——包含测量噪声情况

正是由于这一性质,在一些情况下,观测器是直接当作滤波器来设计和使用的。也正因如此,在实际应用中,大部分情况使用的是全阶观测器,它可以省去滤波器的设计过程。

请参考代码 10.8: 10-8_Observer_with_Noise. m。

10.5 观测器与控制器的结合

本节将讨论观测器与控制器的结合。回到本章开始的指尖上的平衡系统,此时增加一个限制条件,即连杆小球的角速度 $\frac{d\phi(t)}{dt}$ 不可测量。为不失一般性,本节将使用全阶观测器。

沿用式(10.3.1),即

$$\frac{dz(t)}{dt} = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}u(t), \quad \text{其中, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{d} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10.5.1a)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}u(t), \quad \text{其中, } \mathbf{C} = [1 \ 0], \quad \mathbf{D} = [0] \quad (10.5.1b)$$

我们的目标仍然是将连杆小球从初始位置控制到直立状态,即平衡点 $z_{f(t)} = [0 \ 0]^T$,在10.3.1节中已经找到了这样的控制器,即 $u(t) = -\mathbf{K}z(t)$ 。但是,这里无法直接使用它,因为其中 $z_2(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$ 不可测量。要解决这一问题就需要用到观测器得到估计的状态变量 $\hat{z}(t)$ 并使用它来计算系统的控制量 $u(t) = -\mathbf{K}\hat{z}(t)$ 。

10.5.1 分离原理

首先来考虑一般情况:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (10.5.2a)$$

$$y(t) = \mathbf{C}z(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (10.5.2b)$$

根据10.4.2节的介绍,系统的观测误差 $\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ 的动态方程为

$$\frac{d\tilde{z}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{z}(t) \quad (10.5.3)$$

此时,根据控制器设计,令系统输入:

$$u(t) = -\mathbf{K}\hat{z}(t) \quad (10.5.4)$$

式(10.5.4)使用估计值 $\hat{z}(t)$ 计算控制器。将式(10.5.4)代入式(10.5.2a),得到

$$\frac{dz(t)}{dt} = \mathbf{A}z(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{z}(t) = \mathbf{A}z(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}(z(t) - \tilde{z}(t)) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})z(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{z}(t) \quad (10.5.5)$$

将式(10.5.3)和式(10.5.5)合并,得到增广状态空间方程:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{z}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}\mathbf{K} & (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (10.5.6)$$

可以发现,当矩阵 $\begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}\mathbf{K} & (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \end{bmatrix}$ 的特征值的实部部分都为负数的时候,系统是稳定的,

$\begin{bmatrix} \tilde{z}(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ 会趋向于平衡点 $\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$,这其中 $\tilde{z}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ 说明观测值接近于实际值, $z(t) \rightarrow \mathbf{0}$ 说明系