

## 第5章 离散时间信号与系统的频域分析

在第4章中,介绍了连续时间周期信号的傅里叶级数分解形式以及连续时间非周期信号的傅里叶变换形式,分析了连续时间信号在频域上的各种特性。这些特性对于分析连续时间信号与系统具有非常大的应用价值。本章介绍离散时间周期信号的傅里叶级数分解形式和离散时间非周期信号的傅里叶变换形式。近些年来人们更关注离散时间信号和离散时间系统,这是因为大多数电子产品均已数字化,这些产品处理的信号均为离散时间信号,其系统均属于离散时间系统。离散时间信号与系统的频域分析方法为后面学习复频域分析方法中的 $z$ 变换做了一定的铺垫。

离散时间信号在时间上呈现离散性,按照时域离散性频域周期性的对应关系可知离散时间信号在频域上呈现周期性。在本章中,分析连续时间信号时所使用的积分会变成求和,导数会变成差分,离散时间信号与连续时间信号有很多相同点,读者可以对比第4章的内容学习本章的知识内容。

### 5.1 离散时间周期信号的频域分析

与连续时间信号的频域分析一样,也可以在频域上分析离散时间信号。一方面,通过频域分析能进一步认识离散时间信号的特性,并深刻理解连续时间信号经过采样离散化在频域发生了什么样的变化,即它的谐波组成发生了怎样的变化;另一方面,离散时间信号的傅里叶级数分解和傅里叶变换是应用计算机进行信号处理的重要工具,它不仅对信号处理的理论研究有重要的意义,而且在运算方法上起重要作用。

#### 5.1.1 离散时间周期信号的傅里叶级数及频谱

为了引出离散时间周期信号的傅里叶级数,十分有必要回顾信号周期性与离散和连续之间的关系。从第4章的学习中已经知道,当一个信号是连续时间非周期信号时,其频谱是连续的非周期函数;当一个信号是连续时间周期信号时,其频谱是离散的非周期函数。从上面的结论可以看出,一个信号在时域上是周期的还是非周期的会影响其在频域上的频谱是离散的还是连续的。因此可以大胆猜测:当一个信号在时域上是离散的且是周期信号时,这个信号在频域上应该是周期的且离散的;当一个信号在时域上是离散的且是非周期信号时,这个信号在频域上应该是周期的且连续的。上述连续性与周期性的关系如表5.1所示。

表 5.1 时域与频域中连续/离散和周期/非周期之间的关系

时域	连续和非周期	连续和周期	离散和非周期	离散和周期
频域	非周期和连续	非周期和离散	周期和连续	周期和离散

与连续时间周期信号相似,可以用式(5.1)的形式定义离散时间周期信号。为了强调该信号是周期且离散的特点,使用  $\tilde{x}(n)$  符号表示离散时间周期信号。

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN) \quad (5.1)$$

在式(5.1)中,  $N$  为周期,  $r$  为任意整数。同连续时间周期信号一样,可以使用傅里叶级数表示离散时间周期信号,也就是说,可以使用周期为  $N$  的复指数序列  $e^{j(\frac{2\pi}{N})kn}$  表示离散时间周期信号,这个复指数序列可以表示为

$$e_k(n) = e^{j(\frac{2\pi}{N})kn} = e_{k+rN}(n) \quad (5.2)$$

这个复指数序列是与连续时间周期信号类比而来的。在第4章中,连续时间周期信号的基频信号可以表示为  $e^{j(\frac{2\pi}{T_0})t}$ ,其周期为  $T_0$ ,基频为  $\frac{2\pi}{T_0}$ ,  $k$  次谐波为  $e^{j(\frac{2\pi}{T_0})kt}$ ;离散时间周期信号的基频信号可以表示为  $e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$ ,其周期为  $N$ ,基频为  $\frac{2\pi}{N}$ ,  $k$  次谐波为  $e^{j(\frac{2\pi}{N})kn}$ 。也就是说,式(5.2)中的  $e_k(n)$  即是离散周期信号的  $k$  次谐波。其基频信号为

$$e_0(n) = e^{j(\frac{2\pi}{N})n} \quad (5.3)$$

看上去,离散时间周期信号的傅里叶级数形式与连续时间周期信号的傅里叶级数形式十分相似,但两者还是有一定的区别。最主要的区别就是:连续时间周期信号的傅里叶级数拥有无穷多个谐波分量,而离散时间周期信号的傅里叶级数只有有限个谐波分量,其个数为  $N$ ,式(5.2)中的  $k$  值只能取集合  $\{0, 1, \dots, N-1\}$  中的某个元素。这样,一个离散时间周期信号  $\tilde{x}(n)$  就可以展开成

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (5.4)$$

下面考虑如何求解系数  $\tilde{X}(k)$ ,这里要用到以下性质:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \times \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}r}} = \begin{cases} 1, & r = mN, m \in \mathbf{Z} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

将式(5.4)的等号两边同时乘以  $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$ ,然后对  $n=0 \sim N-1$  进行一个周期内的求和运算,可得

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \right] = \tilde{X}(r)$$

令  $r=k$ ,可得

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (5.5)$$

令式(5.5)中的  $k=k+mN$ ,可得

$$\tilde{X}(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}(k)$$

也就是说,  $\tilde{X}(k)$  也是以  $N$  为周期的序列。另外,通过该式也可以看出,离散傅里叶级数



解：由离散时间周期信号的傅里叶级数展开式可知

$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{10-1} \tilde{x}(n) W_{10}^{nk} = \sum_{n=0}^4 e^{-j\frac{2\pi}{10}nk} \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{10}k \times 0} + e^{-j\frac{2\pi}{10}k \times 1} + e^{-j\frac{2\pi}{10}k \times 2} + e^{-j\frac{2\pi}{10}k \times 3} + e^{-j\frac{2\pi}{10}k \times 4} \\ &= \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi k}{5}}} = \frac{e^{-j\pi k/2} (e^{j\pi k/2} - e^{-j\pi k/2})}{e^{-j\pi k/10} (e^{j\pi k/10} - e^{-j\pi k/10})} = e^{-j2\pi k/5} \frac{\sin \pi k/2}{\sin \pi k/5}\end{aligned}$$

例 5.2 如果  $\tilde{x}(n)$  是一个周期为  $N$  的周期序列,那么它也是周期为  $2N$  的周期序列。把  $\tilde{x}(n)$  看作周期为  $N$  的周期序列,有  $\tilde{x}(n) \leftrightarrow \tilde{X}_1(k)$  (周期为  $N$ );把  $\tilde{x}(n)$  看作周期为  $2N$  的周期序列,有  $\tilde{x}(n) \leftrightarrow \tilde{X}_2(k)$  (周期为  $2N$ )。如何用  $\tilde{X}_1(k)$  表示  $\tilde{X}_2(k)$ ?

$$\begin{aligned}\text{解: } \tilde{X}_1(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ \tilde{X}_2(k) &= \sum_{n=0}^{2N-1} \tilde{x}(n) W_{2N}^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn}\end{aligned}$$

令  $n = n' + N$ , 则

$$\begin{aligned}\tilde{X}_2(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn} + \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n' + N) e^{-j\frac{2\pi}{2N}k(n'+N)} \\ &= (1 + e^{-j\pi k}) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn} = (1 + e^{-j\pi k}) \tilde{X}\left(\frac{k}{2}\right)\end{aligned}$$

所以

$$X_2(k) = \begin{cases} 2\tilde{X}_1\left(\frac{k}{2}\right), & k \text{ 为偶数} \\ 0, & k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

后面还会介绍如何使用  $z$  变换求解离散时间周期信号的傅里叶级数展开式,本节就不再展开叙述了。

### 5.1.2 离散时间周期信号的傅里叶级数的基本性质

本节介绍离散时间周期信号的傅里叶级数的相关性质,这些性质不仅可以用于离散时间周期信号的傅里叶级数求解,而且可以引出有限长序列的离散傅里叶变换的各种相关性质。

#### 1. 线性

线性的前提条件是离散时间周期信号  $\tilde{x}_1(n)$  和  $\tilde{x}_2(n)$  的周期均为  $N$ 。若两个信号的 DFS 运算满足以下关系:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1(k) &= \text{DFS}[\tilde{x}_1(n)] \\ \tilde{X}_2(k) &= \text{DFS}[\tilde{x}_2(n)]\end{aligned}$$

则将这两个信号进行线性相加时,可得

$$\text{DFS}[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k) \quad (5.10)$$

其中的  $a, b$  为任意实数。该性质可以通过离散时间周期信号的傅里叶级数的定义直接证明,这里不再赘述。

#### 2. 序列移位性质

序列移位性质主要考虑将离散周期信号左右平移时的傅里叶级数展开式系数的结果。

若  $\tilde{X}_1(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_1(n)]$

则将  $\tilde{x}_1(n)$  左右平移后, 其傅里叶级数展开式系数  $\tilde{X}_1(k)$  的结果将变为

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n-m)] = W_N^{mk} \tilde{X}(k) = e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} \tilde{X}(k) \quad (5.11)$$

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \tilde{X}(k) \quad (5.12)$$

其中, 式(5.11)是将  $\tilde{x}_1(n)$  向左平移  $m$  个单位的结果, 式(5.12)是将  $\tilde{x}_1(n)$  向右平移  $m$  个单位的结果。

证明: 因为

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) W_N^{nk}$$

令  $n+m=i$ , 则有

$$\text{DFS}[\tilde{x}(i)] = \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ik} W_N^{-mk}$$

因为  $\tilde{x}(i)$  和  $W_N^{ik}$  都是以  $N$  为周期的周期函数, 因此可以将上式变为

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = \text{DFS}[\tilde{x}(i)] = W_N^{-mk} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ik} = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$$

### 3. 调制性质

调制性质是指将离散时间周期信号  $\tilde{x}_1(n)$  的傅里叶级数展开式系数  $\tilde{X}_1(k)$  左右平移。

若  $\tilde{X}_1(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_1(n)]$

则在  $\tilde{x}_1(n)$  的基础上乘以  $W_N^{mn}$  便可以改变其  $\tilde{X}_1(k)$ , 也就是

$$\text{DFS}[W_N^{mn} \tilde{x}(n)] = \tilde{X}_1(k+m) \quad (5.13)$$

证明:

$$\text{DFS}[W_N^{mn} \tilde{x}(n)] = \sum_{i=0}^{N-1} W_N^{mn} \tilde{x}(n) W_N^{nk} = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{n(k+m)} = \tilde{X}_1(k+m)$$

上式中的  $W_N^{mn}$  可以表示成

$$W_N^{mn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nm} = (e^{-j\frac{2\pi}{N}n})^m$$

也就是说, 时域乘以虚指数  $e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$  的  $m$  次幂时, 其频域搬移  $m$  位, 这一性质称为调制。

### 4. 对偶性

连续时间信号的傅里叶变换在时域中存在着对偶性。

若  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$

则有  $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$

$f(t)$  是连续时间非周期信号, 其时域和频域均是连续的。离散时间周期信号的时域和频域均是离散的, 从 DFS 和 IDFS 公式可以看出, 它们只差  $1/N$  因子和  $W_N$  的指数的正负号, 因此也一定存在着时域和频域的对偶关系。

若离散时间周期信号  $\tilde{x}(n)$  的傅里叶级数展开式系数为  $\tilde{X}(k)$ , 则对偶性的性质可以通过以下形式描述:

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k) \quad (5.14)$$

$$\text{DFS}[\tilde{X}(n)] = N\tilde{x}(-k) \quad (5.15)$$

证明：由离散时间周期信号的傅里叶级数的反变换关系可知

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

等式左右两侧同时乘以  $N$ ，可得

$$N\tilde{x}(-n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{nk}$$

由于等式右边与 DFS 的表达式相同，故  $n$  和  $k$  互换，可得

$$N\tilde{x}(-k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(n) W_N^{kn}$$

即周期序列  $\tilde{X}(n)$  的 DFS 系数是  $N\tilde{x}(-k)$ ，因而存在以下对偶关系：

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

$$\text{DFS}[\tilde{X}(n)] = N\tilde{x}(-k)$$

### 5. 周期卷积和性质

周期卷积和性质讨论的是将两个周期序列相乘以后的傅里叶级数结果。

设离散周期信号  $\tilde{X}_1(k)$  和  $\tilde{X}_2(k)$  满足以下关系：

$$\tilde{X}_1(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_1(n)]$$

$$\tilde{X}_2(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_2(n)]$$

如果

$$\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)$$

则离散周期信号  $\tilde{y}(n)$  可以写成式(5.16)或式(5.17)的形式：

$$\tilde{y}(n) = \text{IDFS}[\tilde{Y}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \quad (5.16)$$

$$\tilde{y}(n) = \text{IDFS}[\tilde{Y}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m) \tilde{x}_1(n-m) \quad (5.17)$$

证明：

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n) &= \text{IDFS}[\tilde{Y}(k)] = \text{IDFS}[\tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k) W_N^{-nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) W_N^{mk} \tilde{X}_2(k) W_N^{-nk} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_2(k) W_N^{-(n-m)k} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \end{aligned}$$

令上式中的  $n-m=m'$ ，则可以得到

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m'=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m') \tilde{x}_1(n-m')$$

这一性质称为周期卷积和。它与线性卷积有以下两个区别：

(1)  $\tilde{x}_1(n)$ 、 $\tilde{x}_2(n)$  都是以  $N$  为周期的序列，它们的移位序列也为周期序列。 $\tilde{y}(n)$  同样也是以  $N$  为周期的序列。

(2) 周期卷积和只在一个周期内进行运算。

**例 5.3**  $\tilde{x}_1(n)$ 、 $\tilde{x}_2(n)$  分别是  $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$  为主值序列, 以  $N=6$  为周期的序列, 求  $\tilde{x}_1(n)$  与  $\tilde{x}_2(n)$  的周期卷积和  $\tilde{y}(n)$ 。

$$x_1(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$x_2(n) = [0, 1, 2, 1, 0, 0] \quad (0 \leq n \leq 5)$$

**解:** 首先画出  $x_1(m)$  和  $x_2(m)$  两个信号的图形, 如图 5.2 所示。

接下来将  $\tilde{x}_2(m)$  翻转, 得到  $\tilde{x}_2(-m) = \tilde{x}_2(0-m)$ , 如图 5.3 所示。

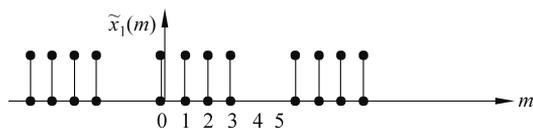


图 5.2  $x_1(m)$  和  $x_2(m)$

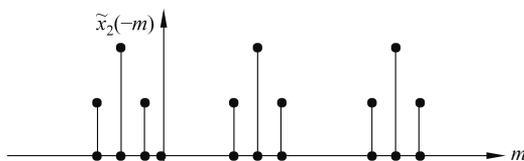


图 5.3  $\tilde{x}_2(-m)$

通过图 5.3 可以计算出  $\tilde{y}(0)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{y}(0) &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_1(0-m) = \tilde{x}_1(0) \tilde{x}_2(0) + \tilde{x}_1(1) \tilde{x}_2(-1) + \cdots + \tilde{x}_1(5) \tilde{x}_2(-5) \\ &= 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

将  $\tilde{x}_2(-m)$  右移一位, 得到  $\tilde{x}_2(1-m)$ , 如图 5.4 所示。

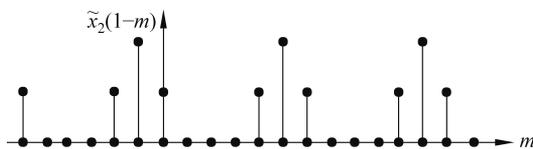


图 5.4  $\tilde{x}_2(1-m)$

通过图 5.4 可以计算出  $\tilde{y}(1)$ :

$$\tilde{y}(1) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_1(1-m) = \tilde{x}_1(0) \tilde{x}_2(1) + \tilde{x}_1(1) \tilde{x}_2(0) + \cdots + \tilde{x}_1(5) \tilde{x}_2(-4) = 1$$

以此类推, 可以求出  $\tilde{y}(3)=4$ ,  $\tilde{y}(4)=4$ ,  $\tilde{y}(5)=3$ , 因此  $\tilde{y}(n)$  的主值序列为  $[1, 1, 3, 4, 4, 3]$ , 并以  $N=6$  为周期延拓。

类似地还可以得到频域卷积和定理, 也就是当

$$\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n) \tilde{x}_2(n)$$

时, 有

$$\tilde{Y}(k) = \text{DFS}[\tilde{y}(n)] = \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{y}(n) W_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_1(l) \tilde{x}_2(k-l) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_2(l) \tilde{x}_1(k-l)$$

## 5.2 离散时间非周期信号的频域分析

通过前面的学习已经知道,一个信号在时域上如果是离散的且为非周期信号,那么它在频域上应为连续的且为周期信号。本节介绍离散时间傅里叶变换,在学习的过程中需要注意离散时间傅里叶变换和傅里叶变换的区别和联系。

### 5.2.1 离散时间非周期信号的傅里叶变换及频谱

离散时间傅里叶变换(Discrete Time Fourier Transformation, DTFT)也称为序列的傅里叶变换,该变换方法是研究离散时间系统频域特性的主要工具之一。要引出该变换,可以从离散傅里叶级数入手。当一个连续时间周期信号的周期趋于无穷大时,其信号的频谱将变得无限密集,从而成为连续频谱。同样,当一个离散时间周期信号的周期趋于无穷大时,可以认为它变为离散时间非周期信号,该离散时间非周期信号的频谱就变成了一个连续的频谱。

周期信号  $\tilde{x}(n)$  和离散时间周期信号的傅里叶级数展开式系数  $\tilde{X}(k)$  可以表示为

$$\begin{aligned}\tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ \tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\end{aligned}$$

令  $a_k$  满足

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (5.18)$$

则可以将  $\tilde{x}(n)$  变为

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k W_N^{nk} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

在式(5.18)的等号两侧同时乘以周期  $N$ , 可得

$$Na_k = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

当  $N \rightarrow \infty$  时, 令  $\frac{2\pi}{N}k = \omega$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} Na_k = X(e^{j\omega})$ , 则可以得到离散时间周期信号的傅里叶变换公式:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (5.19)$$

其中,  $X(e^{j\omega})$  对  $\omega$  来说是以  $2\pi$  为周期的。通过式(5.19)可以将式(5.18)改写成

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \quad (5.20)$$

其中的  $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 。于是可以将离散时间周期信号  $\tilde{x}(n)$  改写为

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \omega$$

当  $N \rightarrow \infty$  时,  $\tilde{x}(n) \rightarrow x(n)$ ,  $\omega k \rightarrow \omega$ ,  $\omega \rightarrow d\omega$ , 并把求和符号改为积分符号, 可得

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

上式便是离散时间傅里叶逆变换公式。使用 DTFT[] 和 IDTFT[] 运算符表示的离散时间傅里叶变换和逆变换公式如下：

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (5.21)$$

$$x(n) = \text{IDTFT}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (5.22)$$

对于离散时间傅里叶变换需要注意以下几方面：

- (1) 由于  $x(n)$  在时域上是离散的，因此频域上的  $X(e^{j\omega})$  一定是以  $2\pi$  为周期的周期函数。
- (2) 由于  $x(n)$  是时域上的非周期函数，因此其对应的频域函数  $X(e^{j\omega})$  一定是连续的。
- (3)  $X(e^{j\omega})$  是  $x(n)$  的频谱密度函数，简称频谱。它是复函数，可以分解为幅度谱和相位谱，这与前面的连续时间傅里叶变换是相似的。

**例 5.4** 已知离散时间非周期信号  $x(n) = a^{|n|}$  ( $|a| < 1$ )，通过离散时间傅里叶变换求解其频谱  $X(e^{j\omega})$ 。

**解：**首先可以将  $x(n) = a^{|n|}$  改写为

$$x(n) = a^{-n} u(-n-1) + a^n u(n)$$

使用离散时间傅里叶变换公式可以对上述离散时间非周期信号进行变换：

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \text{DTFT}(x(n)) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} \\ &= \frac{a e^{j\omega}}{1 - a e^{j\omega}} + \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} \end{aligned}$$

本例中的  $x(n)$  和  $|X(e^{j\omega})|$  可以用图 5.5 表示。

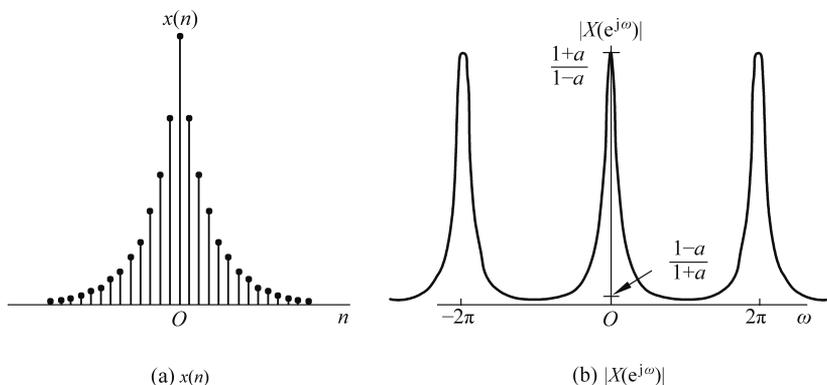


图 5.5 离散时间非周期信号  $x(n)$  及其频谱  $|X(e^{j\omega})|$

并非所有的离散时间非周期信号  $x(n)$  都可以进行离散时间傅里叶变换，讨论信号  $x(n)$  的离散时间傅里叶变换的存在条件，其实就是讨论式(5.21)的收敛条件。当  $x(n)$  是无限长的离散时间非周期信号时， $X(e^{j\omega})$  的表达式是无穷项级数，因此讨论其收敛条件十分有必要。使其收敛的充分条件有以下两个：

- (1) 一致性收敛。要求离散时间非周期信号  $x(n)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上绝对可和，即

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)| < +\infty \quad (5.23)$$

(2) 均方收敛。要求  $x(n)$  的能量有限, 即

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < +\infty \quad (5.24)$$

**例 5.5** 已知离散时间非周期信号  $x(n) = a^n u(n)$  ( $|a| < 1$ ), 通过离散时间傅里叶变换求解其频谱  $X(e^{j\omega})$ , 并绘制其幅频特性和相频特性。

**解:** 由离散时间傅里叶变换公式可知

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

$X(e^{j\omega})$  的幅值和幅角分别为

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\tan^{-1} \frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}$$

上面的频谱和幅角与  $a$  的大小相关, 根据  $a$  值的不同, 其  $x(n)$  的形式并不相同。当  $a$  的值为  $0 \sim 1$  时,  $x(n)$  为单调指数衰减信号; 当  $a$  的值为  $-1 \sim 0$  时,  $x(n)$  为摆动指数衰减信号。图 5.6(a) 给出了  $a$  为  $0 \sim 1$  时的幅频特性和相频特性, 图 5.6(b) 给出了  $a$  为  $-1 \sim 0$  时的幅频特性和相频特性。

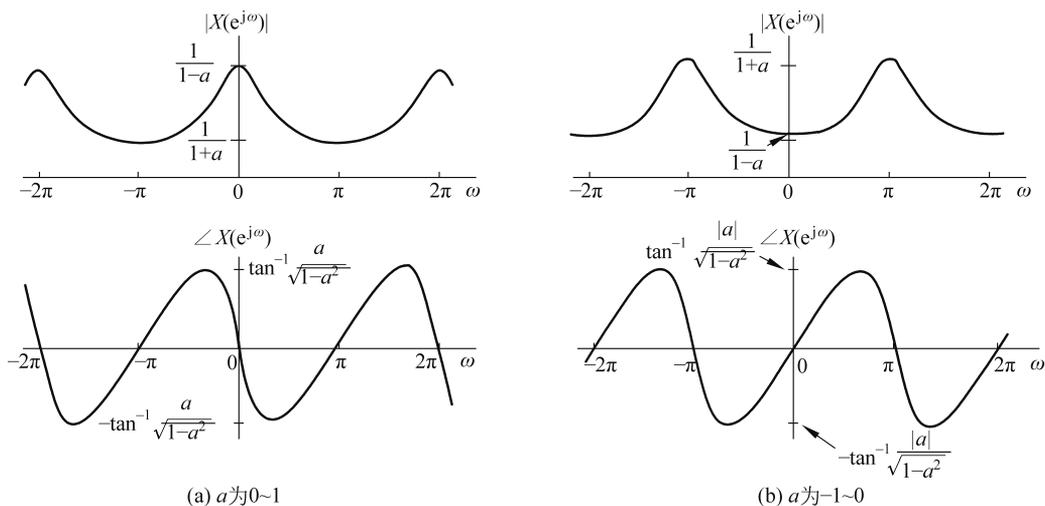


图 5.6 信号  $x(n)$  的幅频特性和相频特性

**例 5.6** 已知离散矩形脉冲信号  $x(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$ , 通过离散时间傅里叶变换求其频谱  $X(e^{j\omega})$ , 并绘制当  $N_1 = 2$  时的幅频特性。

**解:** 由离散时间傅里叶变换公式可知

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\omega}{\sin \frac{\omega}{2}}$$