

第1章

解析几何的基本思想

1.1 概述

中学授课中,教师常常把解析几何的基本思想归结为“数形结合”,也有的教师将其归结为用代数方法解决几何问题。

例如,大家都知道的“赵爽弦图”(见图 1.1),由直角边边长分别为 a, b 、斜边边长为 c 的 4 个直角三角形拼成。易知中空的小正方形边长为 $a-b$ ($a>b$),于是由面积差解得

$$c^2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} ab \right) + (a-b)^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

这就是利用赵爽弦图证明或发现勾股定理的过程,在这个过程中,有数形结合,也有代数方法。

可见,把解析几何的基本思想归结为“数形结合”或用代数方法解决几何问题,都过于泛泛和笼统,没有体现解析几何本身的特点。

解析几何的基本思想是坐标思想,在《古今数学思想》第 2 册第 15 章中,将费马、笛卡儿创立的几何学称为“坐标几何”,该书讲述了这个学科的名称由“坐标几何”演变为“解析几何”的缘由。即使这样,第 15 章讲述几何学的历史发展、重大意义及几何学中蕴含的数学思想时,标题仍定为“坐标几何”,可见坐标思想在作者心中的重要性。

面对一个几何问题,我们应当建立恰当的坐标系(不一定是直角坐标系),把点和有序实数对统一起来,把曲线、直线和坐标满足的等式统一起来。在解析几何

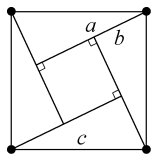
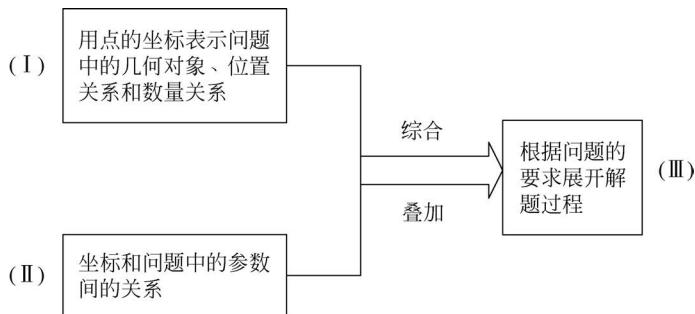


图 1.1

中,点就是有序实数对,反之,有序实数对就是点。处于标准位置的椭圆,方程就是 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > 0, n > 0, m \neq n)$ 。反之,方程 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > 0, n > 0, m \neq n)$ 对应的就是处于标准位置的椭圆,这不是简单的数形结合,而是达到了数形统一。这里的“数”是某几何对象的代数(坐标)表现形式,而“形”是某些坐标及其表现形式,在空间形式上的反映。简言之,可以表述为“你”就是“我”,“我”就是“你”。坐标思想是指在恰当的坐标系中,把点和其坐标、曲线和其方程统一起来,为用代数方法解决几何问题奠定了基础。鉴于此,几何的解题过程可以表示如下:



这里第Ⅰ个环节和第Ⅱ个环节没有顺序要求,孰先孰后无所谓,但绝不可或缺。

例 1.1 (2018 年北京高考题) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(1, 2)$ 。过点 $Q(0, 1)$ 的直线 l 与抛物线 C 有两个不同的交点 A, B , 且直线 PA 交 y 轴于点 M , 直线 PB 交 y 轴于点 N 。设 O 为原点, $\overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{QN} = \mu \overrightarrow{QO}$, 求证: $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 为定值。

分析 (1) 题中涉及的几何对象有抛物线 C , 直线 l , 点 P, Q, A, B, M, N , 其中点 A, B, M, N 的坐标要设定; 且点 A, B 的坐标是主元, l 的方程要设定, 涉及的几何量是 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$; 涉及的数量关系是 $\overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{QN} = \mu \overrightarrow{QO}$; 涉及的位置关系是点 P, A, M 共线, 点 P, B, N 共线。

(2) 设 l 的方程是 $y = kx + 1$, 设点 $M(0, m), N(0, n)$, 若设 $A(x_1, kx_1 + 1), B(x_2, kx_2 + 1)$, 则点 A, B 在 l 上, 但它们在抛物线 C 上吗? 尚不得而知。

若设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, 则点 A, B 在抛物线上, 它们是否在 l 上, 尚不知。

(3) 解题中的坐标思想体现在要用相关点的坐标表示数量关系、位置关系及几何量 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$, 要用点 A, B 的坐标表示, 这是主要矛盾, 欲达到此目的, 路径如下

(点 A, B 的坐标用第二组):

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{QO} \rightarrow \text{用 } m \text{ 表示 } \lambda \\ \text{点 } P, A, M \text{ 共线} \rightarrow \text{用 } y_1 \text{ 表示 } m \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{消去 } m} \lambda = \frac{2 - y_1}{2 + y_1},$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{QN} = \mu \overrightarrow{QO} \rightarrow \text{用 } n \text{ 表示 } \mu \\ \text{点 } P, B, N \text{ 共线} \rightarrow \text{用 } y_2 \text{ 表示 } n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{消去 } n} \mu = \frac{2 - y_2}{2 + y_2},$$

于是

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{8 - 2y_1y_2}{y_1y_2 - 2(y_1 + y_2) + 4}. \quad (1.1)$$

到此,坐标思想彻底实现,完成了前面分析解题一般过程中的第 I 阶段。

(4) 本题的固有参数是直线 l 的斜率 k , k 的变化会引起点 A, B 坐标的变化。

而 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 为定值,说明这个几何量不会受到 k 变化的影响,下面就是要把点 A, B 坐标和 k 的关系式找到。

$$\left\{ \begin{array}{l} y = kx + 1 (k \neq 0) \\ y^2 = 4x \end{array} \right. \xrightarrow{\text{消去 } x} ky^2 - 4y + 4 = 0 (k \neq 0),$$

所以

$$y_1 + y_2 = y_1y_2 = \frac{4}{k}. \quad (1.2)$$

(5) 以上结果综合起来,将式(1.2)代入式(1.1),可得 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2$ 。

(6) 设出直线 l 的方程和点 A, B, M, N 的坐标,学生们都会, l 和 C 的方程联立消元后用韦达定理把 k 和点 A, B 的坐标联系起来,大部分学生都会。凡是做不下来,视此题为难题的学生,几乎都是在坐标思想上出了问题,不知道为了贯彻坐标思想应该做什么,怎么做。

例 1.2 F 是抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点,过点 F 倾斜角为 30° 的直线 l 和抛物线交于 A, B 两点(点 A 在点 B 的左侧),则 $\frac{|AF|}{|FB|} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 焦点 F 的坐标是 $(0, \frac{p}{2})$, 直线 l 的方程是 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{p}{2}$, 则

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 = 2py \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{p}{2} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{消去 } y} x^2 - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}p\right)x - p^2 = 0. \quad (1.3)$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (x_1 < x_2)$, 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}p \\ x_1 x_2 = -p^2 \end{cases} \quad (1.4)$$

教学中发现,不少学生解到这里就解不下去了,原因何在?

这个现象反映了教师在教解析几何、学生在学解析几何时,重视代数方法,重视韦达定理的应用,忽视“坐标思想”,重计算,轻思想,缺乏思想指导的演算(如上面步骤),是盲目的,极易陷入刻板解题套路中。

这里,“坐标思想”体现在:要用点 A, B 的坐标表示几何量 $\frac{|AF|}{|FB|}$ 。做到式(1.3)这一步时,面对横坐标满足的一元二次方程,自然应该想到如何用点 A, B 的横坐标表示 $\frac{|AF|}{|FB|}$ 。

由图 1.2 及平行截割定理知 $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{-x_1}{x_2}$, 因此,只需由式(1.3)解出两个根 $x_1 = -\frac{p}{\sqrt{3}}, x_2 = \sqrt{3}p$, 所以 $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{1}{3}$ 。

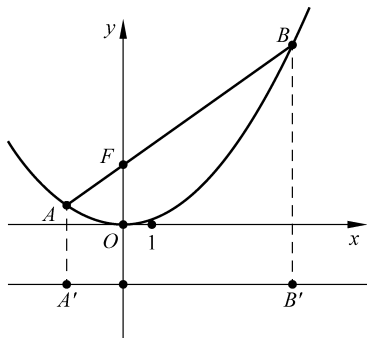
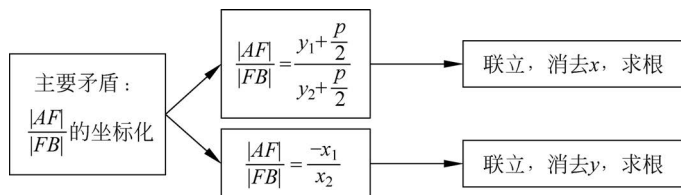


图 1.2

实际上,例 1.2 的解题思路应该是:



可见,求解例 1.2 可以不用韦达定理。当然,用之,绕一个大弯也可以解出。死抱着韦达定理不放,逢题必用,且解题开始就用之,这是当前解析几何教学、学习中十分常见的“八股”思路,应当用坐标思想为指导,改变这种“八股”思路的教与学的方式。

1.2 曲线与方程

1.2.1 对曲线的认识

对曲线的认识有两个角度,一个是集合的角度,即把曲线看成是满足某种条件 P 的点构成的集合。如: F_1, F_2 是平面内的两个定点, $|F_1F_2|=2c$, 平面内满足条件: 到两个定点 F_1 和 F_2 的距离之和等于常数 $2a$, 并且 $a>c>0$ 的点的集合称为椭圆。

另一个是轨迹的角度,即把曲线看成是满足条件 P 的动点的轨迹,此时条件 P 称为轨迹条件。如: F_1, F_2 是平面内两个定点, $|F_1F_2|=2c$, 平面内满足条件: 到两个定点距离之和等于常数 $2a$, 且 $a>c>0$ 的点的轨迹称为椭圆。

高中平面解析几何中,用轨迹概念来定义曲线。

我们说满足条件 P 的动点轨迹是曲线 C , 必须满足以下两个条件:

- ① 曲线 C 上的点满足条件 P ;
- ② 不在曲线 C 上的点, 不满足条件 P , 等价命题为满足条件 P 的点在曲线 C 上。

条件①反映的是曲线 C 对于条件 P 的纯粹性。

条件②反映的是曲线 C 对于条件 P 的完备性。

通俗的理解,纯粹性就是“不掺假”,完备性就是“一个没丢”。

从集合角度认识曲线,实际上也有两个方面: 集合里的点都满足条件 P ; 集合外的点都不满足条件 P , 这两点都蕴含于集合概念的内涵之中。

1.2.2 二元方程式 $F(x, y)=0$

二元方程式 $F(x, y)=0$, 离开了坐标系, 它是纯代数的研究对象, 但是把它放在坐标系中。它的任何一个解, 都可看成一对有序实数, 从而对应平面上的一个点。一般来说, 含两个未知元的一个方程, 其解会有无穷多个, 从而二元方程 $F(x, y)=0$ 在坐标平面上对应无穷多个点。而这无穷多个点, 有规律地排列就形成曲线。

可见,在坐标平面这个平台上,一旦点和“有序二元实数对”对应起来,形成“坐标”概念,就打下了方程和曲线相联系、相对应的的基础。

“坐标”概念、“方程的曲线,曲线的方程”概念是形成解析几何这一数学分支的理论基础。

1.2.3 曲线的方程和方程的曲线

这两个概念体现了“曲线”与“方程”的统一,既然是统一(“你”就是“我”,“我”就是“你”)为一个整体,当然要同时满足以下两个条件:

① 曲线 C 上的点的坐标都是方程 $F(x, y) = 0$ 的解;

② 以方程 $F(x, y) = 0$ 的解为坐标的点都在曲线 C 上。

从集合的角度理解,设曲线 C 的点构成点集 A ,方程的解构成解集 B ,那么:

条件①是指若 $a \in A$,则 $a \in B$;

条件②是指若 $b \in B$,则 $b \in A$ 。

于是 $A = B$,曲线与方程就统一起来了。

从轨迹的角度理解条件,条件①反映的是曲线 C 对方程 $F(x, y) = 0$ 的纯粹性,当然也反映了方程 $F(x, y) = 0$ 对曲线 C 的完备性;条件②反映了方程 $F(x, y) = 0$ 对曲线的纯粹性,当然也反映了曲线对方程 $F(x, y) = 0$ 的完备性。

因此,当曲线 C 和方程 $F(x, y) = 0$ 满足上述两个条件时,相互之间完全满足轨迹概念要求的纯粹性、完备性,自然也就统一起来。

既然“坐标”的概念、“曲线的方程,方程的曲线”概念在解析几何中的价值和地位如此重要,所以在构建解析几何的知识体系时,它们位于首位。但知识的理论体系不等同于教学体系,“坐标”概念,初中就学习了,学生掌握得普遍较好。“曲线的方程,方程的曲线”概念很抽象,掌握它们既要靠思想指导,又要根据“相反相成”的原理,借助反例。为此,教材把这个概念放在圆之后、椭圆之前,这样的安排使得讲直线方程、圆的方程时缺失了理论指导和依据。但教师在讲到直线方程、圆的方程时,又要对着具体情景,把曲线方程概念的内涵,具体而通俗地讲出来,而且要坚持“相反相成”原理,通过反例辨析,让学生明白在建立直线方程和圆的方程时,为什么要正反两方面都考虑到。

例如:在推导过原点,倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线方程时,要使学生明白,推导过程在逻辑上解决了:直线上任意一点的坐标都满足方程 $\sqrt{3}x - y = 0$ 。但过原点,倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线上任意一点的坐标,还满足下列各方程:

$(\sqrt{3}x-y)(\sqrt{3}x+y)=0, (\sqrt{3}x-y)(x+y)=0, (\sqrt{3}x-y)F(x,y)=0$ (这里 $F(x,y)=0$ 表示含 x,y 的任意一个二元方程)。

那么为什么 $\sqrt{3}x-y=0$ 是过原点且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线的方程? 而其他方程都不能叫该直线的方程? 看来, 一个方程要想作为某曲线的方程, 除了曲线上任意点的坐标都是方程的解之外, 还需满足……到了这个时候, 学生会悟到: 以方程的解为坐标的点要在曲线上。

讲到圆的方程时, 可以请学生思考单位圆位于 x 轴上方的半圆(含端点)的方程是不是 $x^2+y^2=1(x\geq 0, y\geq 0)$, 并说明理由。借此, 使学生认识到只有方程的解为坐标的点在曲线上, 也不行。

这样就为讲曲线与方程做好了铺垫, 使其水到渠成, 到后面讲椭圆方程、双曲线方程、抛物线方程时, 学生应能领悟到, 方程从无到有的推演过程解决了什么问题, 为了确立这就是椭圆(双曲线、抛物线)方程时, 还应考查什么。

在解析几何的教学中, 忽视曲线与方程概念的理论价值, 轻描淡写地一带而过的做法是不可取的。

1.2.4 解析几何的两个基本问题

解析几何的两个基本问题, 一个是根据动点满足的条件求轨迹(曲线)方程, 另一个是根据方程研究曲线的性质, 这实际上是“曲线的方程、方程的曲线”概念在知识展开过程中的自然延伸。

根据动点满足的条件求轨迹方程, 一直是学生的难点, 实际上课本中总结了求轨迹方程的一般步骤。而且在讲直线方程、圆的方程、椭圆的方程、双曲线的方程、抛物线的方程时, 这个问题重复了 5 遍, 课本给出了这个问题的规范解答, 也重复了 5 遍。在此基础上, 如果学生仍感到困难, 其症结一定是缺乏思想的指导和引领, 在后面我们会详细讨论这个问题。

第2章

课本中的三个公式蕴含的思想和方法

2.1 坐标平面上两点间距离公式

2.1.1 意义

用点的坐标表示“线段长”是坐标思想的体现,除此之外,距离公式是度量几何的基石。解析几何属于度量几何范畴,因此,距离公式是解析几何的基石。

2.1.2 基础

距离公式的基础是坐标轴上两点距离的坐标表示,如图 2.1 所示。

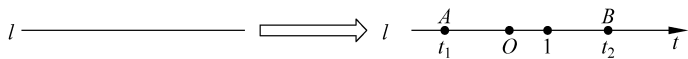


图 2.1

这里直线 l 上所有的点构成的集合 M 称为一维空间,当确定原点单位和方向后直线变为数轴,这样点集 M 与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立了一一对应的关系,即集合 M 中任何一个点 A 对应实数集 $\mathbf{R}$ 中的一个实数 a ,这个实数 a 称为 A 的坐标,设为 $A(a)$ 。点集 M 中不同的点,其坐标不同。反之,实数集 $\mathbf{R}$ 中任何一个实数,对应点集 M 中的一个点, $\mathbf{R}$ 中不同的实数对应 M 中不同的点。

在一维空间中,若点 A 的坐标为 t_1 ,点 B 的坐标为 t_2 ,则 $|AB| = |t_1 - t_2|$ 。两点间距离公式的另一个基础是三角形中的边角关系,如直角三角形中的勾股定理、一般三角形中的余弦定理。

2.1.3 在平面直角坐标系两点距离公式产生过程中蕴含的思想和方法

如图 2.2 所示, 直角坐标平面 xOy 内, 线段 AB 的两个端点是 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 用 A, B 的坐标表示线段 AB 的长, 经历了如图 2.3 所示的过程:

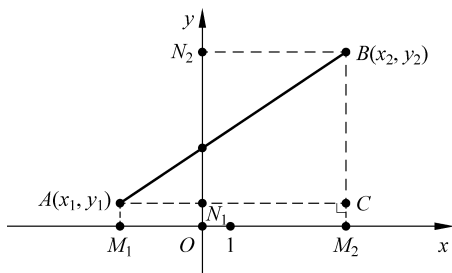


图 2.2

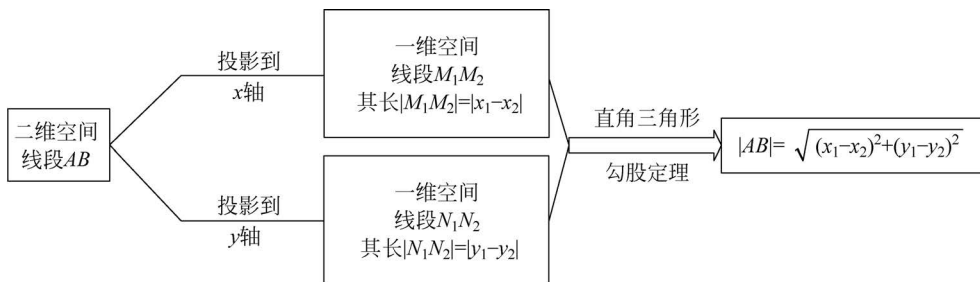


图 2.3

这个过程中蕴含的思想方法是: 二维空间中的几何问题可以转化到一维空间中去(所谓降维处理)。当然还需要把一维空间中的结果综合起来, 回到二维空间, 得到问题的解决。

实现这个过程, 由二维到一维使用的方法是“分解”。一维回到二维, 使用的方法是“综合”。如图 2.4 所示, 直角三角形 ABC 中, 以勾股定理为依据, 得到的两点间距离公式是 $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$; 以边角关系为依据可得 $|AB| = \frac{|x_1 - x_2|}{|\cos \alpha|} = \frac{|y_1 - y_2|}{|\sin \alpha|}$, 这里 α 是直线 AB 的倾斜角。学生学习两点间距离公式时, 大多数都死

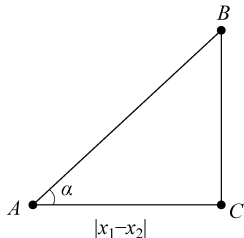


图 2.4

记硬背, 背下公式 $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, 而忽视 $|AB| = \frac{|x_1 - x_2|}{|\cos \alpha|}$, 如图 2.5 所示。到了学习圆锥曲线时, 又死记硬背直线截曲线所得弦长公式 $|AB| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2]}$ 。而当直线方程和曲线方程联立消去 x , 得到纵坐标 y 的一元二次方程, 求弦长时, 仍然用 $|AB| = \sqrt{(1+k^2)[(y_1 - y_2)^2 - 4y_1y_2]}$, 得到错误结果, 其背后的原因, 就是用静止的、割裂的方式学习, 把知识切成豆腐块, 一块一块记。实际上, 下面两个公式是等价的, 互通的, 其依据就是直角三角形中的锐角余弦的定义。

$$\begin{array}{c}
 |\cos \alpha| = \frac{|x_1 - x_2|}{|AB|} \quad (\alpha \text{ 可能是钝角}) \\
 \Updownarrow \\
 |AB| = \frac{|x_1 - x_2|}{|\cos \alpha|} \longleftrightarrow |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}
 \end{array}$$

图 2.5

因为要用到直线的斜率, 故 $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + k^2$ 。

为了方便使用韦达定理, 就把 $|x_1 - x_2|$ 改为 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2}$, 于是

$$|AB| = \frac{|x_1 - x_2|}{|\cos \alpha|} = \sqrt{\frac{|x_1 - x_2|^2}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{(1+k^2)[(x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2]}.$$

例 2.1 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(\sqrt{2}, 1)$, 且左焦点是

$F_1(-\sqrt{2}, 0)$ 。

(1) 求椭圆的方程;

(2) 当过点 $P(4, 1)$ 的动直线与 C 交于两个不同点 A, B 时, 在线段 AB 上。取点 Q , 使其满足 $|AP| \cdot |QB| = |AQ| \cdot |PB|$, 证明: 点 Q 总在某定直线上。

分析 对于第(2)问, 直线移动导致点 Q 是动点。无论点 Q 怎么动, 它总在某定直线上, 岂不是说动点 Q 的轨迹是线段? 由于点 Q 总在椭圆内, 因此本题实质上是求动点 Q 的轨迹。

轨迹条件是 $|AP| \cdot |QB| = |AQ| \cdot |PB|$ 。这个条件要用点 A, B 的坐标表示, 这是本题中坐标思想的体现, 也是本题的难点之一。若用两点距离公式处理, 难度是不可想象的, 但