



视频讲解

3.1 引言

对信号与系统的分析和处理有两类方法：一类是以维纳-卡尔曼滤波和自适应滤波为主的时域处理方法，另一类是以傅里叶变换为基础的频域方法。随机信号或过程不满足绝对可和或绝对可积条件，不能直接采用傅里叶变换，而需借助随机信号的自协方差函数和自相关函数来进行频域分析，这实际上是一个功率谱估计问题。

功率谱估计是利用给定的一组样本数据估计一个平稳随机信号的功率谱密度，由于在工程应用中，它能给出被分析对象的能量随频率分布的情况，因此常常应用在滤波、信号识别、信号分离、系统辨识等系统中。本章介绍功率谱估计常用方法的基本原理、算法特点、工程实践和典型应用，它们构成了现代信号处理中一个极其重要的应用，是许多信号处理技术的基础。

对于确定性能量信号，可以利用傅里叶变换作频谱分析。随机信号不能直接进行傅里叶变换，这是因为平稳随机信号为无限能量的信号，故其傅里叶变换不存在（在 z 平面的单位圆上不满足绝对可和的条件）。此外，如果截取随机序列一次实现的一段数据利用 FFT（快速傅里叶变换）作频谱分析，不同段求出的频谱必然是不同的，可见这种分析并无意义。

由于平稳随机信号 $x(n)$ 的自相关函数 $R_x(m) = E[x^*(n)x(n-m)]$ 是一个能量有限的确定性序列，故其满足序列傅里叶变换绝对可和的条件。根据维纳-辛钦定理，广义平稳随机信号 $x(n)$ 的功率谱和其自相关函数 $R_x(m)$ 服从一对傅里叶变换关系：

$$S_x(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[R_x(m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m)e^{-j\omega m} \quad (3.1.1)$$

$$R_x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega \quad (3.1.2)$$

因而，理论上讲二者的估计是相通的。即，可以先估计自相关函数，然后由正变换得到功率谱；或先估计功率谱，然后由逆变换得到自相关函数。尽管可以比较容易地得到自相关函数一个较好的估计，但是由该自相关函数估计出的功率谱却不一定令人满意，这样一来，功率谱估计要比自相关函数估计复杂得多。

功率谱估计，又称谱分析，主要研究信号在频率域中的各种特性，在通信、噪声监测、信号检测与估计、模式识别、振动分析等领域广泛应用。例如，在雷达信号处理中，回波功率谱

的谱峰的密度、高度和位置可以确定运动目标的位置、辐射强度和速度；在被动式声呐信号处理中，谱峰的位置可以提供鱼雷的方向(方位角)；在电子战中，信号的功率谱可以对敌方目标进行分类和识别；在生物医学工程中，功率谱密度的峰形和波形可显示类癫痫病发作的周期。

广义平稳随机信号的功率谱是自相关函数的傅里叶变换，它取决于无限多个自相关函数值。但对于许多实际问题，可资利用的观测数据往往是有限的，所以要准确计算功率谱通常是不可能的，比较合理的目标是设法得出功率谱的一个好的估计值。功率谱估计就是根据平稳随机过程的一个实现的有限个观测值，来估计该随机过程的功率谱密度。这里涉及两个问题：一是如何评价一个估计是好的估计，二是怎样得到好的估计。

功率谱估计的评价指标包括客观度量和统计度量。客观度量主要为谱分辨率，指估计谱对真实谱中两个靠得很近的谱峰的分辨能力。统计度量包括估计的偏差、方差、均方误差、一致性等评价指标。需要说明的是，统计度量方法只适用于长数据，一般只用于描述古典谱估计方法，而现代谱估计方法往往用于短数据记录的谱估计，因此利用统计度量对不同的谱估计方法进行比较是不妥的。

功率谱估计方法包括古典(经典)谱估计和现代(近代)谱估计两种，如图 3.1.1 所示。



图 3.1.1 功率谱估计方法的分类

古典谱估计方法采用传统的傅里叶分析方法，也称线性谱估计或非参数谱估计。古典谱估计方法可以分成相关函数法和周期图法两种。相关函数法由美国科学家 R. Blackmant 和 J. Tukey 在 1958 年提出，又称 BT 法，其需要先按照有限个观测数据估计自相关函数，再计算功率谱；而周期图法则是 1898 年 Schuster 利用傅里叶级数去拟合太阳黑子数据时提出的，但直到 1965 年快速傅里叶变换方法出现，周期图法才受到人们重视。周期图法也叫直接法，是直接对观测数据进行快速傅里叶变换，再得到功率谱。周期图法由于不用估计自相关函数，且可以利用快速傅里叶变换进行计算，因而得到广泛应用。经典谱估计方法的优点是计算效率高，物理概念比较清楚，但是频率分辨率低，其估计量的方差和分辨率是一对矛盾。

现代谱估计方法也称为非线性谱估计，分为参数模型谱估计和非参数模型谱估计，其是以信号模型为基础，将估计功率谱的问题转化成由观测数据估计信号模型参数的问题。现

代谱估计方法克服了经典谱估计的缺点,在提高频率分辨率方面取得了突破性进展,因此成为研究的热点,但缺乏正确选择信号模型的理论指导。



视频讲解

3.2 古典谱估计

3.2.1 相关函数法

相关函数法的理论基础是维纳-辛钦定理。由于该方法求出的功率谱是通过自相关函数间接得到的,所以又称间接法或自相关法,具体步骤如下。

(1) 由获得的 N 点有限长序列 $x_N(n)$ 来估计自相关函数序列 $\hat{R}_x(m)$ 。

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_N(n)x_N(n-m), \quad m=0,1,\dots,N-1 \quad (3.2.1)$$

由于 $x_N(n)$ 只有 N 个观测值,因此对每一个固定的延迟 $|m|$,可以利用的数据只有 $N-|m|$ 个,且在 $0 \sim N-1$ 的范围内, $x_N(n) = x(n)$,所以在实际计算 $\hat{R}_x(m)$ 时,式(3.2.1)变为

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n-m), \quad m=0,1,\dots,N-1 \quad (3.2.2)$$

需要注意的是, $\hat{R}_x(m)$ 是双边序列,自变量的取值范围为 $m = -(N-1), \dots, N-1$, 长度为 $2N-1$ 。对实序列 $x_N(n)$,因为自相关函数的偶对称,只需求出一半 $\hat{R}_x(m)$ 即可,即

$$\hat{R}_x(m) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n-m), & 0 \leq m \leq N-1 \\ \hat{R}_x(-m), & -(N-1) \leq m < 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

下面讨论 $\hat{R}_x(m)$ 对 $R_x(m)$ 的估计偏差:

$$\text{bia}[\hat{R}_x(m)] = E[\hat{R}_x(m)] - R_x(m)$$

由于

$$\begin{aligned} E[\hat{R}_x(m)] &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n-m)\right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} E[x(n)x(n-m)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} R_x(m) = \frac{N-|m|}{N} R_x(m) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

因此

$$\text{bia}[\hat{R}_x(m)] = -\frac{|m|}{N} R_x(m) \quad (3.2.5)$$

由此可见,对于一个固定的延迟 $|m|$,当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\text{bia}[\hat{R}_x(m)] \rightarrow 0$,因此, $\hat{R}_x(m)$ 是对 $R_x(m)$ 的渐进无偏估计; 对于一个固定的 N ,只有 $|m| \ll N$ 时, $\hat{R}_x(m)$ 的均值才接近真值 $R_x(m)$ 。Box 和 Jenkins(1976)提出了一个有效的估计准则: $N \geq 50, |m| \leq N/4$ 。

(2) 求自相关函数的傅里叶变换得到功率谱。

$$\hat{S}_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \hat{R}_x(m) e^{-j\omega m} \quad (3.2.6)$$

由于当延迟量较大时估计所得的 $\hat{R}_x(m)$ 较差,通常取 $|m| \ll N$ 。所以,计算自相关函数时只需求出 $m=0, 1, \dots, M-1$ 这些点的 $\hat{R}_x(m)$, 这里 $M \ll N-1$, 然后利用 $\hat{R}_x(m) = \hat{R}_x(-m)$ 求出另一半的 $\hat{R}_x(-m)$, 再代入式(3.2.6)得到估计的功率谱。

以上两步经历了两次截断。一是估计 $\hat{R}_x(m)$ 时只用了 $x(n)$ 的 N 个观测值 $x_N(n)$, 相当于对 $x(n)$ 加矩形窗截断, 称为加数据窗。二是估计 $\hat{S}_x(e^{j\omega})$ 时仅用了从 $-(M-1)$ 到 $M-1$ 的 $\hat{R}_x(m)$, 相当于对 $\hat{R}_x(m)$ 加矩形窗截断, 称为加延迟窗。

估计 $\hat{R}_x(m)$ 时, 如果 N 和 m 都比较大, 则需要的运算量比较大, 这时可以利用 FFT 来实现 $\hat{R}_x(m)$ 的快速计算。

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_N(n) x_N(n-m) = \frac{1}{N} x_N(m) * x_N(-m) \quad (3.2.7)$$

对 $\hat{R}_x(m)$ 作傅里叶变换:

$$\text{DTFT}[\hat{R}_x(m)] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}_x(m) e^{-j\omega m} = \frac{1}{N} |X^*(e^{j\omega})| |X(e^{j\omega})| = \frac{1}{N} |X(e^{j\omega})|^2 \quad (3.2.8)$$

两个长度为 N 的序列 $x_N(n)$ 和 $x_N(-n)$ 的线性卷积是长度为 $2N-1$ 的序列, 为了利用 FFT 计算线性卷积, 需把这两个序列的长度扩充到 $2N-1$, 为此, 把 $x_N(n)$ 补 $N-1$ 个零, 得到 $x_{2N-1}(n)$, 即

$$x_{2N-1}(n) = \begin{cases} x_N(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq 2N-2 \end{cases}$$

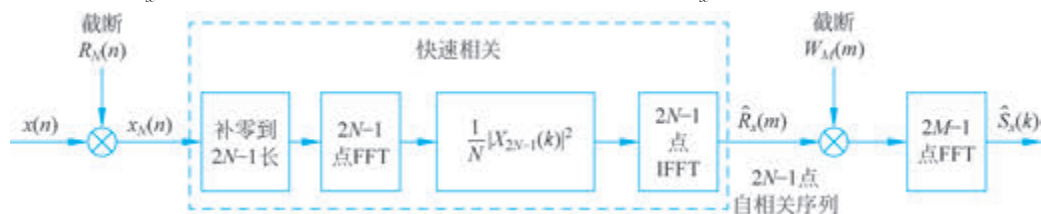
由此得到了相关函数法谱估计的运算框图, 如图 3.2.1 所示, 其一般步骤如下。

(1) 对 $x_N(n)$ 补 $N-1$ 个零, 得到 $x_{2N-1}(n)$, 求 $x_{2N-1}(n)$ 的频谱 $X_{2N-1}(k)$, $k=0, 1, \dots, 2N-1$ 。

(2) 求 $X_{2N-1}(k)$ 的幅度平方, 并除以 N , 得到 $\frac{1}{N} |X_{2N-1}(k)|^2$ 。

(3) 对 $\frac{1}{N} |X_{2N-1}(k)|^2$ 求 IFFT, 得到 $\hat{R}_x(m)$, $-(N-1) \leq m \leq N-1$ 。

(4) 对 $\hat{R}_x(m)$ 加窗截断到 $2M-1$ 点, 并求 FFT 得到 $\hat{S}_x(k)$ 。



需要说明的是,对 $\frac{1}{N} |X_{2N-1}(k)|^2$ 求 IFFT 时,原本得到的 $\hat{R}_x(m)$ 其 m 的取值范围应为 $0 \leq m \leq 2N-2$,考虑到 $\hat{R}_x(m)$ 的隐含周期性,以及 $\hat{R}_x(m)$ 的偶对称性,将 $\hat{R}_x(m)$ 中 $N \leq m \leq 2N-2$ 的部分向左平移 $2N-1$ 点后得到偶对称的 $\hat{R}_x(m)$,如图 3.2.2 所示。

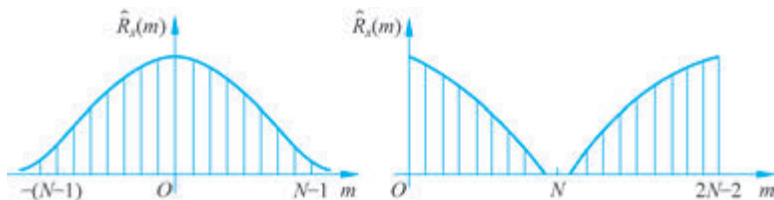


图 3.2.2 两种 $\hat{R}_x(m)$

3.2.2 周期图法

周期图(Periodogram)法又称直接法,它是把随机信号 $x(n)$ 的 N 点观察数据 $x_N(n)$ 视为一能量有限信号,直接求傅里叶变换,然后求幅度平方并除以 N 运算得到真实功率谱 $S_x(e^{j\omega})$ 的估计,计算步骤如下。

(1) 由获得的 N 点数据构成的有限长序列 $x_N(n)$ 直接求傅里叶变换,得频谱 $X_N(e^{j\omega})$ 。

$$X_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_N(n) e^{-j\omega n}$$

(2) 取频谱幅度的平方,并除以 N ,以此作为对 $x(n)$ 真实功率谱 $S_x(e^{j\omega})$ 的估计。

$$\hat{S}_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} |X_N(e^{j\omega})|^2 \quad (3.2.9)$$

下面来分析周期图法与自相关法的等价关系。周期图法估计的信号功率谱为

$$\begin{aligned} \hat{S}_x(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_N(n) e^{-j\omega n} \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\omega k} \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{j\omega n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(k) x^*(n) e^{-j\omega(k-n)} \end{aligned}$$

令 $m = k - n$, 则

$$\begin{aligned} \hat{S}_x(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x(m+n) x^*(n) \right] e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} R_x(m) e^{-j\omega m} = \hat{S}_{\text{BT}}(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

可见,利用有偏自相关函数的 BT 法和周期图法是等价的。周期图是功率谱 $S_x(e^{j\omega})$ 的有偏估计。

例 3-1 利用相关函数法和周期图法估计下列随机过程的功率谱:

$$x(n) = \cos(2\pi \times f_1 \times n/f_s + \varphi_1) + 2\sin(2\pi \times f_2 \times n/f_s + \varphi_2) + v(n)$$

其中, $f_1 = 140\text{Hz}$, $f_2 = 150\text{Hz}$, $f_s = 5f_2$; φ_1, φ_2 为均匀分布的随机初始相位; $v(n)$ 是方差

为 1 的零均值白噪声。

解 MATLAB 实现程序如下：

```
clear all; close all; clc;
f1 = 140; f2 = 150; fs = 5 * f2;
N = 512; SNR = 20; % 信噪比
nTs = (0:N-1)/fs;
f = (0:N-1) * fs/N;
ph = 2 * pi * rand(1,2);
signal = cos(2 * pi * f1 * nTs + ph(1)) + cos(2 * pi * f2 * nTs + ph(2));
y1 = signal + 10^(-SNR/20) * randn(1,N);
figure(1); subplot(2,2,1); plot(y1, 'r'); xlabel('n'); title('(a)随机过程');
%% 信号频谱
y = fft(y1, N);
mag = abs(y) * 2/N; % 与真实幅值相比, 进行 abs(y) * 2/N 运算
subplot(2,2,2); plot(f(1:N/2), mag(1:N/2));
xlabel('f/Hz'); title('(b)原始信号的频谱');
%% 自相关法求功率谱(先估计自相关函数, 再利用傅里叶变换求功率谱)
nfft = length(y1);
rxn = xcorr(y1, 'unbiased'); % 计算序列的自相关函数
Sx = fft(rxn, nfft);
index = 0:round(nfft/2-1);
k = index * fs/nfft;
Sxdb = 10 * log10(abs(Sx(index+1)));
subplot(2,2,3); plot(k, Sxdb); xlabel('f/Hz'); ylabel('dB');
title('(c)自相关法信号的功率谱'); % 绘制分贝形式的功率谱
%% 直接法(周期图法)求功率谱
% 直接将信号的采样数据 x(n) 进行傅里叶变换求取功率谱密度估计
window = boxcar(length(y1)); % 使用矩形窗(默认为矩形窗, 窗的大小与信号长度一致)
[Pxx, f] = periodogram(y1, window, nfft, fs); % 直接法
subplot(2,2,4); plot(f, 10 * log10(Pxx)); % 绘制分贝形式的功率谱
xlabel('f/Hz'); ylabel('dB'); title('(d)周期图法信号的功率谱');
```

程序运行结果如图 3.2.3 所示, 由图可见, 周期图法估计的功率谱起伏很大, 是一种很差的功率谱估计方法。

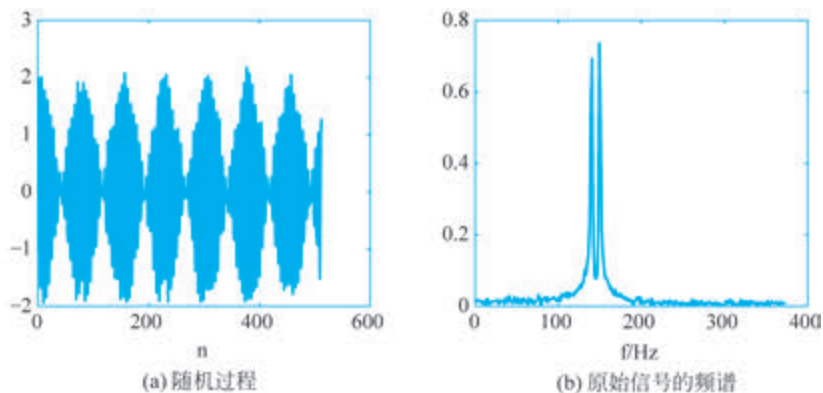


图 3.2.3 例 3-1 程序运行结果

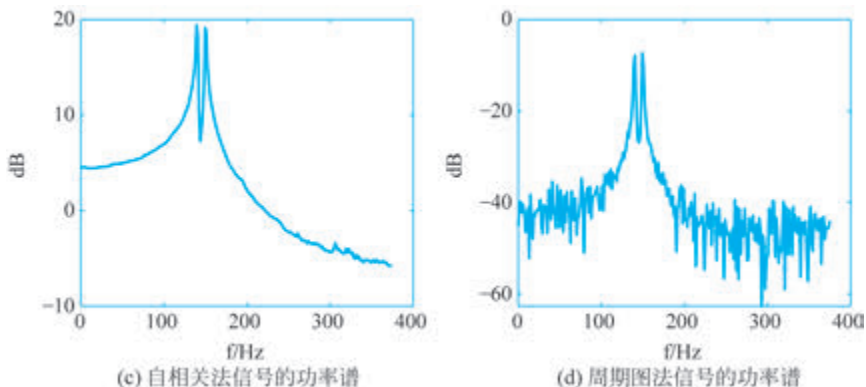


图 3.2.3 (续)

3.2.3 古典谱估计的改进

相关函数法和周期图法在进行傅里叶变换之前都默认对无限长序列加了一个矩形窗截断,估计谱相当于真实谱与矩形窗频谱相卷积的结果。矩形窗频谱等于矩形序列 $R_N(n)$ 的傅里叶变换,即

$$R_N(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[R_N(n)] = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} = R_N(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.2.10)$$

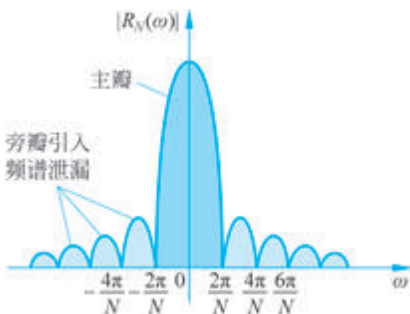


图 3.2.4 矩形窗频谱的幅度函数

对功率谱有影响的是矩形窗频谱的幅度函数 $R_N(\omega)$,如图 3.2.4 所示。由于主瓣不是无限窄,造成真实谱分辨率下降。同时由于存在旁瓣,一是会使功率谱主瓣内能量泄漏到旁瓣,从而导致谱估计方差增大;二是会使弱信号淹没在强信号的干扰中。

对相关函数法谱估计的改进是用窗函数对自相关函数加权后再求傅里叶变换:

$$\hat{S}_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \hat{R}_x(m) \tau_w(m) e^{-j\omega m} \quad (3.2.11)$$

这相当于用一个适当的窗函数频谱 $W(e^{j\omega})$ 与相关函数法估计的功率谱进行卷积,使谱线平滑,这种改进方法称为平滑。平滑后的功率谱是无偏的,方差也变小了,但分辨率会下降。

周期图法的改进则是平均,包括两种方法。

一是将截取的数据段 $x_N(n)$ 分成 L 段,每段数据的长度为 M ,显然 $L = \frac{N}{M}$ 。第 i 段数据加矩形窗后,有

$$x_N^i(n) = x_N(n + (i-1)M) R_M(n), \quad 0 \leq n \leq M-1, 1 \leq i \leq L \quad (3.2.12)$$

对于每段数据 $x_N^i(n)$,先利用周期图法求得其功率谱 $\hat{S}_x^i(e^{j\omega})$:

$$\hat{S}_x^i(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_N^i(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \quad (3.2.13)$$

然后计算各段功率谱估计的平均,得到平均周期图:

$$\hat{S}_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \hat{S}_x^i(e^{j\omega}) = \frac{1}{LM} \sum_{i=1}^L \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_N^i(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \quad (3.2.14)$$

这种方法叫 Bartlett 法。Bartlett 功率谱估计使得数据点数从 N 减小为 M , 于是窗函数的频谱宽度增大为周期图法的 L 倍, 因此频率分辨率下降为原来的 $1/L$ 。因为 L 个平均的方差是单个方差的 $1/L$, 所以当 $L \rightarrow \infty$ 时, L 个平均的方差趋于 0, 可以达到一致估计的目的。显然, $L=1$ 的 Bartlett 方法就是周期图法。

二是 Welch 法, 也称为加权交叠平均法。这种方法以加窗(加权)求取平滑, 以分段重叠求得平均, 因此集平均与平滑的优点于一体, 当然也不可避免具有两种方法的缺点。其主要步骤如下。

(1) 将长度为 N 的数据段分成 L 个小段, 每小段 M 点, 采用重叠保留法, 相邻小段交叠 $M/2$, 分割后段数为

$$L = \frac{N - M/2}{M/2} \quad (3.2.15)$$

(2) 对各小段加同样的平滑窗 $w(n)$ 后求离散时间傅里叶变换。

$$X_i(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} x_i(n) w(n) e^{-j\omega n} \quad (3.2.16)$$

(3) 求各小段功率谱的平均。

$$\hat{S}_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \frac{1}{MU} |X_i(e^{j\omega})|^2 \quad (3.2.17)$$

式中, $U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2(n)$ 为窗函数的平均功率, 为归一化因子, 用以保证所得到的谱是真正功率谱的渐近无偏估计; MU 为长度为 M 的窗函数的能量。

Welch 法数据分段采用非矩形窗, 减弱了分段时的截断效应。同时, 分段处理减小了由数据样本随机性带来的方差, 段数越多方差越小, 但分辨率会下降。

综上, 古典谱估计运算量较小, 物理概念明确, 便于工程实现。对长数据记录比较实用, 有些改进算法已固化到谱分析仪中。加窗截断的影响不可避免, 较宽的主瓣分辨率降低, 较大的旁瓣有可能掩盖真实谱中较弱的成分, 或产生虚假的谱峰, 使谱的分辨率变低, 谱估计方差变大。此外, 古典谱不是真实谱的一致估计, 改进算法在减小方差的同时, 往往使谱估计的分辨率下降。

3.2.4 MATLAB 实现

例 3-2 随机信号 $x(n) = \cos(0.35\pi n + \varphi_1) + 2\cos(0.4\pi n + \varphi_2) + 0.5\cos(0.8\pi n + \varphi_3) + v(n)$, 其中 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 为均匀分布的随机初始相位; $v(n)$ 为均值为 0、方差为 1 的白噪声。利用改进周期图法估计随机信号 $x(n)$ 的功率谱。

解 本程序中, 分别实现了 Bartlett 法和 Welch 法。其中, Welch 法中使用了汉明窗作为数据窗。同时程序运行了 50 次, 绘出了 50 次的结果。

MATLAB 程序如下:

```
N = 512; n = 0:N-1;
ph = 2 * pi * rand(1,3);
```

```

x = cos(0.35 * pi * n + ph(1)) + 2 * cos(0.4 * pi * n + ph(2)) + 0.5 * cos(0.8 * pi * n + ph(3)) +
randn(1,N);
%% Bartlett 谱估计
Nfft = 1024; L = 4; M = N/L;
Sx = zeros(1, Nfft/2);
for k = 1:L
    ks = (k - 1) * M + 1;
    ke = ks + M - 1;
    X = fft(x(ks:ke), Nfft);
    X = (abs(X)).^2;
    Sx = Sx + X(1:Nfft/2);
end
Sxdb = 10 * log10(Sx/(L * M));
w = 2/Nfft * [0:Nfft/2 - 1];
subplot(2, 1, 1); plot(w, Sxdb, 'b');
axis([0 1 -15 25]);
ylabel('幅度(dB)'); xlabel('\omega/\pi');
title('Bartlett 估计, N = 512, L = 4, M = 128');
%% Welch 估计
Nfft = 1024; L = 4;
D = fix(N/(L + 1));
M = 2 * D;
Sx = zeros(1, Nfft/2);
w = (window('hamming', M))';
for k = 1:L
    ks = (k - 1) * D + 1;
    ke = ks + M - 1;
    xk = x(ks:ke) * w;
    X = fft(xk, Nfft);
    X = (abs(X)).^2;
    Sx = Sx + X(1:Nfft/2);
end
U = w * w' / M;
Sxdb = 10 * log10(Sx/(L * M * U));
w = 2/Nfft * [0:Nfft/2 - 1];
subplot(2, 1, 2); plot(w, Sxdb, 'b'); axis([0 1 -15 25]);
ylabel('幅度(dB)'); xlabel('\omega/\pi');
title('Welch 估计, N = 512, L = 4, M = 204');

```

程序运行结果如图 3.2.5 所示,其中图 3.2.5(a)和图 3.2.5(c)分别为 Bartlett 和 Welch 估计结果,而图 3.2.5(b)和图 3.2.5(d)分别为重复 50 次的运行结果。由图 3.2.5 可见,加窗减小了频谱上的假谱峰,也进一步平滑了谱峰。

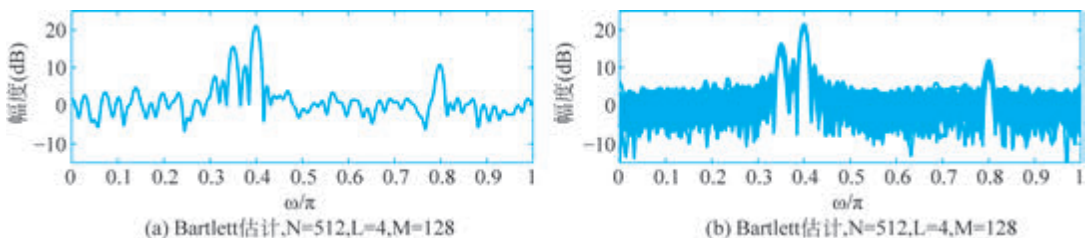


图 3.2.5 例 3-2 程序运行结果

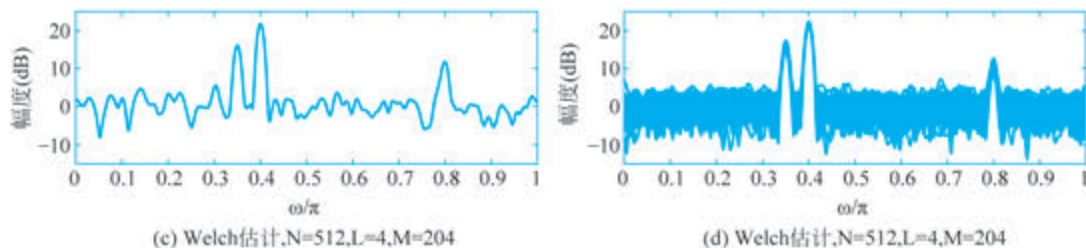


图 3.2.5 (续)

3.3 AR 模型法谱估计



视频讲解

古典功率谱估计方法以傅里叶变换为基础,用观测到的 N 个样本值估计功率谱时,认为在观察到的 N 个数据以外的部分均为零,这与实际情况不符,从而造成谱分辨率的降低。通常,人们或多或少会掌握被估计过程的某些先验知识,从而有可能对它作出某些合理的假设。1967年, Burg 提出了最大熵谱估计方法,开创了现代谱估计的先河。该方法以建立参数模型为基础,认为观察到的数据,是白噪声通过这一参数模型获得的输出,不认为在观察到的 N 个数据以外的部分全为零,由此克服了经典谱估计方法的缺点,提高了谱估计的分辨率。

对于平稳随机信号,有 3 种常用的线性模型,分别是自回归模型、滑动平均模型和自回归滑动平均模型。

参数模型法谱估计可分为以下 3 步。

(1) 选择合适的信号模型,假定被估计的随机过程 $x(n)$ 是白噪声序列 $w(n)$ 激励因果稳定可逆系统 $H(z)$ 的输出。

(2) 根据随机信号的有限个观测数据估计模型的参数。

(3) 根据模型参数估计 $x(n)$ 的功率谱。

现代谱估计的内容十分丰富,除了参数模型法之外,还有最大似然谱估计以及非参数谱估计方法,很多理论还在发展当中。

3.3.1 平稳随机过程的线性模型

实际应用中的随机过程,大多可以用有理传输函数来逼近,即表示为白噪声 $w(n)$ 激励一个线性差分方程的输出:

$$x(n) = \sum_{r=0}^q b_r w(n-r) - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \quad (3.3.1)$$

式中, $w(n)$ 为均值为 0、方差为 σ_w^2 的白噪声序列。两边取 Z 变换,则该线性时不变系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{1 + \sum_{r=1}^q b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3.3.2)$$

设线性时不变系统的单位脉冲响应为 $h(n)$, 则

$$x(n) = w(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m)h(n-m)$$

如果 $w(n)$ 是确定性信号, 则

$$X(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

但 $w(n)$ 是一平稳随机信号, 因此 $x(n)$ 也是平稳随机信号。由于随机信号不存在傅里叶变换, 所以需要从相关函数和功率谱的角度来研究随机信号通过线性系统的行为。

设 $R_x(m)$ 、 $R_w(m)$ 、 $R_h(m)$ 分别是 $x(n)$ 、 $w(n)$ 、 $h(n)$ 自相关函数, 则

$$R_x(m) = R_w(m) * R_h(m) \quad (3.3.3)$$

也就是说, 输入信号 $w(n)$ 和系统单位脉冲响应 $h(n)$ 卷积的相关等于相关的卷积。

两边求傅里叶变换, 得

$$F[R_x(m)] = F[R_w(m) * R_h(m)] = F[R_w(m)]F[R_h(m)]$$

根据维纳-辛钦定理(随机信号自相关函数的傅里叶变换是信号的功率谱密度)及确定性能量信号自相关函数的傅里叶变换是信号的能量谱, 有

$$S_x(e^{j\omega}) = S_w(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2 \quad (3.3.4)$$

即输出自功率谱等于输入自功率谱与系统能量谱的乘积。

当输入白噪声的功率谱密度 $S_w(e^{j\omega}) = \sigma_w^2$ 时, 参数模型输出的功率谱密度为

$$S_x(e^{j\omega}) = \sigma_w^2 |H(e^{j\omega})|^2 = \sigma_w^2 \left| \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} \right|^2 \quad (3.3.5)$$

可见, 如果能确定 σ_w^2 、 a_k 、 b_r 的值, 就可根据式(3.3.5)求得 $S_x(e^{j\omega})$ 。这样, 功率谱的估计问题变为确定系统参数的问题。

由于 $|H(e^{j\omega})|$ 的增益系数可并入 σ_w^2 进行考虑, 因此, 不失一般性, 可假设 $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ 。

1) AR(Autoregressive)模型

设除 $b_0 = 1$ 外, 所有 b_r ($1 \leq r \leq q$) 均为零, 此时系统函数表达式为

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (3.3.6)$$

这种模型称为 p 阶自回归模型, 简称 AR 模型。其系统函数只有极点, 没有零点, 因此也称为全极点模型, p 阶 AR 模型表示为 $AR(p)$, 其差分方程为

$$x(n) = - \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + w(n) \quad (3.3.7)$$

模型输出功率谱为

$$S_x(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_w^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\omega k} \right|^2} \quad (3.3.8)$$

白噪声 $w(n)$ 激励 AR 模型产生的输出 $x(n)$ 称为 AR 过程。由于 AR 模型是全极点模型, 所以 AR 过程的功率谱具有尖锐的峰而无深谷, 具有这一特点的随机信号适合选择 AR 模型。

2) MA(Moving-average)模型

设除 $a_0=1$ 外,所有 $a_k (1 \leq k \leq p)$ 均为零,此时系统函数表达式为

$$H(z) = 1 + \sum_{r=1}^q b_r z^{-r} \quad (3.3.9)$$

这种模型称为 q 阶滑动平均模型,简称 MA 模型。其系统函数只有零点,没有极点,因此也称为全零点模型, q 阶 MA 模型表示为 MA(q),其差分方程为

$$x(n) = \sum_{r=0}^q b_r w(n-r) \quad (3.3.10)$$

模型输出功率谱为

$$S_x(e^{j\omega}) = \sigma_w^2 \left| 1 + \sum_{r=1}^q b_r e^{-j\omega r} \right|^2 \quad (3.3.11)$$

MA 过程的功率谱具有深谷而无尖锐的峰。

3) ARMA 模型

设除 $a_0=1, b_0=1$ 外,其余所有的 a_k 和 b_r 不全为零,此时系统函数表达式和差分方程分别由式(3.3.1)和式(3.3.2)确定。由于系统函数既有零点,又有极点,这种模型称为自回归滑动平均模型,简称 ARMA 模型,或 ARMA(p, q)模型。ARMA 过程的功率谱既有谷又有峰。

基于模型的功率谱估计方法大致包括以下几步:①选择一个合适的模型;②用已观测到的数据估计模型参数;③将模型参数代入功率谱计算公式获得功率谱估计值。平稳随机信号通过线性系统的相关卷积定理为 $S_x(e^{j\omega}) = \sigma_w^2 |H(e^{j\omega})|^2$,因此只要能建立合适的信号模型,并且估计出模型的参数,就可以分析随机信号的功率谱。因此用模型法进行谱估计,实际上要解决的是模型的参数估计问题,所以这类谱估计方法又称为参数化法。

3 种模型中,AR 模型是实际中应用最广泛的一种,这是因为:①AR 模型的参数可借助解线性方程获得,而 ARMA、MA 模型的参数涉及解非线性方程;②3 种模型可以在一定条件下相互转换,任何 ARMA 过程和 MA 过程都可以用一个无穷阶的 AR 过程来表示;③实际中很多物理系统可直接采用或经变换后采用 AR 模型。因此,下面先介绍 AR 模型的谱估计方法。

3.3.2 AR 模型的尤尔-沃克方法

AR 模型是采用参数化模型对所观测到的随机数据进行分析和处理的一种数据处理方法,它是时序方法中最基本和应用最广泛的时序模型之一。AR 模型的应用已经有相当长的历史,20 世纪 20 年代,Yule 和 Walker 就利用 AR 模型来预测经济趋势及太阳黑子的活动周期。AR 模型和线性预测理论有着密切的关系。AR 模型谱估计方法可归结为求解 AR 模型参数或线性预测器系数。如果被估计的过程是 p 阶 AR 过程,那么用 AR(p)模型就能准确地模拟它。阶次选得太低会导致谱估计平滑;阶次选得太高会产生伪峰。为了直观确定 AR 模型阶次,可不断增加模型的阶次,同时观察预测误差功率,当其下降到最小时,对应的阶次可选定为模型的阶次。根据经验,可将 AR 模型的阶次选择在 $\frac{N}{3} < p < \frac{N}{2}$,其中 N 是记录的数据长度。这样可以得到高分辨率的估计谱,并且很少出现伪峰。

假设 $w(n)$ 和 $x(n)$ 都是实平稳的随机信号, 其中 $w(n)$ 是均值为 0、方差为 σ_w^2 的白噪声序列, $x(n)$ 为 AR 过程, 则 p 阶 AR 模型的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}}$$

p 阶 AR 模型有 p 个待定参数: a_1, a_2, \dots, a_p 。系统差分方程为

$$x(n) = - \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + w(n)$$

相当于用 n 时刻之前 p 个值 $\{x(n-p), \dots, x(n-2), x(n-1)\}$ 的线性组合来预测 n 时刻的值, 这种预测为线性预测, 预测误差为

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) + \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) = w(n) \quad (3.3.12)$$

$$E[e^2(n)] = E[w^2(n)] = \sigma_w^2 \quad (3.3.13)$$

对 AR 模型, 输入是白噪声 $w(n)$, 输出是 $x(n)$, 如图 3.3.1(a) 所示。如果把 $x(n)$ 看作 p 阶预测器的输入, $e(n)$ 是其输出, 那么该预测器的系统函数为

$$H'(z) = \frac{E(z)}{X(z)} = 1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i} = \frac{1}{H(z)}$$

可以看出, AR 模型的逆滤波器正是预测误差滤波器, 如图 3.3.1(b) 所示。这样, 将 AR 模型和预测误差滤波器级联的结果相当于一个全通系统, 所以预测误差具有白噪声的性质。并且, 当 AR 过程的阶次与线性预测器的阶次相同时, 最小预测误差功率就是激励白噪声 $w(n)$ 的方差 σ_w^2 。



图 3.3.1 AR 模型与预测误差滤波器

因为预测误差滤波器 $H'(z)$ 能将 AR 过程 $x(n)$ 变成白噪声 $w(n)$, 所以, 预测误差滤波器也叫白化滤波器, 它对 AR 过程具有去相关白化作用。

将预测误差的差分方程代入预测误差的自相关表达式, 得

$$\begin{aligned} E[e^2(n)] &= E\left\{ \left[x(n) + \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) \right]^2 \right\} \\ &= E\left\{ x^2(n) + 2x(n) \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + \left[\sum_{i=1}^p a_i x(n-i) \right]^2 \right\} \\ &= E[x^2(n)] + 2E\left[\sum_{i=1}^p a_i x(n)x(n-i) \right] + E\left\{ \left[\sum_{i=1}^p a_i x(n-i) \right] \left[\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \right] \right\} \end{aligned}$$

其中:

$$E[x^2(n)] = R_x(0)$$

$$2E\left[\sum_{i=1}^p a_i x(n)x(n-i) \right] = 2 \sum_{i=1}^p a_i E[x(n)x(n-i)] = 2 \sum_{i=1}^p a_i R_x(i)$$

$$E \left\{ \left[\sum_{i=1}^p a_i x(n-i) \right] \left[\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \right] \right\} = \sum_{i=1}^p a_i \sum_{k=1}^p a_k E[x(n-i)x(n-k)]$$

$$= \sum_{i=1}^p a_i \sum_{k=1}^p a_k R_x(i-k)$$

这样:

$$E[e^2(n)] = R_x(0) + 2 \sum_{i=1}^p a_i R_x(i) + \sum_{i=1}^p a_i \sum_{k=1}^p a_k R_x(i-k) \quad (3.3.14)$$

在最小均方误差(Minimum Mean Square Error, MMSE)准则下,要使预测值最佳地逼近 $x(n)$, 参数 a_i 的选择应使

$$\frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.3.15)$$

又

$$\frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial a_i} = 0 + 2R_x(i) + 2 \sum_{k=1}^p a_k R_x(i-k), \quad i = 1, 2, \dots, p$$

因此

$$R_x(i) = - \sum_{k=1}^p a_k R_x(i-k), \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.3.16)$$

即自相关序列呈自回归关系, 回归系数就是 AR 参数。写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(-1) & \cdots & R_x[-(p-1)] \\ R_x(1) & R_x(0) & \cdots & R_x[-(p-2)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(p-1) & R_x(p-2) & \cdots & R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_x(1) \\ R_x(2) \\ \vdots \\ R_x(p) \end{bmatrix}$$

将式(3.3.16)代入式(3.3.14), 可得

$$E[e^2(n)] = R_x(0) + 2 \sum_{i=1}^p a_i R_x(i) + \sum_{i=1}^p a_i [-R_x(i)] = R_x(0) + \sum_{i=1}^p a_i R_x(i) = \sigma_w^2$$

这样就得到了 AR 模型的正则方程, 即在均方误差(Mean Square Error, MSE)最小准则下建立的模型参数与相关函数的关系方程, 它是在二阶统计意义上的建模, 也叫尤尔-沃克(Yule-Walker)方程:

$$R_x(m) = \begin{cases} - \sum_{i=1}^p a_i R_x(m-i), & m = 1, 2, \dots, p \\ - \sum_{i=1}^p a_i R_x(i) + \sigma_w^2, & m = 0 \end{cases} \quad (3.3.17)$$

即

$$R_x(m) + \sum_{i=1}^p a_i R_x(m-i) = \sigma_w^2 \delta(m), \quad m = 0, 1, \dots, p \quad (3.3.18)$$

写成矩阵形式, 得

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(-1) & R_x(-2) & \cdots & R_x(-p) \\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(-1) & \cdots & R_x[-(p-1)] \\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) & \cdots & R_x[-(p-2)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(p) & R_x(p-1) & R_x(p-2) & \cdots & R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.19)$$

对于实序列,由于 $R_x(-m)=R_x(m)$,因此只要估计出 $p+1$ 个自相关函数值,就可通过求解尤尔-沃克方程得到 $p+1$ 个模型参数 $\{a_1, a_2, \dots, a_p, \sigma_w^2\}$,根据这些参数即可得到

$$\text{随机信号的功率谱估计 } S_x(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_w^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\omega k} \right|^2}.$$

例 3-3 已知 $x(n)$ 满足 AR(2)模型 $H(z) = \frac{1}{1+0.3z^{-1}-0.4z^{-2}}$,白噪声过程的均值为0、方差 $\sigma_w^2=1$,求 $x(n)$ 的自相关 $R_x(0)$ 、 $R_x(1)$ 和 $R_x(2)$ 。

解 $p=2$ 的尤尔-沃克方程为

$$\begin{cases} R_x(0) + a(1)R_x(1) + a(2)R_x(2) = \sigma_w^2 \\ R_x(1) + a(1)R_x(0) + a(2)R_x(1) = 0 \\ R_x(2) + a(1)R_x(1) + a(2)R_x(0) = 0 \end{cases}$$

将已知数据代入,得

$$\begin{cases} R_x(0) + 0.3R_x(1) - 0.4R_x(2) = 1 \\ 0.3R_x(0) + 0.6R_x(1) = 0 \\ -0.4R_x(0) + 0.3R_x(1) + R_x(2) = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} R_x(0) = \frac{100}{63} \\ R_x(1) = -\frac{50}{63} \\ R_x(2) = \frac{55}{63} \end{cases}$$

3.3.3 莱文森-杜宾快速递推算法

解尤尔-沃克方程是从已知的 $(p+1)$ 个自相关函数 $R_x(m)$ ($m=0,1,\dots,p$) 求出 p 个 a_i 和一个 σ_w^2 。对于 $(p+1)$ 元线性方程组,一般解法是矩阵求逆或高斯消元法,运算量为 $O(p^3)$,当 p 较大时,运算量很大,并且当模型阶数增加时,模型参数要全部重新计算。

莱文森-杜宾(Levinson-Durbin)算法是求解尤尔-沃克方程的高效递推算法,它利用了自相关矩阵的对称性和托普利兹性。所谓对称,指的是 $\mathbf{R}=\mathbf{R}^T$,而托普利兹性是指自相关矩阵中与主对角线平行的任一对角线上的元素都具有相等特性。

莱文森-杜宾算法的运算量为 $O(p^2)$,它首先以 AR(0)和 AR(1)的模型参数作为初始条件,计算出 AR(2)的模型参数,然后根据这些参数计算 AR(3)的模型参数,一直到由 $p-1$



视频讲解

阶模型的参数递推求出 p 阶模型的参数为止。令 $a_p(i)$ 表示阶次为 p 时 AR 模型的第 i 个参数, σ_p^2 表示 p 阶预测时的最小预测误差功率, $\sigma_0^2 = E[x^2(n)] = R_x(0)$ 。

一阶 AR 模型的尤尔-沃克方程为

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(1) & R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求解可得

$$a_1(1) = -\frac{R_x(1)}{R_x(0)} \quad (3.3.20)$$

$$\sigma_1^2 = R_x(0) - \frac{R_x^2(1)}{R_x(0)} = R_x(0) \left[1 - \frac{R_x^2(1)}{R_x^2(0)} \right] = \sigma_0^2 [1 - a_1^2(1)] \quad (3.3.21)$$

令 $p=2$, 得到二阶 AR 模型的尤尔-沃克方程为

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & R_x(2) \\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_2(1) \\ a_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求解可得 AR(2) 模型的参数为

$$a_2(2) = -\frac{R_x(0)R_x(2) - R_x^2(1)}{R_x^2(0) - R_x^2(1)} = -[R_x(2) + a_1(1)R_x(1)] / \sigma_1^2$$

$$a_2(1) = -[R_x(0)R_x(1) - R_x(1)R_x(2)] / [R_x^2(0) - R_x^2(1)] = a_1(1) + a_2(2)a_1(1)$$

$$\sigma_2^2 = \sigma_1^2 [1 - a_2^2(2)]$$

由此得到如下由 $p-1$ 阶参数求 p 阶参数的通用递推公式:

$$\begin{cases} a_p(p) = -\left[R_x(p) + \sum_{i=1}^{p-1} a_{p-1}(i)R_x(p-i) \right] / \sigma_{p-1}^2 \\ a_p(i) = a_{p-1}(i) + a_p(p)a_{p-1}(p-i), i=1, 2, \dots, p-1 \\ \sigma_p^2 = \sigma_{p-1}^2 [1 - a_p^2(p)] \end{cases} \quad (3.3.22)$$

若将递推过程中不断变化的阶次用 m 表示, 并将 m 阶 AR 模型的第 m 个系数 $a_m(m)$ 定义为反射系数 k_m , 则

$$\begin{cases} k_m = -\left[R_x(m) + \sum_{i=1}^{m-1} a_{m-1}(i)R_x(m-i) \right] / \sigma_{m-1}^2 \\ a_m(i) = a_{m-1}(i) + k_m a_{m-1}(m-i), i=1, 2, \dots, m-1 \\ \sigma_m^2 = \sigma_{m-1}^2 (1 - k_m^2) \end{cases} \quad (3.3.23)$$

式中, $k_m = a_m(m)$, $m=1, 2, \dots, p$; $\sigma_0^2 = R_x(0)$ 。

反射系数 $k_m = a_m(m)$, 而 $a_m(m)$ 为 m 阶 AR 模型

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^m a_i z^{-i}}$$

的第 m 个系数。将 m 阶 AR 模型的系统函数用极点表示为

$$H(z) = \frac{1}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \cdots (1 - z_m z^{-1})}$$

对于因果稳定系统 $H(z)$ ，由于极点全在单位圆内，所以 $|z_i| < 1, i = 1, 2, \dots, m$ 。 $a_m(m)$ 应等于 m 个绝对值小于 1 的 z_i 相乘，其绝对值必然小于 1，即

$$|k_m| = |a_m(m)| < 1, \quad m = 1, 2, \dots, p$$

预测误差功率 $\sigma_m^2 = \sigma_{m-1}^2(1 - k_m^2)$ ，由于反射系数 $|k_m| = |a_m(m)| < 1$ ，因此 $\sigma_0^2 < \sigma_1^2 < \cdots < \sigma_p^2$ 。可见，AR 模型的阶次越高，预测误差功率越小。

递推公式提供了一种确定模型阶数的实验方法，若模型的阶数不知道，可由低阶开始递推，当递推到 M 阶，预测误差满足允许的值时，停止递推，选 AR 模型的阶数为 M 。这种方法递推效率高，当阶数变化时，无须从头计算。但需要预先估计出信号自相关函数，当观测数据长度较短时，估计误差较大，会出现谱峰频率偏移和谱线分裂；若数据很长，则估计自相关函数较准确。

用莱文森-杜宾算法求解 AR 参数的关键，是自相关函数序列的估计。为了准确估计自相关函数，往往需要较多的样本数据，所以，在短数据记录的情况下，用莱文森-杜宾算法求解 AR 参数效果较差。

根据以上推导过程，利用莱文森-杜宾算法估计功率谱的步骤如下。

- (1) 输入 $x(n), n = 0, 1, \dots, N-1$ 及 σ^2 ，计算自相关函数的估计值 $R_x(m), m = 0, 1, \dots, p$ 。
- (2) 根据式(3.3.20)和式(3.3.21)求解 1 阶模型参数的估计值 k_1 和 σ_1^2 。
- (3) 由递推算算法求解 p 阶模型参数 $a_p(i) (i = 1, 2, \dots, p)$ 和 σ_p^2 。
- (4) 判断是否 $\sigma_p^2 < \sigma^2$ ，若是则进入步骤(5)；若否，则 $p = p + 1$ ，进入步骤(3)。
- (5) 求出功率谱估计

$$\hat{S}_{AR}(\omega) = \frac{\sigma_p^2}{\left| 1 + \sum_{n=1}^p a_p(n) e^{-j\omega n} \right|^2}$$

利用莱文森-杜宾算法估计 AR 模型频谱的 MATLAB 函数为

$$[Pxx, f] = pyulear(x, p, NFFT, Fs)$$

其中， x 为进行功率谱估计的输入有限长序列； p 为模型的阶数； $NFFT$ 为 DFT 的点数； Fs 为绘制功率谱曲线的采样频率，默认值为 1； Pxx 为功率谱估计值； f 为 Pxx 值所对应的频率点。

例 3-4 一序列含有白噪声和两个频率的余弦信号， $x(n) = \cos(0.3\pi n) + \cos(0.4\pi n) + w(n)$ ，利用莱文森-杜宾算法估计该序列的功率谱。

解 MATLAB 程序如下：

```
N = 128; p = 40; NFFT = 2048; Fs = 2;
n = 0:N-1; randn('state', 0);
x = cos(0.3 * pi * n) + cos(0.4 * pi * n) + randn(size(n));
[P, f] = periodogram(x, [], NFFT, 2);
[Py, fy] = pyulear(x, p, NFFT, 2);
subplot(211); plot(f, 10 * log(P)); grid; title('Periodogram');
axis([0 1 -60 60]);
```

```
subplot(212);plot(fy,10*log(Py));grid;title('Yule');
axis([0 1 -60 60]);
```

图 3.3.2 为 $p=40, N=128$ 时周期图与莱文森-杜宾算法两种谱估计算法的谱估计结果。

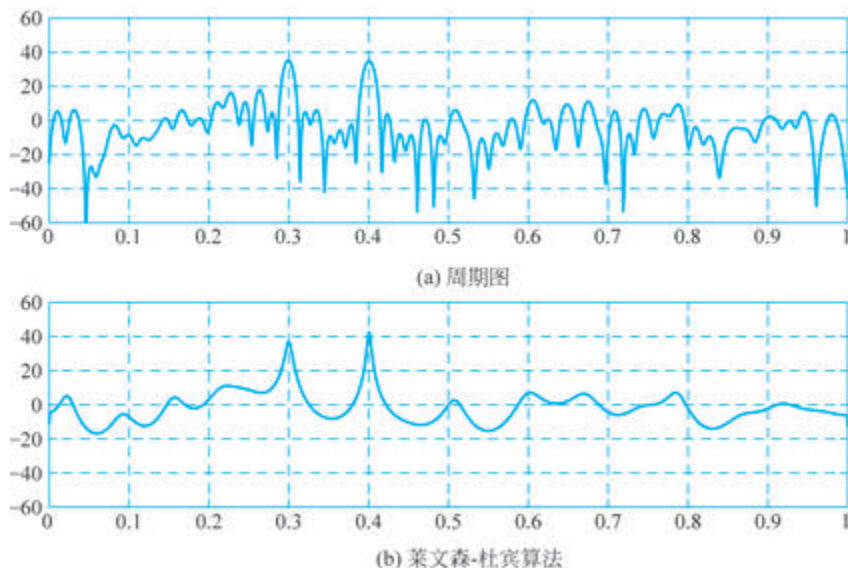


图 3.3.2 $p=40, N=128$ 时周期图与莱文森-杜宾算法两种谱估计算法的谱估计结果

3.3.4 Burg 递推算法

莱文森-杜宾递推算法求 AR 参数需要用到信号的自相关序列,即先由自相关函数序列求反射系数,再代入莱文森关系式求出 AR 参数。自相关序列只能从随机序列的有限个观测数据估计得到,当时间序列较短时,估计误差很大,这将对 AR 模型 $a_k (k=1,2,\dots,p)$ 的计算引入较大的误差,导致谱估计性能下降,甚至出现谱线分裂和谱峰偏离等现象。此外,在计算相关函数估计时,对 N 个观测数据以外的数据作零的假设,等效于数据加窗,这将使参数估计的精度下降,故谱估计误差较大。

伯格(Burg)递推算法不对已知数据两端以外的未知数据作主观臆测,并且不需要估计自相关函数,它直接从观测的数据利用线性预测器的前向和后向预测的总均方误差之和为最小的原则来估计反射系数,进而通过一致算法的递推公式求出 AR 模型的优化参数。由于在计算中避开了估计自相关函数,直接从输入数据计算 AR 模型参数,所以减小了计算误差,从而改善了频率分辨率。

将预测的概念进行推广,引入前向预测与后向预测的概念。由随机序列的一些已知值的线性组合去估计序列的未知值称为线性预测。其中,由序列的一组相邻值向前预测下一时刻值,称为前向一步预测,相反,如果利用序列一组相邻值向后预测过去一个时刻值,称为后向一步预测,如图 3.3.3 所示。

根据线性预测理论, $x(n)$ 的估计值 $\hat{x}(n)$ 可用 $x(n)$ 的过去值进行预测。令 p 阶前向预测表示为



视频讲解

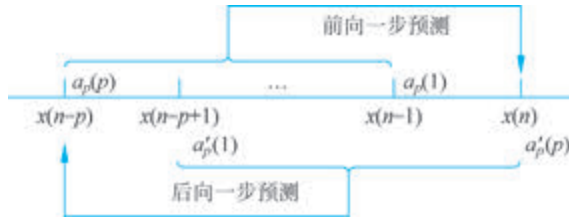


图 3.3.3 前向一步预测和后向一步预测

$$\hat{x}^f(n) = - \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-k) \tag{3.3.24}$$

式中，上角标 f 表示前向(forward)； $a_p(k)$ 表示前向预测系数。

p 阶前向预测误差为

$$f_p(n) = x(n) - \hat{x}^f(n) = x(n) + \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-k) \tag{3.3.25}$$

相应地， p 阶后向预测表示为

$$\hat{x}^b(n-p) = - \sum_{k=1}^p a'_p(k)x(n-p+k) \tag{3.3.26}$$

式中，上角标 b 表示后向(backward)； $a'_p(k)$ 表示后向预测系数。

p 阶后向预测误差为

$$b_p(n) = x(n-p) - \hat{x}^b(n-p) = x(n-p) + \sum_{k=1}^p a'_p(k)x(n-p+k) \tag{3.3.27}$$

在实系数情况下，前向预测系数与后向预测系数相等，即 $a_p(k) = a'_p(k), k=1, 2, \dots, p$ 。这样，式(3.2.27)可表示为

$$b_p(n) = x(n-p) + \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-p+k) \tag{3.3.28}$$

由式(3.3.25)和式(3.3.28)可得到前向预测误差滤波器和后向预测误差滤波器的横截型结构，如图 3.3.4 所示。

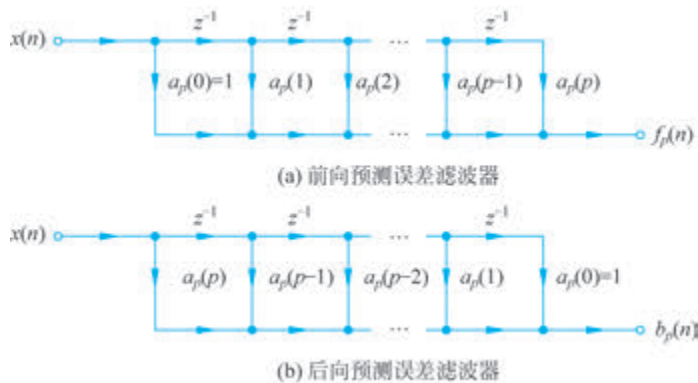


图 3.3.4 前向和后向预测误差滤波器的横截型结构

下面，借助莱文森关系式来获得前向、后向预测误差的递推式。首先，对于前向预测误差

$$\begin{aligned} f_p(n) &= x(n) + \sum_{k=1}^{p-1} a_p(k)x(n-k) + a_p(p)x(n-p) \\ &= x(n) + \sum_{k=1}^{p-1} a_p(k)x(n-k) + k_p x(n-p) \end{aligned}$$

利用莱文森关系式 $a_p(k) = a_{p-1}(k) + k_p a_{p-1}(p-k)$, 可得

$$\begin{aligned} f_p(n) &= x(n) + \sum_{k=1}^{p-1} [a_{p-1}(k) + k_p a_{p-1}(p-k)] x(n-k) + k_p x(n-p) \\ &= x(n) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1}(k)x(n-k) + k_p \left[x(n-p) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1}(p-k)x(n-k) \right] \end{aligned}$$

由于

$$f_{p-1}(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1}(k)x(n-k)$$

因此

$$f_p(n) = f_{p-1}(n) + k_p \left[x(n-p) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1}(p-k)x(n-k) \right]$$

令 $p-k = k'$ 以及 $k = k'$, 则

$$\begin{aligned} f_p(n) &= f_{p-1}(n) + k_p \left[x(n-p) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1}(k)x(n-p+k) \right] \\ &= f_{p-1}(n) + k_p b_{p-1}(n-1) \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

后向预测误差为

$$b_p(n) = x(n-p) + \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-p+k) = x(n-p) + \sum_{k=1}^{p-1} a_p(k)x(n-p+k) + k_p x(n)$$

利用莱文森关系式 $a_p(k) = a_{p-1}(k) + k_p a_{p-1}(p-k)$, 可得

$$\begin{aligned} b_p(n) &= x(n-p) + \sum_{k=1}^{p-1} [a_{p-1}(k) + k_p a_{p-1}(p-k)] x(n-p+k) + k_p x(n) \\ &= x(n-p) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1}(k)x(n-p+k) + k_p \left[x(n) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1}(p-k)x(n-p+k) \right] \\ &= b_{p-1}(n-1) + k_p \left[x(n) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1}(p-k)x(n-p+k) \right] \end{aligned}$$

令 $p-k = k'$ 以及 $k = k'$, 则

$$\begin{aligned} b_p(n) &= b_{p-1}(n-1) + k_p \left[x(n) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1}(k)x(n-k) \right] \\ &= b_{p-1}(n-1) + k_p f_{p-1}(n) \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

递推的初始值为 $f_0(n) = b_0(n) = x(n)$, 即零阶预测的预测误差等于信号本身, 这是因为零阶预测相当于信号直接通过。

一般将预测过程中不断变化的阶次用 m 表示, 这样可得到如下预测误差滤波器的递推公式:

$$\begin{cases} f_m(n) = f_{m-1}(n) + k_m b_{m-1}(n-1) \\ b_m(n) = b_{m-1}(n-1) + k_m f_{m-1}(n) \\ f_0(n) = b_0(n) = x(n) \end{cases} \quad (3.3.31)$$

根据式(3.3.31)可以画出预测误差格型滤波器结构图,如图3.3.5所示。

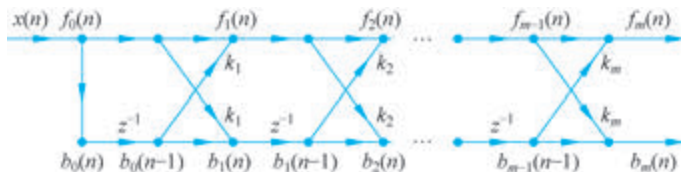


图 3.3.5 预测误差格型滤波器结构图

从图3.3.5可以看出,格型滤波器的参数是各阶反射系数 k_m ,该参数可以利用莱文森-杜宾算法递推得到,即

$$k_m = - \left[R_x(m) + \sum_{i=1}^{m-1} a_{m-1}(i) R_x(m-i) \right] / \sigma_{m-1}^2$$

计算中用到的自相关序列,需要根据观测数据去估算。前已提及,在短数据情况下,由于估计自相关函数存在误差,所以求得的反射系数较差。

Burg算法采用前向和后向预测均方误差之和最小的方法来求反射系数 k_m ,即令

$$\frac{\partial E [f_m^2(n) + b_m^2(n)]}{\partial k_m} = 0 \quad (3.3.32)$$

将式(3.3.31)代入式(3.3.32),可得

$$E \{ 2f_{m-1}(n)b_{m-1}(n-1) + k_m [f_{m-1}^2(n) + b_{m-1}^2(n-1)] \} = 0$$

从而可得

$$k_m = - \frac{2E [f_{m-1}(n)b_{m-1}(n-1)]}{E [f_{m-1}^2(n) + b_{m-1}^2(n-1)]}$$

对于平稳随机过程,利用时间平均代替集合平均,因此

$$k_m = - \frac{2 \sum_{n=m}^{N-1} [f_{m-1}(n)b_{m-1}(n-1)]}{\sum_{n=m}^{N-1} [f_{m-1}^2(n) + b_{m-1}^2(n-1)]}, \quad m = 1, 2, \dots, p$$

从严格意义上讲,时间平均应除以求和项的总项数,由于分子、分母该因子相同,所以可以约去。另外还有以下两点需要说明。

(1) 为什么求和范围为 m 到 $N-1$? 假设记录的数据 $x(n)$ 的 N 个观测值为 $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$,根据图3.3.5,对于 m 阶线性预测误差滤波器,不管是前向还是后向预测误差滤波器,其预测误差都为

$$e(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^m h(k)x(n-k) \quad (3.3.33)$$

对于前向预测误差滤波器, $e(n) = f_m(n), h(n) = \{a_m(0), a_m(1), \dots, a_m(m)\}$; 对于后向预测误差滤波器, $e(n) = b_m(n), h(n) = \{a_m(m), a_m(m-1), \dots, a_m(0)\}$ 。 $x(n)$ 的长度为 $N, h(n)$ 的长度为 $m+1$,则 $e(n)$ 的长度应为 $N+m$ 。然而,根据式(3.3.33)在计算

$e(0), \dots, e(m-1)$ 以及 $e(N), \dots, e(N+m-1)$ 时, 必然用到了 $x(-1)$ 和 $x(N)$ 等 $n=0 \sim N-1$ 之外的 $x(n)$, 而事实观测到的数据只有 $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, 这就相当于对该数据段之外的部分人为假设为零, 这就存在某种不合理性。

Burg 对已知数据之外的数据不做人为假设, 求和范围为 m 到 $N-1$, 相当于不会用到已知数据段之外的数据, 因而不含有对未知数据的人为假设, 这种数据开窗方法叫作协方差法。

当采用时间平均代替集合平均时, 典型的数据开窗方法还是自相关法, 其特点是将已知数据段之外的部分都假设为零, 求和范围为 0 到 $N+m-1$ 。

(2) 为什么用使前、后向预测误差的平均功率最小的方法求反射系数 k_m , 而不是仅用使前向预测误差功率或后向预测误差功率最小的方法来求 k_m ?

这是因为协方差法存在稳定性问题, 有可能使得 $|k_m| > 1$, 而 Burg 算法能够保证预测误差滤波器是最小相位的。例如, 若用使前向预测误差功率最小的方法来求反射系数 k_m , 即令

$$\frac{\partial E [f_m^2(n)]}{\partial k_m} = 0 \quad (3.3.34)$$

将式(3.3.31)代入式(3.3.34), 可得

$$E [2f_{m-1}(n)b_{m-1}(n-1) + 2k_m f_{m-1}^2(n)] = 0$$

从而可得

$$k_m = - \frac{E [f_{m-1}(n)b_{m-1}(n-1)]}{E [b_{m-1}^2(n-1)]}$$

对于平稳随机过程, 利用时间平均代替集合平均, 因此

$$k_m = - \frac{\sum_{n=m}^{N-1} [f_{m-1}(n)b_{m-1}(n-1)]}{\sum_{n=m}^{N-1} [b_{m-1}^2(n-1)]}, \quad m = 1, 2, \dots, p$$

以 $N=3, m=1$ 为例, 可得

$$k_1 = - \frac{b_0(0)f_0(1) + b_0(1)f_0(2)}{b_0^2(0) + b_0^2(1)} = - \frac{x(0)x(1) + x(1)x(2)}{x^2(0) + x^2(1)}$$

上式中分母与 $x(2)$ 无关, 所以如果 $x(2)$ 足够大, 就有可能使 $|k_1| > 1$, 预测误差滤波器将失去最小相位特性, 从而造成 AR 模型不稳定。而 Burg 算法总能保证预测误差滤波器是最小相位的。

最后, 总结一下 Burg 递推算法的基本步骤。

(1) 确定初始条件 $x(n), n=0, 1, \dots, N-1$, 阶数 p 。

$$f_0(n) = b_0(n) = x(n), \quad \sigma_0^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)$$

(2) 从 $m=1$ 开始迭代计算 AR 模型参数。

$$k_m = - \frac{2 \sum_{n=m}^{N-1} [f_{m-1}(n)b_{m-1}(n-1)]}{\sum_{n=m}^{N-1} [f_{m-1}^2(n) + b_{m-1}^2(n-1)]}, \quad m = 1, 2, \dots, p$$

$$a_m(i) = a_{m-1}(i) + k_m a_{m-1}(m-i), \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

m 阶均方误差为

$$\sigma_m^2 = \sigma_{m-1}^2 (1 - k_m^2)$$

(3) 递推高一阶前、后向预测误差。

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + k_m b_{m-1}(n-1)$$

$$b_m(n) = b_{m-1}(n-1) + k_m f_{m-1}(n)$$

(4) 若阶数小于 p , 则阶数 $m = m + 1$, 回到步骤(2)进行下一次迭代, 直到达到预定阶数 p 。

(5) 估计功率谱。

$$\hat{S}_{AR}(\omega) = \frac{\sigma_p^2}{\left| 1 + \sum_{n=1}^p a_p(n) e^{-j\omega n} \right|^2}$$

Burg 算法由于避免了估计自相关函数, 因而短数据的谱估计比相关函数法精确。Burg 算法估计频谱的 MATLAB 函数为

$$[P_{xx}, f] = \text{pburg}(x, p, \text{NFFT}, F_s)$$

其中, x 为进行功率谱估计的输入有限长序列; p 为模型的阶数; NFFT 为 DFT 的点数; F_s 为绘制功率谱曲线的采样频率, 默认值为 1; P_{xx} 为功率谱估计值; f 为 P_{xx} 值所对应的频率点。

例 3-5 一序列含有白噪声和两个频率的余弦信号, $x(n) = \cos(0.3\pi n) + \cos(0.32\pi n) + w(n)$, 利用莱文森-杜宾算法、Burg 算法估计该序列的功率谱。

解 MATLAB 程序如下:

```
N = 512; p = 40; NFFT = 1024; Fs = 2;
n = 0:N-1; randn('state', 0);
x = cos(0.3 * pi * n) + cos(0.32 * pi * n) + randn(size(n));
[P, f] = pyulear(x, p, NFFT, 2);
[Pw, f2] = pburg(x, p, NFFT, 2);
subplot(211); plot(f, 10 * log(P)); grid; title('L-D');
axis([0 1 -30 60]);
subplot(212); plot(f2, 10 * log(Pw)); grid; title('Burg');
axis([0 1 -30 60]);
```

图 3.3.6、图 3.3.7 分别为 $w(n) = 0$ 和 $w(n) \neq 0$ 的谱估计结果。

Burg 算法避免了采用有限数据估计自相关函数的计算, 适合短序列参数估计, 克服了莱文森-杜宾递推中的某些缺点, 计算量小, 但是对于正弦信号的谱估计, 仍存在某些谱线分裂与频率偏移现象。

3.3.5 协方差法

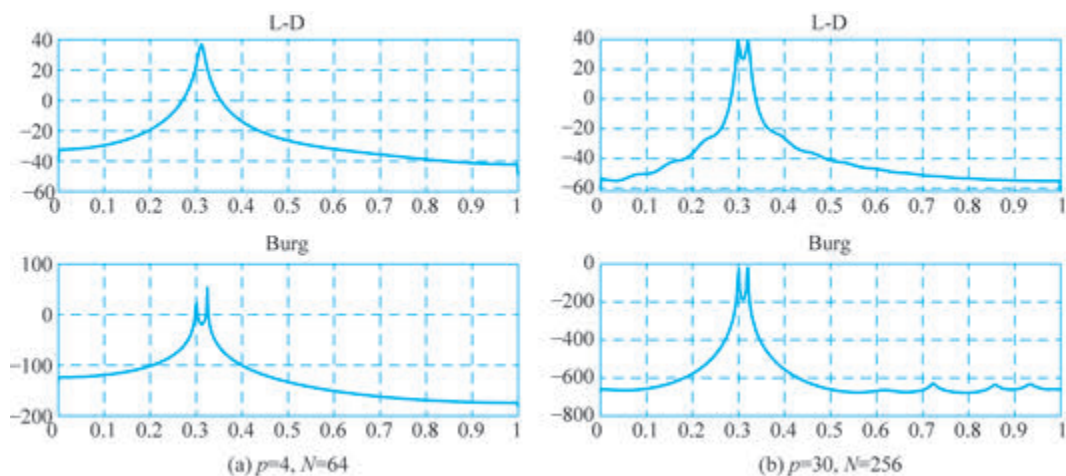
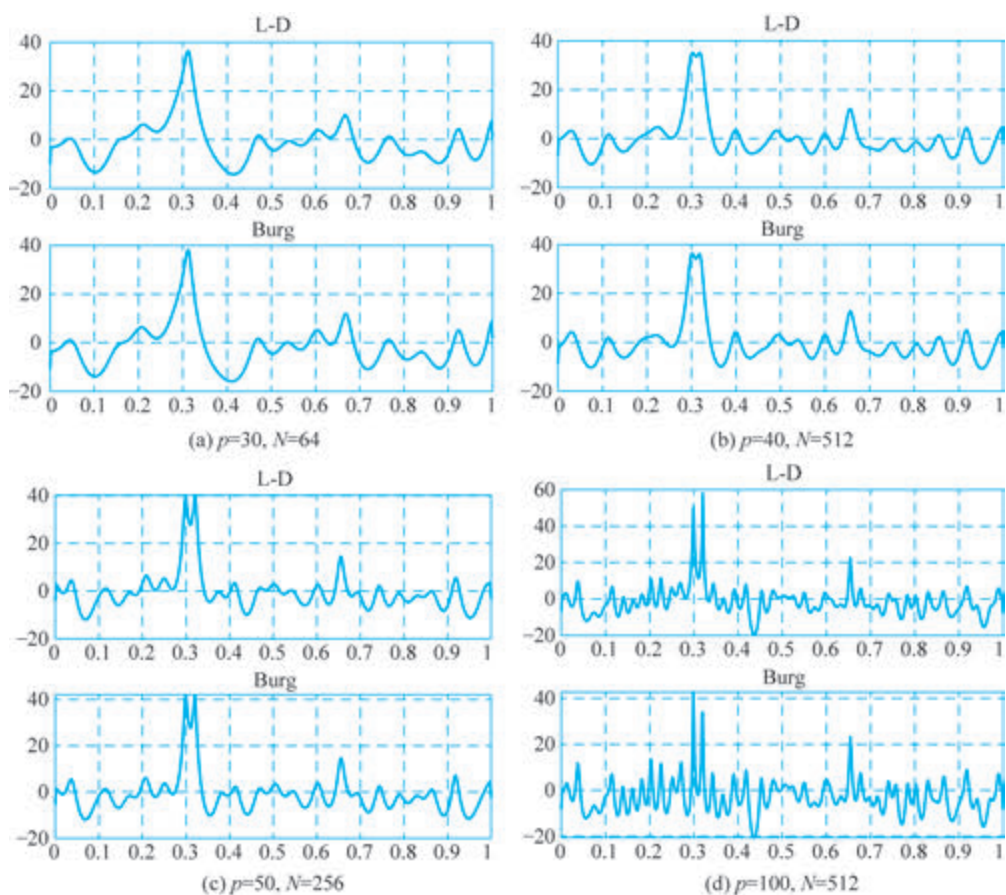
协方差法与自相关法均只利用前向预测误差功率最小求模型参数, 但求预测误差功率的求和极限不同。数据开窗采用协方差法。

p 阶前向预测表示为

$$\hat{x}^f(n) = - \sum_{k=1}^p a_p(k) x(n-k)$$



视频讲解


 图 3.3.6 $w(n)=0$ 的谱估计结果

 图 3.3.7 $w(n) \neq 0$ 的谱估计结果

预测误差为

$$f_p(n) = x(n) - \hat{x}^f(n) = x(n) - \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-k)$$

假设观测数据窗为 $[0, N-1]$, 在有限数据观测下, 对观测窗外的数据不作任何假设, 相当于避免了加窗概念的影响, 预测误差只存在于 $n=p \sim N-1$ 。前向预测误差功率为

$$\rho = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} |f_p(n)|^2 = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} \left| x(n) + \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-k) \right|^2$$

令 $\frac{\partial \rho}{\partial a_p(k)} = 0$, 则

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_p(k)} = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} \left[x(n) + \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-k) \right] x(n-i) = 0, \quad i=1, 2, \dots, p \quad (3.3.35)$$

令 $C_{xx}(i, k) = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} x(n-i)x(n-k)$, $i, k=1, 2, \dots, p$, 称为协方差函数, 则

$$C_{xx}(i, 0) = - \sum_{k=1}^p a_p(k)C_{xx}(i, k), \quad i=1, 2, \dots, p \quad (3.3.36)$$

白噪声的方差估计为

$$\rho_{\min} = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} \left[x(n) + \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-k) \right] \left[x(n) + \sum_{i=1}^p a_p(i)x(n-i) \right] \quad (3.3.37)$$

再根据式(3.3.35), 式(3.3.37)等式右边第一个中括号内部分与第二个中括号内第二部分的乘积为0, 则

$$\begin{aligned} \rho_{\min} &= \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} \left[x(n) + \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-k) \right] x(n) \\ &= C_{xx}(0, 0) + \sum_{k=1}^p a_p(k)C_{xx}(0, k) \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

式(3.3.38)中使用的观测数据均已得到, 不需要在数据两端补充零点, 因此与自相关法相比去掉了加窗处理的不合理假设。

将式(3.3.36)和式(3.3.38)合并可得

$$\begin{bmatrix} C_{xx}(0, 0) & C_{xx}(0, 1) & \cdots & C_{xx}(0, p) \\ C_{xx}(1, 0) & C_{xx}(1, 1) & \cdots & C_{xx}(1, p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{xx}(p, 0) & C_{xx}(p, 1) & \cdots & C_{xx}(p, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_p(1) \\ \vdots \\ a_p(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{\min} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.39)$$

协方差矩阵具备对称性, 即 $C_{xx}(i, j) = C_{xx}(j, i)$, 但不具备 Topelitz 性质(任一条平行于主对角线的直线上的元素相同), 无法采用递推算法计算, 可用乔里斯基(Cholesky)分解法求解上述方程组。该方法适用于非平稳信号, 一些实验结果说明它的分辨率优于自相关法。对于纯正弦信号数据, 可以有效地估计正弦信号的频率。但用协方差法估计出的极点不能保证在单位圆内。

MATLAB 中的 Signal Processing Toolbox 提供了用协方差法进行 AR 模型参数估计的函数:

$$[a, e] = \text{arcov}(x, p)$$

其中, x 为输入数据向量; p 为模型阶数; a 为估计的 AR 模型系数; e 为预测误差功率。

3.3.6 改进协方差法

Burg 算法不需要使用自相关函数,所以性能优于自相关法。但是 Burg 算法的递推过程依然受到莱文森-杜宾递推关系的约束。为了克服 Burg 递推算法的缺点,克莱顿 (Clayton) 等提出了改进算法,这种算法摆脱了莱文森-杜宾递推算法对确定模型系数的约束,让模型每个系数的确定都与前向和后向预测误差平均功率最小联系起来。

用 ϵ 表示 p 阶前、后向预测误差功率之和:

$$\epsilon = \epsilon^f + \epsilon^b = \sum_{n=p}^{N-1} [f_p^2(n) + b_p^2(n)]$$

将式(3.3.25)和式(3.3.28)代入上式,得

$$\epsilon = \sum_{n=p}^{N-1} \left\{ \left[x(n) + \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-k) \right]^2 + \left[x(n-p) + \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-p+k) \right]^2 \right\}$$

令 $\frac{\partial \epsilon}{\partial a_p(k)} = 0, k=1, 2, \dots, p$, 且 $a_p(0)=1$, 推导可得以下正则方程:

$$\begin{bmatrix} C_{xx}(0,0) & C_{xx}(0,1) & \cdots & C_{xx}(0,p) \\ C_{xx}(1,0) & C_{xx}(1,1) & \cdots & C_{xx}(1,p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{xx}(p,0) & C_{xx}(p,1) & \cdots & C_{xx}(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_p(1) \\ \vdots \\ a_p(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{\min} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.40)$$

该方法虽与协方差法的形式相同,但数据量增加了一倍,对处理长度较短数据有利。

改进协方差法的正则方程不能采用莱文森-杜宾算法来求解,可以采用乔里斯基分解法。设有线性方程组

$$Ax = b$$

式中, A 为正定矩阵; x, b 为列向量。为求得 x , 可将 A 分解为两个三角矩阵的乘积,即

$$A = LU$$

式中, L, U 分别为下三角矩阵和上三角矩阵。于是有

$$LUx = b$$

或

$$Ux = L^{-1}b$$

令 $Ux = L^{-1}b = y$, 由 $Ly = b$ 可以解出 y , 再由 $Ux = y$ 可以解出 x 。

MATLAB 中的 Signal Processing Toolbox 提供了用改进协方差法进行 AR 模型参数估计的函数:

$$[a, e] = \text{armcov}(x, p)$$

其中, x 为输入数据向量; p 为模型阶数; a 为估计的 AR 模型系数; e 为预测误差功率。

至此,本节讨论了 4 种求 AR 参数的方法,几种方法的比较如表 3.3.1 所示。其中,自相关法(尤尔-沃克法)、Burg 算法和改进协方差法是求 AR 模型参数的 3 种常用方法。

表 3.3.1 几种 AR 模型现代谱估计方法比较

算法	最优准则	数据开窗	AR 参数	算法特点
自相关法	使前向预测误差功率相对 AR 参数 a_i 最小	自相关法	将反射系数代入莱文森关系式求解	需先估计自相关函数序列, 可以用莱文森递推算法, 运算量小, 但分辨率受窗长度的限制
Burg 算法	使前、后向预测误差平均功率相对各阶反射系数最小	协方差法	将反射系数代入莱文森关系式求解	系统具有稳定性。可用改进的莱文森递推算法, 分辨率高, 但对正弦信号存在谱线分裂和偏移现象
协方差法	使前向预测误差功率相对 AR 参数 a_i 最小	协方差法	直接求 AR 参数, 不经过莱文森关系式	去除了自相关法加窗处理的不合理假设, 分辨率高, 运算量较大。且系统会出现不稳定
改进协方差法	使前、后向预测误差平均功率相对 AR 参数 a_i 最小	协方差法	直接求 AR 参数, 不经过莱文森关系式	分辨率高, 在谱线分裂和偏移上较 Burg 算法有较大改善, 但参数求解较复杂, 运算量大

例 3-6 已知信号的 4 个样值为 $x(n) = \{2, 4, 1, 3\}$, 试用自相关法、协方差法、Burg 法估计 AR(1) 模型参数。记 $a_{11} = a_1(p)$ 。

解 (1) 自相关法。

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 |e(n)|^2$$

$$e(n) = x(n) + a_{11}x(n-1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_{11}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^4 e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial a_{11}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^4 e(n)x(n-1) = 0$$

$$2(4 + 2a_{11}) + 4(1 + 4a_{11}) + (3 + a_{11}) + 9a_{11} = 0 \Rightarrow a_{11} = -0.5$$

(2) 协方差法。

$$\rho = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} |e(n)|^2 = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 |e(n)|^2$$

$$e(n) = x(n) + a_{11}x(n-1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_{11}} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^3 e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial a_{11}} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^3 e(n)x(n-1) = 0$$

$$2(4 + 2a_{11}) + 4(1 + 4a_{11}) + (3 + a_{11}) = 0 \Rightarrow a_{11} = -0.714$$

(3) Burg 法。

$$a_{11} = k_1 = - \frac{2 \sum_{n=p}^{N-1} [f_{m-1}(n)b_{m-1}(n-1)]}{\sum_{n=p}^{N-1} [f_{m-1}^2(n) + b_{m-1}^2(n-1)]} = - \frac{2 \sum_{n=1}^3 [x(n)x(n-1)]}{\sum_{n=1}^3 [x^2(n) + x^2(n-1)]}$$

$$= - \frac{2(8 + 4 + 3)}{16 + 9 + 1 + 16 + 4 + 1} = -0.638$$

3.3.7 AR 模型阶的确定

在 AR 信号建模过程中, 确定模型阶数是至关重要的。如果选用的模型阶数太小, 估计

的谱将被平滑,因而谱分辨率较差;而若选用的模型阶数太大,则可能会产生伪峰,或导致谱线分裂。为了直观确定 AR 模型阶次,可不断增加模型的阶次,同时观察预测误差功率,当其下降到最小时,对应的阶次可选定为模型的阶次。但该方法的问题是,预测误差功率是模型阶数 p 的单调非增函数,很难确定 σ_m^2 降到什么程度才合适。另外,随着模型阶数的增加,模型参数的数量也会增加,由于虚假谱峰的出现,谱估计的方差会变大,因此,也不能简单依靠观察预测误差功率的下降来确定模型的阶。为此,人们提出了几种不同的误差准则作为确定模型阶数的依据,这些有代表性的 AR 模型定阶准则包括如下几种。

(1) 最终预测误差(Final Prediction Error, FPE)准则。

由 Akaike 于 1970 年提出,使预测误差函数

$$\text{FPE}(m) = \frac{N+m}{N-m} \hat{\sigma}_m^2$$

取最小值的 m 确定为 AR 模型的阶数。式中, $\hat{\sigma}_m^2$ 为 m 阶预测误差信号的方差估值。该准则的实际应用表明,虽然对于 AR 过程效果良好,但是在处理地球物理数据时,一般认为这一准则确定的阶数偏低。

(2) 赤池信息准则(Akaike Information Criterion, AIC)。

由 Akaike 于 1974 年提出,把能使信息函数

$$\text{AIC}(m) = N \ln \hat{\sigma}_m^2 + 2m$$

取最小值的 m 确定为 AR 模型的阶数。

(3) 自回归传递函数准则(Criterion Autoregressive Transfer Function, CAT)。

由 Parzen 于 1977 年提出,其准则函数定义为

$$\text{CAT}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^m \frac{N-k}{N \hat{\sigma}_k^2} - \frac{N-m}{N \hat{\sigma}_m^2}$$

使该准则取最小值的 m 即为 AR 模型的阶数。

采用 FPE、AIC、CAT 估计 AR 模型的阶数时,所得到的谱估计结果并无多大区别,对于短数据,以上准则都不甚理想。在实际运用这些准则时,还应参照实验结果对模型的阶数进行适当调整。

3.3.8 MATLAB 实现

例 3-7 假设一个估计 AR(4) 模型,其系统函数的极点为

$$z_{1,2} = 0.95e^{\pm j0.35\pi}, \quad z_{3,4} = 0.95e^{\pm j0.3\pi}$$

$w(n)$ 是均值为 0、方差为 1 的白噪声序列,试分别用自相关法、协方差法、改进协方差法和 Burg 算法,估计该随机信号的功率谱。

解 MATLAB 程序如下:

```
p = 4; N = 256; M = 512; w = randn(N, 1);
a = conv([1, -2 * cos(0.35 * pi) * 0.95, 0.95 * 0.95], [1, -2 * cos(0.30 * pi) * 0.95, 0.95 * 0.95]);
b = 1;
x = filter(b, a, w);
% 实际 PSD
S = 20 * log10(abs(freqz(b, a, M))); f = [0:M-1]/(M-1);
% Yule-Walker
[a1, e1] = aryule(x, p); S_yule = 20 * log10(abs(freqz(1, a1, M))) + 10 * log10(e1);
```

```

% Burg
[a2,e2] = arburg(x,p);S_burg = 20 * log10(abs(freqz(1,a2,M))) + 10 * log10(e2);
% 协方差法
[a3,e3] = arcov(x,p);S_cov = 20 * log10(abs(freqz(1,a3,M))) + 10 * log10(e3);
% 改进协方差法
[a4,e4] = armcov(x,p);S_modified = 20 * log10(abs(freqz(1,a4,M))) + 10 * log10(e4);
% 绘图
subplot(2,2,1);plot(f,S,'r--',f,S_yule,'b',f,S_burg,'k',f,S_cov,'b',f,S_modified,'b'); grid
on;
ylabel('幅度(dB)');xlabel('\omega/\pi');legend('真实 PSD','尤尔-沃克');
subplot(2,2,2);plot(f,S,'r--',f,S_burg,'b'); grid on;
ylabel('幅度(dB)');xlabel('\omega/\pi');legend('真实 PSD','Burg');
subplot(2,2,3);plot(f,S,'r--',f,S_cov,'b');grid on;ylabel('幅度(dB)');xlabel('\omega/\pi');
legend('真实 PSD','协方差');
subplot(2,2,4);plot(f,S,'r--',f,S_modified,'b');grid on;ylabel('幅度(dB)');xlabel('\omega/
\pi');
legend('真实 PSD','改进协方差');

```

4 种 AR 模型谱估计一次实验结果如图 3.3.8 所示,由图可见,自相关法的参数估计误差最大。此外,参数估计的实验结果具有随机性,引用一次实验结果给出结论还不够合适。

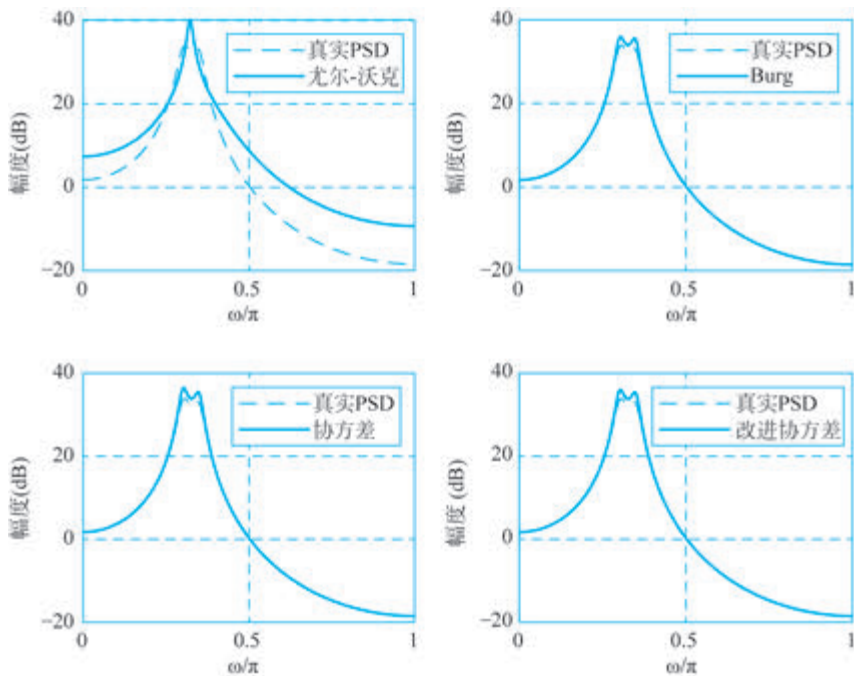


图 3.3.8 4 种 AR 模型谱估计一次实验结果

3.4 MA 模型法谱估计

MA 模型法谱估计以全零点模型为基础,用其估计窄带谱时得不到高分辨率谱,但用于 MA 随机过程时,由于 MA 随机过程的功率谱本身具有由零点引起的宽峰窄谷特点,故能得到精确估计。

q 阶 MA 模型的系统函数为

$$H(z) = 1 + \sum_{r=1}^q b_r z^{-r} \quad (3.4.1)$$

相应差分方程为

$$x(n) = w(n) + \sum_{r=1}^q b_r w(n-r) \quad (3.4.2)$$

自相关函数为

$$\begin{aligned} R_x(m) &= E[x(n)x(n-m)] = E\left\{\left[w(n) + \sum_{r=1}^q b_r w(n-r)\right]x(n-m)\right\} \\ &= E[w(n)x(n-m)] + \sum_{r=1}^q b_r E[w(n-r)x(n-m)] \\ &= \sum_{r=0}^q b_r E[w(n-r)x(n-m)] \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

对于式(3.4.3)的结果,可分为以下两种情况进行讨论。

(1) 当 $m > q$ 时,对 $r=0,1,\dots,q$,有 $n-r > n-m$,所以 $w(n-r)$ 是 $(n-m)$ 时刻之后的输入。对因果系统, $x(n-m)$ 取决于 $(n-m)$ 时刻及以前的输入,与 $(n-m)$ 时刻之后的输入无关。故 $w(n-r)$ 与 $x(n-m)$ 无关,有

$$E[w(n-r)x(n-m)] = E[w(n-r)]E[x(n-m)] = 0$$

此时

$$R_x(m) = 0 \quad (3.4.4)$$

(2) 当 $m \leq q$ 时

$$\begin{aligned} E[w(n-r)x(n-m)] &= E\left\{w(n-r)\left[\sum_{k=0}^{\infty} h(k)w(n-m-k)\right]\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)E[w(n-r)w(n-m-k)] \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

$w(n)$ 是均值为 0、方差为 σ_w^2 的白噪声序列,其功率谱 $S_w(e^{j\omega}) = \sigma_w^2$ 。根据维纳-辛钦定理,白噪声的自相关函数为

$$R_x(m) = E[w(n)w(n-m)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_w(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \sigma_w^2 \delta(m)$$

因此

$$E[w(n-r)w(n-m-k)] = \sigma_w^2 \delta(r-m-k)$$

这样

$$E[w(n-r)x(n-m)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \sigma_w^2 \delta(r-m-k) = \sigma_w^2 h(r-m)$$

所以有

$$\sum_{r=0}^q b_r E[w(n-r)x(n-m)] = \sigma_w^2 \sum_{r=0}^q b_r h(r-m) \quad (3.4.6)$$

对因果系统,当 $r-m < 0$ 时,恒有 $h(r-m) = 0$,所以式(3.4.6)可以写成

$$\sum_{r=0}^q b_r E[\omega(n-r)x(n-m)] = \sigma_w^2 \sum_{r=m}^q b_r h(r-m) \quad (3.4.7)$$

令 $r-m=k$, 式(3.4.7)变为

$$\sum_{i=0}^q b_r E[\omega(n-r)x(n-m)] = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h(k) \quad (3.4.8)$$

将式(3.4.8)代入式(3.4.3), 可得

$$R_x(m) = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h(k) \quad (3.4.9)$$

又

$$H(z) = \sum_{r=1}^q h(r) z^{-r} \quad (3.4.10)$$

对比式(3.4.10)和式(3.4.1), 可以看出, 对于 MA 模型

$$h(r) = b_r$$

记 $b(r) = b_r$, 则式(3.4.9)变为

$$R_x(m) = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b(k)b(k+m) \quad (3.4.11)$$

综合上面两种情况得到的式(3.4.4)和式(3.4.11)可得到以下 MA(q) 过程的正则方程

$$R_x(m) = \begin{cases} 0, & m > q \\ \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b(k)b(k+m), & m = 0, 1, \dots, q \end{cases} \quad (3.4.12)$$

由式(3.4.12)可以看出, 自相关与模型系数的关系是非线性的, 所以 MA 模型系数的求解要比 AR 模型困难得多。一种比较有效的方法是用高阶的 AR 模型逼近 MA 模型。

3.5 ARMA 模型法谱估计

ARMA(p, q) 模型是将自回归和滑动平均过程结合起来得到的描述随机过程的模型, 其满足如下差分方程:

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{r=0}^q b_r \omega(n-r) \quad (3.5.1)$$

式中, a_1, a_2, \dots, a_p 及 b_0, b_1, \dots, b_q 为实常数; $\omega(n)$ 是均值为 0、方差为 σ_w^2 的白噪声序列, 它是整个模型的随机输入。从系统的角度来看, 这个过程也可以看成白噪声序列通过一个线性时不变系统所产生的输出。

对于 ARMA(p, q) 模型, 存在两个关键的特征多项式。

一是自回归部分特征多项式:

$$A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_p z^{-p}$$

这个过程的平稳性取决于其特征方程 $A(z) = 0$ 的根(即极点)的位置。只有当模型的 p 个极点都在单位圆内时, AR(p) 过程才具有渐进稳定的特性, 从而平稳的。从直观上理解, 极点在单位圆内意味着随着时间的推移, 过去的影响会逐渐衰减, 不会导致信号无限增长或

无规律波动。

二是滑动平均部分的特征多项式：

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_q z^{-q}$$

这个过程总是平稳的。对于 MA(q) 过程 $x(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + \cdots + b_q w(n-q)$ ，其均值 $E[x(n)] = 0$ ，这是因为白噪声 $w(n)$ 的均值为零，而线性组合的均值等于各分量均值的线性组合。方差 $\text{Var}[x(n)] = \sigma_w^2 \sum_{r=0}^q b_r^2$ ，也是一个与时间 n 无关的常数。所以，MA(q) 过程在任何情况下都满足平稳性条件。

对于 ARMA(p, q) 过程，同样要求其模型的 p 个极点落在 z 平面的单位圆之内。这是因为，ARMA(p, q) 模型综合了 AR 和 MA 的特性，AR 部分的极点位置决定了整个过程的平稳性。如果极点不在单位圆内，那么模型所描述的信号将不具有平稳性，这将导致基于该模型的谱估计等操作失去意义，因为谱估计的理论基础大多建立在平稳信号的假设之上。

根据实序列自相关函数的定义以及偶对称性质，有

$$R_x(m) = R_x(-m) = E[x(n)x(n-m)] \quad (3.5.2)$$

将式(3.5.1)代入式(3.5.2)，得

$$\begin{aligned} R_x(m) &= E\left[\left(-\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{r=0}^q b_r w(n-r)\right)x(n-m)\right] \\ &= -\sum_{k=1}^p a_k E[x(n-k)x(n-m)] + \sum_{r=0}^q b_r E[w(n-r)x(n-m)] \\ &= -\sum_{k=1}^p a_k R_x(k-m) + \sum_{r=0}^q b_r E[w(n-r)x(n-m)] \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

与 MA 模型类似，对于式(3.5.3)的结果，同样分以下两种情况进行讨论。

(1) 当 $m > q$ 时，对 $r=0, 1, \dots, q$ ，由于 $w(n-r)$ 与 $x(n-m)$ 无关，有

$$E[w(n-r)x(n-m)] = E[w(n-r)]E[x(n-m)] = 0$$

因此

$$R_x(m) = -\sum_{k=1}^p a_k R_x(k-m) \quad (3.5.4)$$

(2) 当 $m \leq q$ 时

$$E[w(n-r)x(n-m)] = E\left\{w(n-r)\left[\sum_{k=0}^{\infty} h(k)w(n-m-k)\right]\right\} = \sigma_w^2 h(r-m) \quad (3.5.5)$$

所以有

$$\sum_{r=0}^q b_r E[w(n-r)x(n-m)] = \sigma_w^2 \sum_{r=0}^q b_r h(r-m) \quad (3.5.6)$$

对因果系统，当 $r-m < 0$ 时，恒有 $h(r-m) = 0$ ，所以式(3.5.6)可以写成

$$\sum_{r=0}^q b_r E[w(n-r)x(n-m)] = \sigma_w^2 \sum_{r=m}^q b_r h(r-m) \quad (3.5.7)$$

令 $r-m = k$ ，式(3.5.7)变为

$$\sum_{i=0}^q b_i E[\omega(n-r)x(n-m)] = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h(k) \quad (3.5.8)$$

将式(3.5.8)代入式(3.5.3),可得

$$R_x(m) = -\sum_{k=1}^p a_k R_x(k-m) + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h(k) \quad (3.5.9)$$

综合上面两种情况得到的式(3.5.4)和式(3.5.9)可得到以下 ARMA(p, q)过程的正则方程

$$R_x(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k R_x(k-m), & m > q \\ -\sum_{k=1}^p a_k R_x(k-m) + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h(k), & m = 0, 1, \dots, q \end{cases} \quad (3.5.10)$$

ARMA(p, q)过程的自相关函数与模型参数之间也是高度非线性关系,这种非线性关系使得 ARMA 模型在描述复杂信号时具有很强的适应性,但同时也增加了模型分析和参数估计的难度。

从式(3.5.10)给出的 ARMA(p, q)正则方程可以看出以下特点。

(1) 当 $m > q$ 时,也就是自相关序列的变量取值 m 高于 MA 的阶数 q 时:

$$R_x(m) = -\sum_{k=1}^p a_k R_x(k-m)$$

即自相关序列呈自回归关系,回归系数就是 AR 参数,回归阶数也是 AR 阶数。

(2) 当 $q=0$ 时,对于 $m=0$,此时:

$$\sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h(k) = b_0 h(0)$$

由 Z 变换的初值定理,有

$$h(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=0}^q b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} = b_0 = 1$$

此时式(3.5.10)变为

$$R_x(m) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^p a_i R_x(i-m), & m = 1, 2, \dots, p \\ -\sum_{i=1}^p a_i R_x(i) + \sigma_w^2, & m = 0 \end{cases} \quad (3.5.11)$$

式(3.5.11)即为 AR 模型的尤尔-沃克方程。

ARMA(p, q)过程的功率谱密度 $S_{\text{ARMA}}(\omega)$ 可以通过以下公式计算:

$$S_{\text{ARMA}}(\omega) = \sigma_w^2 \left| \frac{B(e^{-j\omega})}{A(e^{-j\omega})} \right|^2$$

或者写成另一种形式:

$$S_{\text{ARMA}}(\omega) = \sigma_w^2 \frac{\left| \sum_{r=0}^q b_r e^{-j\omega r} \right|^2}{\left| \sum_{k=0}^p a_k e^{-j\omega k} \right|^2}$$

3.6 基于谐波模型的频率估计



视频讲解

零极点模型假设随机过程为白噪声激励线性时不变系统的输出,然而在语音信号共振峰估计、雷达中移动目标检测、阵列信号处理中到达角估计等许多应用中,感兴趣的是包含在白噪声中的复正弦信号估计问题。复指数信号估计的频率是频谱中的峰值频率,非参数法谱估计可以从谱峰的位置来估计复指数信号的频率,但没有考虑噪声叠加复指数信号的模型,缺少对先验信息的利用。因此,本节从描述谐波信号的模型出发,导出以向量方法表示的信号模型,然后从噪声中复指数信号相关矩阵的特征值分解入手,利用复正弦信号与相关矩阵特征值及特征向量的关系,得到信号频率的估计。

3.6.1 谐波模型

设有 M 个复正弦信号 $s_i(n) = A_{ci} e^{j\omega_i n} = A_i e^{j(\omega_i n + \phi_i)}$, 它们与加性白噪声构成一个平稳随机过程,其一次实现的 N 个样本为

$$x(n) = \sum_{i=1}^M s_i(n) + v(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.6.1)$$

式中,复指数的振幅 $A_{ci} = |A_{ci}| e^{j\phi_i} = A_i e^{j\phi_i}$, ϕ_i 是在 $[0 \sim 2\pi)$ 内均匀分布的随机变量,正弦波振幅 A_i 、频率 ω_i 是待估计的未知常量; $v(n)$ 是均值为 0、方差为 σ_v^2 的加性白噪声,且与信号独立。实际应用中选择 $N > M$ 。

具有随机相位的复正弦波 $s_i(n)$ 称为复数谐波过程,其自相关为

$$\begin{aligned} R_{s_i}(m) &= E[s_i(n)s_i^*(n-m)] = E[A_i e^{j(\omega_i n + \phi_i)} A_i^* e^{-j(\omega_i(n-m) + \phi_i)}] \\ &= E[|A_i|^2 e^{j\omega_i m}] = |A_i|^2 e^{j\omega_i m} \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

将 N 维随机信号 $x(n)$ 用向量 \mathbf{x} 表示, $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$, 随机信号向量的自相关矩阵定义为信号向量外积的期望值,即

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = E \begin{bmatrix} x(0)x^*(0) & x(0)x^*(1) & \cdots & x(0)x^*(N-1) \\ x(1)x^*(0) & x(1)x^*(1) & \cdots & x(1)x^*(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-1)x^*(0) & x(N-1)x^*(1) & \cdots & x(N-1)x^*(N-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(-1) & \cdots & R_x(-N+1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \cdots & R_x(-N+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(N-1) & R_x(N-2) & \cdots & R_x(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

令 $\mathbf{s}_i = [s_i(0), s_i(1), \dots, s_i(N-1)]^T$ 是由复正弦波 $s_i(n)$ 的 N 个取样值构成

的向量,则 s_i 可写为

$$s_i = A_{ci} e_i \quad (3.6.4)$$

式中, $e_i = [1, e^{j\omega_i}, \dots, e^{j(N-1)\omega_i}]^T$ 称为信号向量,它表示第 i 个正弦波的频率信息。信号 s_i 的自相关矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{s_i} &= E[s_i s_i^H] = \begin{bmatrix} R_{s_i}(0) & R_{s_i}(-1) & \cdots & R_{s_i}(-N+1) \\ R_{s_i}(1) & R_{s_i}(0) & \cdots & R_{s_i}(-N+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{s_i}(N-1) & R_{s_i}(N-2) & \cdots & R_{s_i}(0) \end{bmatrix} \\ &= |A_{ci}|^2 \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega_i} & \cdots & e^{-j(N-1)\omega_i} \\ e^{j\omega_i} & 1 & \cdots & e^{-j(N-2)\omega_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(N-1)\omega_i} & e^{j(N-2)\omega_i} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A_{ci}|^2 e_i e_i^H = P_i e_i e_i^H \quad (3.6.5) \end{aligned}$$

式中, $P_i = |A_{ci}|^2$ 是第 i 个复正弦的功率。

令 \mathbf{v} 是由白噪声 $v(n)$ 的 N 个取样值构成的向量, $\mathbf{v} = [v(0), v(1), \dots, v(N-1)]^T$, 则

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^M s_i + \mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{v}$$

\mathbf{x} 的自相关矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = E[(\mathbf{s} + \mathbf{v})(\mathbf{s}^H + \mathbf{v}^H)] = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] + E[\mathbf{v}\mathbf{v}^H] = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_v \\ &= \sum_{i=1}^M P_i e_i e_i^H + \sigma_v^2 \mathbf{I} \quad (3.6.6) \end{aligned}$$

信号自相关矩阵 \mathbf{R}_s 和噪声自相关矩阵 \mathbf{R}_v 都是 $N \times N$ 维方阵,秩分别为 M 和 N 。信号自相关矩阵 \mathbf{R}_s 满足埃尔米特性质(即共轭转置等于自身),为 N 阶对称矩阵,其必有正交矩阵 \mathbf{V} , $\mathbf{V}^H = \mathbf{V}^{-1}$,使得

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_s \mathbf{V} = \mathbf{V}^H \mathbf{R}_s \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda} \quad (3.6.7)$$

式中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ 为 \mathbf{R}_s 的特征值,且特征值按降序排列, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$; $\mathbf{\Lambda}$ 是以 \mathbf{R}_s 的 N 个特征值作为主对角线元素的 $N \times N$ 维对角阵, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$; \mathbf{V} 是 N 个特征值所对应的特征向量 \mathbf{v}_i 构成的特征向量矩阵, $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N]$ 。 N 个特征向量之间是正交的,即

$$\mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

利用 $\mathbf{V}^H = \mathbf{V}^{-1}$,由式(3.6.7)可得

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N]^H = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (3.6.8)$$

式(3.6.8)称为信号自相关矩阵 \mathbf{R}_s 的特征值分解。

由于 \mathbf{R}_s 的秩 $M < N$, 故 \mathbf{R}_s 的 N 个特征值中只有 M 个特征值非零, 其余 $(N-M)$ 个特征值必为 0。因此

$$\mathbf{R}_s = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (3.6.9)$$

特征向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M$ 称为主特征向量, 对应的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$, 其余 $N-M$ 个零特征值对应的特征向量为 $\mathbf{v}_{M+1}, \mathbf{v}_{M+2}, \dots, \mathbf{v}_N$ 。

主特征向量 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M\}$ 张成的子空间与信号向量 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_M\}$ 张成的子空间相同。对于子空间 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M\}$ 中任意向量 \mathbf{y} , 其可以表示为主特征向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M$ 的线性组合, 即

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^M a_j \mathbf{v}_j \quad (3.6.10)$$

根据信号自相关矩阵 $\mathbf{R}_s = \sum_{i=1}^M P_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H$ 以及特征值与特征向量满足的方程 $\mathbf{R}_s \mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$, 可得

$$\sum_{i=1}^M P_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \cdot \mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (3.6.11)$$

或

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^M \frac{P_i}{\lambda_j} \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_i^H \mathbf{v}_j), \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (3.6.12)$$

由于 $\mathbf{e}_i^H \mathbf{v}_j$ 乘积结果为一具体数值, 与向量 \mathbf{e}_i 交换顺序不会影响最终结果, 因此

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^M \frac{P_i}{\lambda_j} (\mathbf{e}_i^H \mathbf{v}_j) \mathbf{e}_i, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (3.6.13)$$

将式(3.6.13)代入式(3.6.10), 得

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^M a_j \sum_{i=1}^M \frac{P_i}{\lambda_j} (\mathbf{e}_i^H \mathbf{v}_j) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^M \left[\sum_{j=1}^M \frac{a_j P_i}{\lambda_j} (\mathbf{e}_i^H \mathbf{v}_j) \right] \mathbf{e}_i \quad (3.6.14)$$

即主特征向量张成的子空间 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M\}$ 中任意向量 \mathbf{y} 可以表示为信号向量 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_M\}$ 的线性组合。反之, 也可将信号向量张成的子空间中任意向量表示成主特征向量的线性组合。由于主特征向量与信号向量张成相同的子空间, 因此将主特征向量张成的空间叫作信号子空间。

对于单位矩阵 \mathbf{I} , 其 N 个特征值 $\lambda_i = 1$, 因此任何向量都可以作为单位矩阵对应特征值为 1 的特征向量, 不妨选择信号自相关矩阵 \mathbf{R}_s 的特征向量 $\mathbf{v}_i (i=1, 2, \dots, N)$ 作为单位矩阵特征值为 1 的特征向量, 这样

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (3.6.15)$$

因此, \mathbf{R}_v 可表示为

$$\mathbf{R}_v = \sigma_v^2 \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (3.6.16)$$

这样, 随机信号 \mathbf{x} 的自相关矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_v = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sigma_v^2 \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \sum_{i=1}^M (\lambda_i + \sigma_v^2) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sigma_v^2 \sum_{i=M+1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \\ &= \sum_{i=1}^N \tau_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

$$\text{式中, } \tau_i = \begin{cases} \lambda_i + \sigma_v^2, & i=1, 2, \dots, M \\ \sigma_v^2, & i=M+1, M+2, \dots, N \end{cases}$$

\mathbf{R}_x 的 N 个特征值中, 仅有 M 个特征值 $\tau_i = \lambda_i + \sigma_v^2$ ($i=1, 2, \dots, M$) 与信号有关, 它们包含信号和噪声二者的功率, 其余 $N-M$ 个特征值 $\tau_i = \sigma_v^2$ ($i=M+1, M+2, \dots, N$) 仅与噪声有关。将由主特征向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M$ 张成的子空间称为信号子空间, 其维数为 M , 记为

$$\mathbf{E}_S = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M\}$$

而由 $\mathbf{v}_{M+1}, \mathbf{v}_{M+2}, \dots, \mathbf{v}_N$ 所张的空间称为噪声子空间, 其维数为 $N-M$, 记为

$$\mathbf{E}_N = \text{span}\{\mathbf{v}_{M+1}, \mathbf{v}_{M+2}, \dots, \mathbf{v}_N\}$$

\mathbf{E}_S 既与信号有关, 又与噪声有关, 而 \mathbf{E}_N 仅与噪声有关, 且这两个子空间互为正交补空间。由于信号子空间与信号向量张成的空间相同, 因此噪声子空间与信号向量正交, 即 $\{\mathbf{v}_{M+1}, \mathbf{v}_{M+2}, \dots, \mathbf{v}_N\} \perp \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_M\}$ 。

根据式(3.6.17)表示的自相关矩阵的特征分解, 可以得到两种频率估计方法, 一种是信号子空间频率估计, 另一种是噪声子空间频率估计。

3.6.2 Pisarenko 谐波分解法

Pisarenko 谐波分解法是一种经典的噪声子空间频率估计算法, 主要用于估计多谐波信号中的频率分量。该方法由俄罗斯数学家弗拉基米尔·皮萨连科(Vladimir Pisarenko)在20世纪70年代提出, 属于高分辨率谱估计方法之一。

假设随机信号 $x(n)$ 由 M 个复正弦信号与方差为 σ_v^2 的白噪声叠加而成, 且复正弦信号的个数 M 已知。考虑特殊情况, 即 $N=M+1$, 且随机信号 $x(n)$ 的自相关矩阵 \mathbf{R}_x 已被估计。对 $N \times N$ 的自相关矩阵 \mathbf{R}_x 进行特征分解, 得到 $M+1$ 个特征值和特征向量, 根据信号子空间和噪声子空间相关内容, 噪声子空间的维度为 1, 由最小特征值 σ_v^2 对应的特征向量张成。设这个特征向量为 \mathbf{v}_{M+1} , 则 \mathbf{v}_{M+1} 与所有信号向量正交:

$$\mathbf{R}_x \mathbf{v}_{M+1} = \sigma_v^2 \cdot \mathbf{v}_{M+1} \quad (3.6.18)$$

$$\mathbf{R}_s \mathbf{v}_{M+1} = 0 \quad (3.6.19)$$

令 $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{e}_M]$, $\mathbf{P} = \text{diag}[P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_M]$, 其中 $\mathbf{e}_i = [1, e^{j\omega_i}, \dots, e^{j(N-1)\omega_i}]^T$ 为第 i 个正弦波的频率信息, $P_i = |A_i|^2$ 为第 i 个正弦波的功率。信号自相关矩阵为

$$\mathbf{R}_s = \sum_{i=1}^M P_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H = \mathbf{E} \mathbf{P} \mathbf{E}^H \quad (3.6.20)$$

代入式(3.6.19), 有

$$\mathbf{E} \mathbf{P} \mathbf{E}^H \mathbf{v}_{M+1} = 0$$

两边左乘 \mathbf{v}_{M+1}^H , 得到

$$\mathbf{v}_{M+1}^H \mathbf{E} \mathbf{P} \mathbf{E}^H \mathbf{v}_{M+1} = (\mathbf{E}^H \mathbf{v}_{M+1})^H \mathbf{P} \mathbf{E}^H \mathbf{v}_{M+1} = 0$$

由于 \mathbf{P} 是正定的, 所以 $\mathbf{E}^H \mathbf{v}_{M+1} = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{e}_i^H \\ \vdots \\ \mathbf{e}_M^H \end{bmatrix} \mathbf{v}_{M+1} = 0$$

$$\mathbf{e}_i^H \mathbf{v}_{M+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.6.21)$$

设特征向量 $\mathbf{v}_{M+1} = [v_{M+1}(0), v_{M+1}(1), \dots, v_{M+1}(N-1)]^T$, 代入式(3.6.21)化简得

$$\sum_{n=0}^{N-1} v_{M+1}(n) e^{-j\omega_i n} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.6.22)$$

需要估计的频率 $\omega_i (i=1, 2, \dots, M)$ 是使得 $\sum_{n=0}^M v_{M+1}(n) e^{-j\omega n} = 0$ 的 ω 值 ($M=N-1$)。

令 $z = e^{-j\omega}$, 得到如下多项式方程:

$$f(z) = \sum_{n=0}^M v_{M+1}(n) z^{-n} \quad (3.6.23)$$

只要求解该多项式方程位于单位圆上的 M 个零点, 即可获得各频率信息的估计。

综上, Pisarenko 谐波分解法的计算步骤如下。

- (1) 由观测样本 $[x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ 估计样本自相关矩阵 \mathbf{R}_x 。
- (2) 对 \mathbf{R}_x 进行特征分解, 得到最小特征值 σ_v^2 及对应的特征向量 \mathbf{v}_{M+1} 。
- (3) 求 $f(z) = \sum_{n=0}^M v_{M+1}(n) z^{-n}$ 在单位圆上的零点, 确定正弦波频率 $\omega_i (i=1, 2, \dots, M)$ 。

3.6.3 MUSIC 分解

1979年, Schmidt 提出一种改进的 Pisarenko 谐波分解方法。假设随机信号 $x(n)$ 由 M 个复正弦信号与方差为 σ_v^2 的白噪声叠加而成, \mathbf{R}_x 是 $N \times N$ 的 $x(n)$ 自相关矩阵, 且 $N > M+1$ 。如果将 \mathbf{R}_x 的特征值按降序排列, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$, 而 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$ 是对应的特征向量, 则可将这些特征向量分成两类: 对应 M 个最大特征值的主特征向量和对应 $N-M$ 个最小特征值的噪声特征向量。理想情况下, 噪声特征向量对应的特征值应为 σ_v^2 , 因此可用 $N-M$ 个最小值的平均来估计白噪声方差:

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{N-M} \sum_{i=M+1}^N \lambda_i \quad (3.6.24)$$

由于信号向量与噪声子空间的各个向量都正交, 因此信号向量与噪声空间各向量的线性组合也是正交的, 参考式(3.6.21), 有

$$\mathbf{e}_i^H \left(\sum_{k=M+1}^N \alpha_k \mathbf{v}_k \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.6.25)$$

式中, $\mathbf{e}_i = [1, e^{j\omega_i}, \dots, e^{j(N-1)\omega_i}]^T$ 为信号向量, $\omega_i (i=1, 2, \dots, M)$ 为 M 个正弦信号的频率。

令 $\mathbf{e}(\omega) = [1, e^{j\omega}, \dots, e^{j(N-1)\omega}]^T$, 当 $\mathbf{e}(\omega) = \mathbf{e}(\omega_i) = \mathbf{e}_i$ 时, 对式(3.6.25)两端右乘 \mathbf{v}_k^H

和 $e(\omega_i)$, 有

$$\begin{aligned} e^H(\omega) \left(\sum_{k=M+1}^N \alpha_k \mathbf{v}_k \right) \mathbf{v}_k^H e(\omega) &= \sum_{k=M+1}^N \alpha_k e^H(\omega) \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H e(\omega) = \sum_{k=M+1}^N \alpha_k e^H(\omega) \mathbf{v}_k [e^H(\omega) \mathbf{v}_k]^H \\ &= \sum_{k=M+1}^N \alpha_k |e^H(\omega) \mathbf{v}_k|^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

且式(3.6.26)在 $\omega = \omega_i$ 处应为零。令 $\alpha_k = 1 (k = M+1, M+2, \dots, N)$, 构造如下谱估计函数:

$$\hat{P}_x(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=M+1}^N |e^H(\omega) \mathbf{v}_k|^2} \quad (3.6.27)$$

其峰值作为正弦信号频率的估计值。理论上, 当 $\omega = \omega_i$ 时, $\hat{P}_x(\omega_i) \rightarrow \infty$ 。由于 \mathbf{R}_x 存在估计误差, 信号频率向量 $e(\omega_i)$ 与噪声子空间并不严格满足正交条件, 因此式(3.6.27)的分母并不严格等于 0, 而是一个很小的值, 这样, $\hat{P}_x(\omega)$ 在 $\omega = \omega_i$ 或附近将出现一个峰值, 式(3.6.27)的 M 个最大峰对应的频率便是正弦波的频率估计。

式(3.6.27)的最大值也可以利用信号子空间特征向量来进行计算。利用 $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$, 式(3.6.27)的分母可表示为

$$\sum_{k=M+1}^N |e^H(\omega) \mathbf{v}_k|^2 = \sum_{k=M+1}^N e^H(\omega) \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H e(\omega) = e^H(\omega) \left(\mathbf{I} - \sum_{k=1}^M \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right) e(\omega) \quad (3.6.28)$$

式(3.6.27)的最大化等效于如下公式的最大化:

$$\hat{P}_x(\omega) = \sum_{k=1}^M |e^H(\omega) \mathbf{v}_k|^2 \quad (3.6.29)$$

可见, 无论是噪声子空间特征向量还是信号子空间特征向量, 都可以用来确定正弦波的频率估计。

式(3.6.27)定义的函数 $\hat{P}_x(\omega)$ 能够对多个空间信号进行识别(分类), 故这种方法称为多信号分类法(Multiple Signal Classification, MUSIC), 所得的频率估计称为 MUSIC 估计。

MUSIC 算法的基本思想是对真实自相关矩阵 \mathbf{R}_x 进行特征分解, 然后按照式(3.6.27)或式(3.6.29)寻找谱峰, 从而估计正弦波频率。在实际应用中, \mathbf{R}_x 是未知的, 但可以由其 P 次实现的观测数据来估计, 即

$$\mathbf{R}_x = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H \quad (3.6.30)$$

然后对估计的自相关矩阵进行特征分解:

$$\mathbf{R}_x = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (3.6.31)$$

根据特征值的大小, 将 N 个特征向量分解为信号子空间和噪声子空间, 在 $\omega = 0 \sim 2\pi$ 的每个细分频率点上按照式(3.6.27)或式(3.6.29)计算 $\hat{P}_x(\omega)$ 的值, 并根据谱峰位置确定正弦波的频率。一般来说, 若 $M > N - M$, 则使用式(3.6.27), 否则使用式(3.6.29)。

3.6.4 MATLAB 实现

例 3-8 随机信号 $x(n) = \cos(0.35\pi n + \varphi_1) + 0.8\cos(0.25\pi n + \varphi_2) + 0.5\cos(0.4\pi n + \varphi_3) +$

$0.5\cos(0.5\pi n + \varphi_4) + v(n)$, 其中 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ 为均匀分布的随机初始相位; $v(n)$ 是均值为 0、噪声功率为 0.01 的白噪声。利用 MUSIC 算法估计随机信号 $x(n)$ 的功率谱。

解 MATLAB 程序如下:

```

N = 64; n = 0:N-1;
noise_power = 0.01; % 噪声功率
% 生成信号
ph = 2 * pi * rand(1,4);
x = cos(0.2 * pi * n + ph(1)) + 0.8 * cos(0.25 * pi * n + ph(2)) + 0.5 * cos(0.4 * pi * n + ph(3)) +
0.5 * cos(0.5 * pi * n + ph(4)) + sqrt(noise_power/2) * randn(N);
% 参数估计
L = N - 1; % 自相关矩阵的阶数
R = (1/N) * (x' * x); % 自相关矩阵
% 特征分解
[E, D] = eig(R); % 特征值和特征向量
[d, idx] = sort(diag(D), 'descend'); % 特征值排序
E = E(:, idx); % 特征向量排序
% 估计信号子空间和噪声子空间
p = 2; % 已知信号源数
Es = E(:, 1:p); % 信号子空间
En = E(:, p+1:end); % 噪声子空间
% 频率扫描
P_music = zeros(N/2);
for k = 1:N/2
    omega = 2 * pi/N * (k-1);
    a = exp(-1i * omega * (0:L)'); % 方向向量
    P_music(k) = 1 / abs(a' * (En * En') * a); % MUSIC 谱
end
% 绘制结果
f = [0:N/2-1]/N * 2;
plot(f, 10 * log10(P_music/max(P_music)));
title('MUSIC 频谱'); xlabel('\omega/\pi'); ylabel('功率(dB)'); grid on;

```

MUSIC 方法谱估计结果如图 3.6.1 所示, 需要指出的是, 估计的实验结果具有随机性, 并不是所有实验均能准确给出 4 个峰值, 有时仅出现 2 个或 3 个峰值。

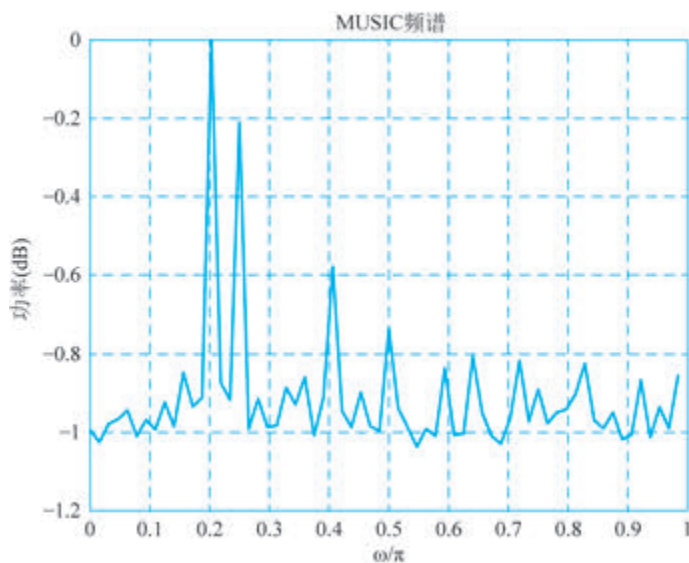


图 3.6.1 MUSIC 方法谱估计结果

3.7 功率谱估计的应用

在工程应用中,功率谱由于能给出被分析对象的能量随频率分布的情况,因而常常应用在滤波、信号识别、信号分离、系统辨识等系统中。本节给出功率谱估计在一些应用中的示例。

3.7.1 Welch 功率谱与神经网络在机械故障诊断中的应用

机械设备故障诊断是借助机械、力学、信息和人工智能等学科技术对连续运行设备的状态和故障进行监测、诊断的一门科学技术,并已迅速发展为一门新兴学科。随着工业 4.0 智能制造的到来,受人工智能、信息物理融合系统、云计算、大数据和物联网等相关技术推动,现代工业生产过程(如航空航天、矿山、设备制造、纺织等)正朝着智能、高效、集成化发展。现代工业中,机械设备具有大型化、连续化、高速化和自动化运行的特点,工业生产对设备的依赖度越来越高,企业因设备发生故障而停工造成的损失巨大,不仅维修费用大幅上升,而且可能会导致重大事故。国内外因机械设备故障失效而引起的灾难性事故屡有发生。据统计,因设备制造、安装以及运行过程中产生的质量安全缺陷而导致的事故约占全部事故的 20%。利用新的理论与方法,丰富及提高机械故障诊断技术是机械故障诊断学重要内容之一。人工智能、机器学习、大数据处理等智能感知技术与智能系统的发展,已经对传统设备故障诊断从研究方法、研究思路引入了变革。

据统计,旋转机械故障中约有 30% 是轴承故障引起的。轴承作为机械系统中的关键零部件,其健康状况直接影响到整个机械系统的稳定性和可靠性。基于机器学习、知识嵌入的轴承故障诊断中,在训练样本数据不足以及现场其他工件振动对信号产生较大干扰情况下,利用 Welch 功率谱处理振动信号,可有效降低噪声干扰并提取故障特征,是轴承故障诊断领域的一种有效方法。其基本思想是,针对工业现场初期数据收集困难以及现场环境复杂导致故障诊断准确度下降等问题,采用 Welch 算法将时域振动信号转换为功率谱信号,并结合卷积神经网络(Convolutional Neural Network, CNN)对转换后的功率谱信号进行特征学习和模式识别。这种方法不仅提高了信号处理的抗噪能力,还增强了模型对原始信号的敏感度,有效提升了模型在小样本情况下的泛化能力和在高噪声环境下的鲁棒性,从而提升了故障诊断的准确性。

本节采用西储大学(CWRU)轴承数据集来验证 Welch 功率谱结合 CNN 的故障诊断方法的有效性。CWRU 数据集包含了多种故障类型的数据,提供了不同转速下的轴承振动信号。本节选用采样率为 12kHz 的驱动端轴承数据,数据集 1、2、3、4 分别是轴承在 1HP、2HP、3HP 以及混合负载下的信号,每个数据集都包括正常轴承以及具有滚动体故障、内圈故障和外圈故障的轴承信号,每种故障直径包括 0.007inch(1inch=2.54cm)、0.014inch 和 0.021inch,共 10 种状态,数据参数如表 3.7.1 所示。

表 3.7.1 故障诊断数据

类别	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
故障点	正常	滚动体	滚动体	滚动体	内圈 滚道	内圈 滚道	内圈 滚道	外圈 滚道	外圈 滚道	外圈 滚道
缺陷尺寸(inch)	0	0.007	0.014	0.021	0.007	0.014	0.021	0.007	0.014	0.021

Welch 功率谱是一种通过数据的分段和加窗重叠形成的功率谱。Welch 方法的窗口化技术不仅提高了信号处理的抗噪能力,还增强了模型对原始信号的敏感度。这种方法保留并使用了大量的原始信息,能极大改善训练样本数据不足以及现场其他工件振动对信号的干扰所带来的问题。通过这种处理,能够更准确地捕捉到轴承故障的细微变化。在功率谱的转化过程中,首先对每个被截取到的信号按照周期图谱法进行功率谱转化,然后计算相应数据的频谱值,再根据得到的频谱值计算出每段被截取数据的周期图谱,最后进行平均叠加得到 Welch 功率谱,图 3.7.1 为 10 类轴承信号的功率谱图。

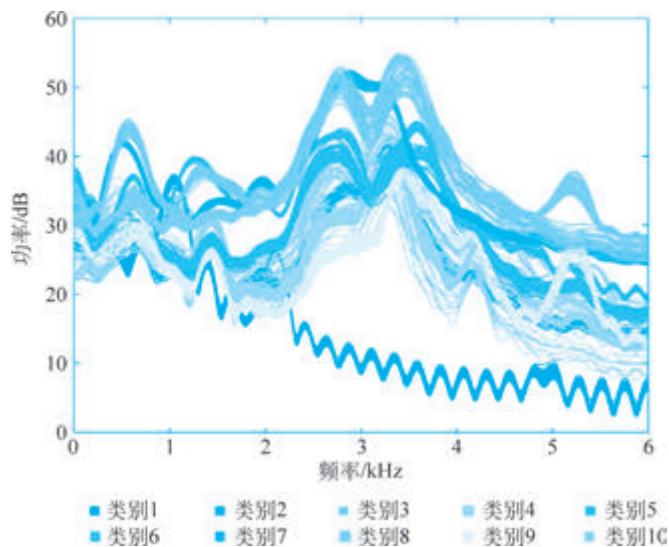


图 3.7.1 10 类轴承信号的功率谱图

卷积神经网络(CNN)是一种专门处理图像和一维时域数据的深度学习模型,通过其独特的结构,CNN 能够有效提取信号中的关键特征。其中,卷积层通过滤波器捕捉局部特征,激活层引入非线性,池化层降低特征维度并保留重要信息,全连接层则负责最终的分类任务。这些特性使得 CNN 非常适合于处理复杂的信号数据。轴承振动信号中蕴含着丰富的故障诊断信息。因此,针对 Welch 方法提取的功率谱,CNN 通过网络对功率谱信号进行处理,可实现设备故障诊断。

基于 Welch 和 CNN 模型的网络模型(WelchCNN)诊断结构如图 3.7.2 所示,其包括以下几部分。

(1) 数据预处理:输入信号使用 Welch 方法得到信号的功率谱,并进行归一化作为输入特征。

(2) 分类模型:采用包含多个卷积层、池化层以及全连接层的 CNN 模型实现状态分类。

(3) 模型训练:使用训练数据对 CNN 模型进行训练,通过反向传播算法优化模型权重,以最小化分类误差。

(4) 模型评估:使用测试集评估模型的性能,调整模型参数以提高分类准确率。

采用 WelchCNN 对 1HP、2HP、3HP 这 3 个数据集进行了状态识别,在实验中,每个数据集包含 10 种不同状态的轴承信号,在每种状态和每种载荷条件下都进行了 20 次独立的

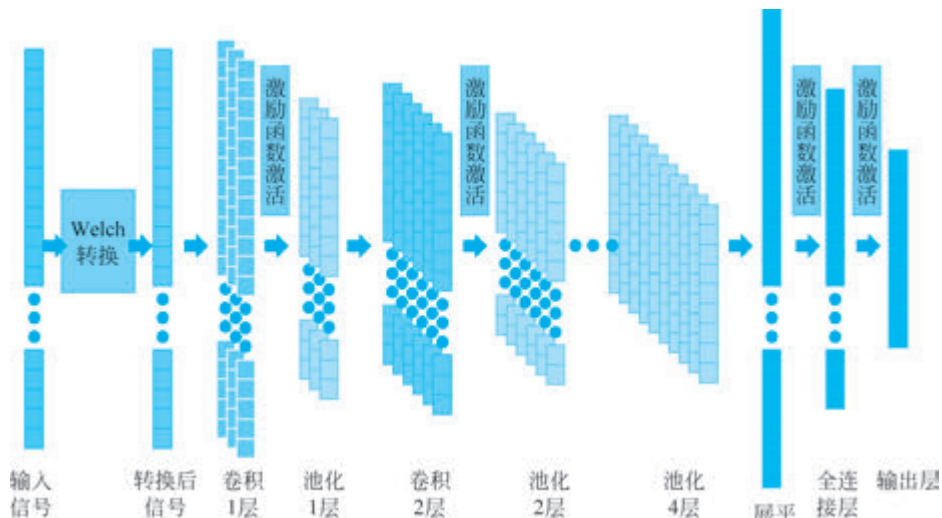


图 3.7.2 WelchCNN 模型

试验。结果显示, WelchCNN 在所有数据集上的表现都非常出色, 识别准确率达到到了 100%。这一结果表明, WelchCNN 能够有效地识别和分类不同状态的轴承信号, 显示出其在轴承故障诊断中的高精度度和可靠性。

采用 WelchCNN 在数据集 4 中, 进行了 9 种不同混合工况的研究。实验中, 将每种工况训练集的样本数量分别设置为 90、120、300、900、1500、3000、6000、12000、19800。测试集则采用数据集 4 的 2250 个测试集样本。对于每个训练集规模, 都进行了 20 次试验, 并记录了状态识别的正确率。为了验证性能, 还与仅使用 WDCNN(宽卷积深度神经网络)模型进行了对比, 小样本实验结果如表 3.7.2 所示。

表 3.7.2 小样本实验结果

训练样本数	90	120	300	900	1500	3000	6000	12000	19800
WelchCNN	99.79%	99.87%	99.99%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
WDCNN	82.07%	88.80%	97.14%	99.35%	99.72%	99.77%	99.87%	99.94%	100%

由表 3.7.2 可见, WelchCNN 在处理小样本数据方面展现出了显著的优势, 即使在训练样本数量较少的情况下, 如 90 个样本, WelchCNN 的识别准确率也达到了 99.79%, 这明显高于 WDCNN 的 82.07%。随着训练样本数量的增加, WelchCNN 的准确率稳步提升, 并在样本数量达到 900 个时, 准确率达到到了 100%, 这一表现在整个测试过程中保持不变。WelchCNN 在小样本情况下的性能尤为突出。在样本数量为 300 时, 其准确率已经非常接近 100%, 达到了 99.99%。这表明 WelchCNN 在小样本学习方面具有很好的泛化能力。

为了评估 WelchCNN 在不同信噪比(SNR)条件下的性能, 可调整 SNR 值来模拟噪声对信号的影响, 旨在模拟实际生产环境中轴承振动信号可能遇到的不同噪声水平。SNR 值越小, 原始信号被噪声干扰越严重。针对数据集 4 的振动信号, 选择了 8 种不同的 SNR 值, 分别为 10、8、6、4、2、0、-2、-4, 以此来模拟从高信噪比到低信噪比的环境, 以平均功率作为原始信号能量值的参考标准, 并与其他抗噪诊断方法进行比较, 如 DNN(深度神经网络)以及 WDCNN, 抗噪声实验结果如表 3.7.3 所示。

表 3.7.3 抗噪声实验结果

信噪比	10	8	6	4	2	0	-2	-4
WelchCNN	99.86%	99.72%	99.23%	98.13%	97.24%	94.15%	86.78%	77.71%
WCDNN	99.81%	99.83%	99.54%	98.88%	97.01%	90.51%	80.81%	66.95%
DNN	99.97%	99.00%	95.31%	84.31%	69.51%	57.14%	48.61%	41.97%

表 3.7.3 展示了 WelchCNN 在抗噪性能方面的优越性。在信噪比较高的环境中,各种故障诊断模型的诊断正确率相差无几,但随着信噪比的降低,WelchCNN 的性能优势逐渐显现。特别是在信噪比为 0 以下的情况,WelchCNN 的诊断正确率明显高于其他故障诊断方法。

Welch 方法在故障诊断信号处理中的优势显著,特别是在小样本和高噪声环境下。它通过分段加窗和平均技术,显著减少频谱泄漏,确保了即使在样本数量有限的情况下,也能获得准确的频率估计。这种方法的高频率分辨率使得它能够精细地分析频域信号,从而更准确地识别故障特征。在高噪声环境中,Welch 方法通过平均多个周期图,有效降低了噪声影响,可提供稳定的功率谱估计,这对于准确识别故障信号至关重要。此外,Welch 方法的灵活性允许根据信号特性调整窗函数和分段长度,优化故障特征的检测。计算过程的简洁性也使其在各种信号处理环境中易于实现,是小样本、高噪声环境下故障诊断的一种高效且可靠的频谱分析工具。

3.7.2 AR 功率谱估计在振动信号分析方面的应用

在滚动轴承的故障诊断中,通常将振动信号进行基于傅里叶变换的古典谱分析,并从中提取故障特征信息,再进一步判断轴承的工作状态。但古典谱估计存在缺陷:弱信号被强信号的旁瓣所淹没;频率分辨率约为数据长度的倒数,导致分辨率不高;频谱存有旁瓣,导致出现“泄漏”现象而使主瓣失真。而现代谱分析方法利用被窗函数截取的有限信号以外的信息进行预测或外推,从而避免了功率泄漏,提高了分辨率。其中,参数模型法是较为常用、有效的方法,而参数模型中最成熟和常用的就是 AR 模型。作为现代谱分析方法代表的 AR 功率谱分析方法,具有谱线光滑、谱峰尖、谱分辨率高等优点,特别适用于短序列随机信号的功率谱估计。

在 AR 功率谱估计中,模型阶次的选择是一个关键问题。阶次太低将会导致过于平滑的谱估计结果,但频率分辨率过低;而阶次太高,将会产生虚假谱峰,并且估计的方差也会增大。实验研究表明,将样本长度的均方根值 \sqrt{N} 作为滚动轴承 AR 模型的定阶上界,可得到较好的分析结果。

滚动轴承常见的故障形式有内、外圈滚动面及滚动体表面的划痕、剥落、磕伤,以及保持架的断裂等。这里以滚动轴承内圈故障的振动信号为例进行 AR 建模,估计其 AR 功率谱,进行故障分析。在轴承外圈固定的情况下,滚动轴承内圈故障特征频率为

$$f_i = \frac{1}{2} f_r \left(1 + \frac{d}{D} \cos \alpha \right) z$$

式中, f_r 为内圈的旋转频率; D 为轴承节径; d 为滚动体直径; α 为接触角; z 为滚动体个数。本试验中, $f_i = 550\text{Hz}$ 。

针对旋转机械故障特征提取问题,以干式真空泵为研究对象,将 AR 模型应用于其滚动

轴承的故障检测,针对其时域信号建立自回归模型,确定模型最佳阶次,并计算其 AR 功率谱,进而判断轴承的工作状态。

图 3.7.3 所示为干式真空泵泵体结构,该泵的转子由两组单列深沟陶瓷轴承支撑,这些轴承分别安装在泵的高真空端和低真空端。泵的入口压力维持在 2kPa,而转轴的旋转频率达到 105Hz。在泵的高真空端,安装了两款振动传感器,型号分别为 ADXL105(ADXL-HV)和 BK4370V(BK-HV),而在低真空端则安装了另一款 ADXL105(ADXL-LV)振动传感器。这些振动信号由一个采样率为 40kHz 的数据采集卡进行采集,并经过 A/D 转换器转换成数字信号,传感器记录的振动加速度数据点总计为 80000 个。

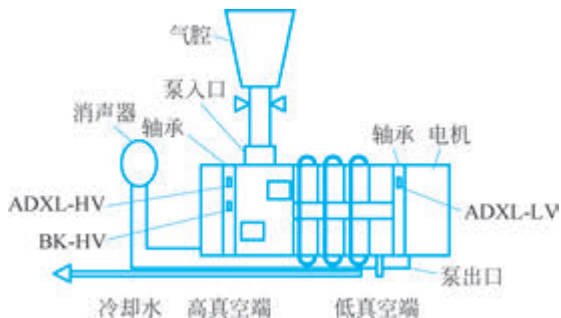


图 3.7.3 干式真空泵泵体结构

实验中,采用 3 种测试工况:正常运行的泵 1、正常运行的泵 2、引入轴承故障的泵 1。在一定的气体负载范围内(入口压力 0~100kPa),选用加速度传感器 ADXL-HV 采集正常泵 1 高真空端的无故障振动信号,得到基于 AR 模型的功率谱图,如图 3.7.4(a)所示,由此图可以看出,无故障振动信号的典型频谱含有谐波振动信号及其倍频的谱峰。采集真空泵有故障时的振动信号,得到基于 AR 模型的功率谱,如图 3.7.4(b)所示。当在一个轴承上引入故障以后,其频谱就会有显著的差别,出现了频率为 550Hz 的频峰。

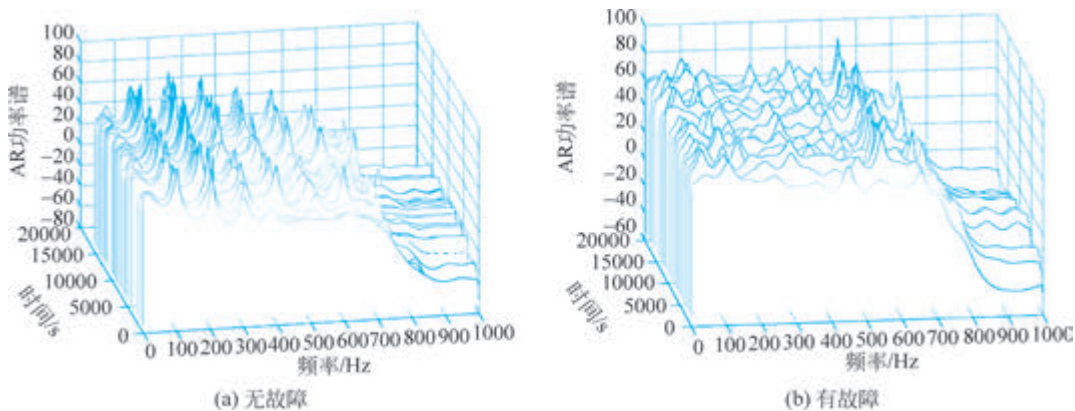


图 3.7.4 不同入口压力时无故障和有故障振动信号的功率谱图

将正常和故障状态下的三维功率谱图进行叠加,可得到一个二维对比图,如图 3.7.5 所示,从图中可以明显看出,故障时的特征频率大约为 550Hz,可初步判定为轴承内环故障。

利用加速度传感器 ADXL-LV,收集了 3 种不同工况下低真空端的振动信号,并得到相应的功率谱图。将这些功率谱经过叠加处理后,形成了二维谱图,如图 3.7.6 所示。同样

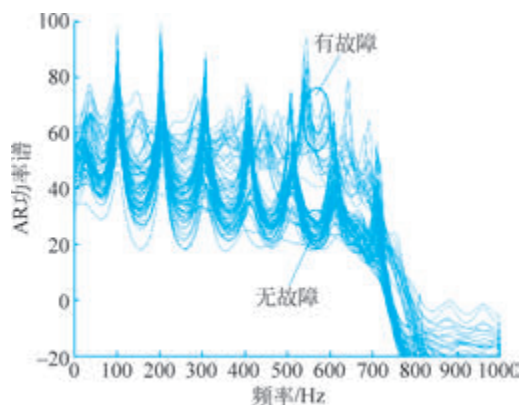


图 3.7.5 ADXL-HV 捕获的有故障与无故障功率谱的对比图

地,通过加速度传感器 BK-HV,采集了 3 种工况下高真空端的振动信号,其叠加功率谱图如图 3.7.7 所示。对比 3 种工况振动信号的基于 AR 模型的功率谱,其故障特征频率都明显出现在 550Hz 处。因此,可进一步判断故障形式为轴承内环故障。

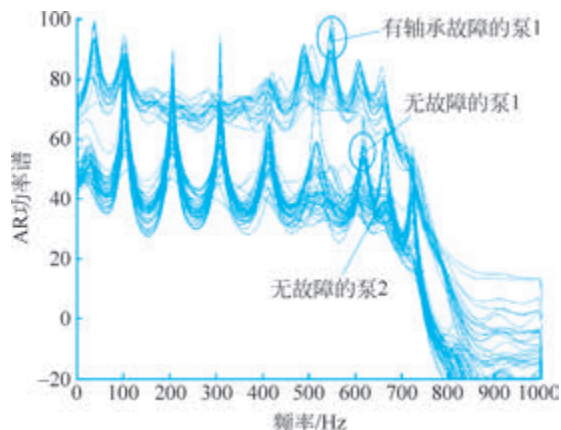


图 3.7.6 ADXL-LV 捕获的有无故障功率谱对比图

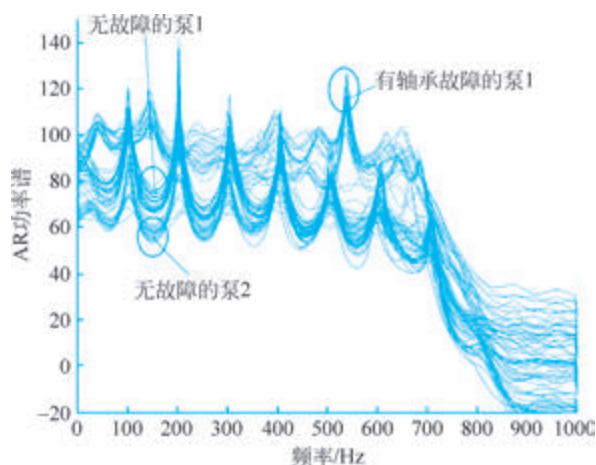


图 3.7.7 BK-HV 捕获的有无故障功率谱对比图

综上所述,AR 功率谱克服了经典功率谱谱线起伏大、频率分辨率低、谱峰定位困难的缺点。对滚动轴承振动信号进行 AR 功率谱分析是诊断滚动轴承故障非常有效的方法,该方法原理简单,编程易实现,有较好的实际工程应用价值。

3.7.3 Burg 算法在美声发音特征提取中的应用

美声唱法具有音色清脆高亢、灵活多变及音量较大等特点,演唱时需要所有腔体以及骨骼都参与共鸣,这导致美声初学者在头腔、口腔、胸腔和咬字等方式上相对于其他唱法出现的问题较多。为了更好地从声门振动和空气动力学的角度对声音信号进行分析,在对声音信号进行采集的基础上,对采集到的声音信号进行端点检测处理,去除无用的语音段,然后对处理后的信号做 Burg 法功率谱分析,并对得到的功率谱进行局部二次回归平滑处理,最后通过一个神经网络对美声发音的规范性进行系统评价。具体描述如下。

1) 声音信号样本的采集与端点检测

对若干美声初学者和美声老师进行女高音信号的采集、筛选和分类。录音时要求发音人在相同录音环境下依次清唱出基础元音,选取发声时长在 3~5s 的语音信号,并对信号进行错误分析,最终得到发音样本。

由于采集到的美声信号中存在无效的静音段和噪声段,会对功率谱分析和特征提取存在一定程度的干扰,增加运算量,因此应对声音信号进行端点检测,如采用基于短时能量和谱质心特征的端点检测算法等,确定其起点和终点,以便提高计算效率。

2) Burg 功率谱估计

将完成端点检测的信号进行 Burg 功率谱分析。再对随机信号进行 25 阶 AR 模型功率谱估计,由于 Burg 算法无须对自相关函数进行估算,而是利用已知序列 $x(n)$ 求出反射系数,再利用 Levinson 递推算法,由反射系数来计算回归模型参数,因而可以得到较好的谱估计结果。

3) 局部二次回归平滑

使用局部二次回归平滑对 Burg 法得到的功率谱进行平滑处理。局部二次回归平滑就是使用二次多项式作为局部多项式的回归拟合,是一种用于局部回归分析的非参数方法。

4) BP 神经网络分类

BP 神经网络是一种多层的前馈神经网络,由输入层、隐藏层和输出层组成。采用 BP 神经网络用于美声特征的分类,并根据样本的箱式图来区别正确与错误发声,识别率可达 100%,验证了 Burg 算法在美声发音特征提取与分类中应用的有效性。

3.7.4 MUSIC 算法在直升机空中噪声数据处理中的应用

直升机运行时会产生独特的辐射噪声,这些噪声中包含了与直升机结构(如旋翼叶片数量、转速)相关的信息。传统的频谱分析方法(如 FFT)在处理含有噪声的信号时分辨率有限,而 MUSIC 算法能更精确地提取出噪声中的频率成分,从而更有效地识别直升机的特征,例如,可用于直升机型号识别或状态监测。

直升机飞行辐射噪声可以分为两大类:一类为气动噪声,另一类为机械噪声。气动噪声包括涡流与物体相互作用产生的直升机旋翼、尾桨的旋转噪声及发动机进气排气噪声。机械噪声的产生是由于机械部件之间的撞击摩擦以及周期性相互作用。直升机噪声由宽带

连续谱和线谱组成,线谱主要由主旋翼和尾桨产生,与基频成谐波关系。一般情况下,主旋翼旋转噪声的基频在 $10\sim 30\text{Hz}$,而尾桨旋转噪声的基频在 $50\sim 100\text{Hz}$ 。使用 B&K4190 型微音器采集直升机辐射声信号,微音器置于距地面 2m 的支架上,采样率为 44.1kHz 。由于直升机声信号的特征主要分布在 400Hz 以下的频段,可选取 2s 时长的数据进行 50 倍降采样,使采样率降至 882Hz 。数据处理阶段,每组数据选取 4096 个样本点,分别采用 FFT 和 MUSIC 算法进行分析,并对两种方法的分析结果进行对比评价。

图 3.7.8 和图 3.7.9 为在直升机飞行高度为 200m 和匀速飞行水平距离大约为 1km 的条件下获取的辐射噪声数据,并对其进行 FFT 处理及 MUSIC 算法处理得到的结果。从 MUSIC 算法得到的频谱图中能够清晰地看到主旋翼的谐波线谱分别为 29.9Hz 、 59.89Hz 、 89.79Hz 、 119.9Hz 、 149.9Hz ,均近似为 29.9Hz 的整数倍。

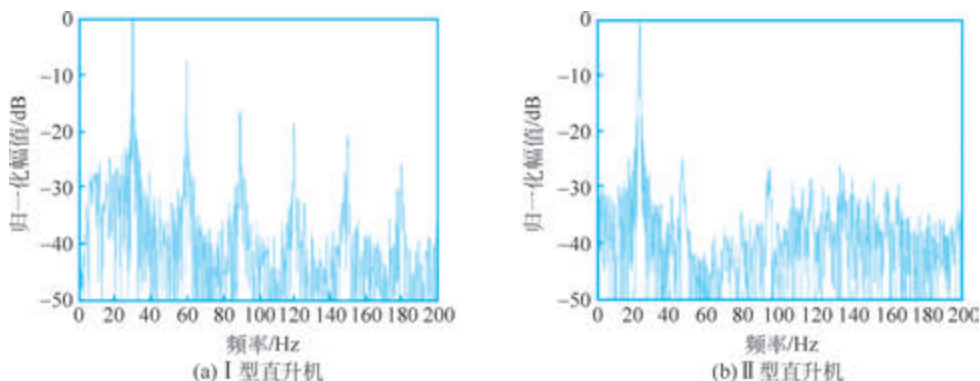


图 3.7.8 直升机辐射噪声数据 FFT 频谱分析结果

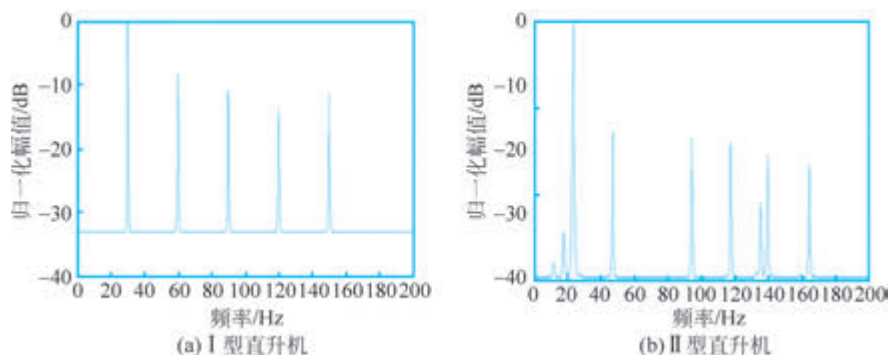


图 3.7.9 直升机辐射噪声数据 MUSIC 频谱分析结果

由图 3.7.8 和图 3.7.9 可见,利用 MUSIC 算法能够提高信号的信噪比,并能够去除较强的背景噪声。这是由于 MUSIC 算法是将实测信号进行自相关处理,对自相关函数进行特征值分解,将大特征值对应的特征向量提取出来进行分析,将小特征值对应的特征向量剔除掉,从而构造出 MUSIC 谱,最终得到了较为理想的结果。

此外, MUSIC 算法还可根据天线阵列的接收信号估计出单个或多个信号源的方位信息,具体实现时通过分解接收信号的协方差矩阵,将信号子空间和噪声子空间分离,并利用它们之间的正交性来实现信号方向的估计。

3.8 本章小结

功率谱估计是利用给定的一组样本数据估计一个平稳随机信号的功率谱密度。本章主要介绍了功率谱估计的基本方法,包括古典谱估计、模型法谱估计、基于谐波模型的谱估计,以及功率谱估计的应用等,其主要内容包括以下4方面。

(1) 古典谱估计采用传统的傅里叶分析方法,包括相关函数法和周期图法两种。相关函数法的理论基础是维纳-辛钦定理,先由获得的 N 点有限长序列 $x_N(n)$ 来估计自相关函数序列 $\hat{R}_x(m)$,然后求自相关函数的傅里叶变换得到功率谱。由于该方法求出的功率谱是通过自相关函数间接得到的,所以又称间接法或自相关法。周期图法又称直接法,它是把随机信号的 N 点观察数据 $x_N(n)$ 视为一个能量有限信号,直接求傅里叶变换,然后求幅度平方并除以 N 运算得到真实功率谱的估计。

相关函数法和周期图法在进行傅里叶变换之前都默认对无限长序列加了一个矩形窗截断,估计谱相当于真实谱与矩形窗频谱相卷积的结果。对相关函数法谱估计的改进是用窗函数对自相关函数加权后再求傅里叶变换,相当于用一个适当的窗函数频谱与相关函数法估计的功率谱进行卷积,使谱线平滑,这种改进方法称为平滑。平滑后的功率谱是无偏的,方差也变小了,但分辨率会下降。周期图法的改进则是平均,包括两种方法。一是将截取的数据段再分成 L 段,对于每段数据先利用周期图法求得其功率谱,然后计算各段功率谱估计的平均,得到平均周期图,这种方法叫 Bartlett 法;第二种方法是 Welch 法,也称为加权交叠平均法,这种方法以加窗(加权)求取平滑,以分段重叠求得平均,因此集平均与平滑的优点于一体。

(2) 实际应用中的随机过程,大多可以用有理传输函数来逼近,模型法谱估计以建立参数模型为基础,认为观察到的数据,是白噪声通过这一参数模型获得的输出。根据传输函数形式,平稳随机过程的线性模型可分为 AR 模型、MA 模型和 ARMA 模型 3 种。

AR 模型谱估计方法可归结为求解 AR 模型参数或线性预测器系数的问题。在均方误差(MSE)最小准则下建立的模型参数与相关函数的关系方程,称为 AR 模型的正则方程,也叫尤尔-沃克方程。解尤尔-沃克方程是由已知的 $(p+1)$ 个自相关函数 $R_x(m)$ 求出 p 个 a_i 和一个 σ_w^2 。对于 $(p+1)$ 元线性方程组,一般解法是矩阵求逆或高斯消元法,运算量为 $O(p^3)$ 。

莱文森-杜宾算法是求解尤尔-沃克方程的高效递推算法,它利用了自相关矩阵的对称性和托普利兹性,实现了由 $m-1$ 阶模型参数递推求出 m 阶模型参数的递推公式。用莱文森-杜宾算法求解 AR 参数的关键,是自相关函数序列的估计。为获得自相关函数的较准确估计,往往需要较多的样本数据,所以在短数据记录的情况下,用莱文森-杜宾算法求解 AR 参数效果较差。

Burg 递推算法不对已知数据两端以外的未知数据作主观臆测,并且不需要估计自相关函数,它直接由观测的数据利用线性预测器的前向和后向预测的总均方误差之和最小的准则来估计反射系数,进而通过莱文森-杜宾算法的递推公式求出 AR 模型的优化参数。由于在计算中避开了估计自相关函数,而直接从输入数据计算 AR 模型参数,所以减小了计算误差,从而改善了频率分辨率。

协方差法与自相关法相同,只利用前向预测误差功率最小求模型参数,但求预测误差功率的求和限不同,数据开窗采用协方差法。

改进协方差则是让模型每个系数的确定都与前向和后向预测误差平均功率最小联系起来,摆脱了莱文森-杜宾递推算法对确定模型系数的约束。

(3) MA 和 ARMA 模型的自相关与模型系数的关系是非线性的,所以两种模型系数的求解要比 AR 模型困难得多。一种比较有效的方法是用高阶的 AR 模型逼近 MA 或 ARMA 模型。

(4) 基于谐波模型的频率估计是从描述谐波信号的模型出发,导出以向量方法表示的信号模型,然后从噪声中复指数信号相关矩阵的特征值分解入手,利用复正弦信号与相关矩阵特征值及特征向量的关系,得到信号频率的估计。

Pisarenko 谐波分解法是一种经典的噪声子空间频率估计算法,首先由观测样本估计样本自相关矩阵 \mathbf{R}_x ,并对 \mathbf{R}_x 进行特征分解,得到最小特征值 σ_v^2 及对应的特征向量 \mathbf{v}_{M+1} ,通过求 $f(z) = \sum_{n=0}^M \mathbf{v}_{M+1}(n)z^{-n}$ 在单位圆上的零点,确定正弦波频率 $\omega_i (i=1,2,\dots,M)$ 。

MUSIC 算法是一种改进的 Pisarenko 谐波分解方法,它也是利用信号向量与噪声子空间正交的思想,将信号子空间和噪声子空间分离,然后利用噪声子空间的多个特征向量来构建谱估计函数,通过谱峰搜索,估计信号频率,从而实现对多个空间信号进行识别(分类)的目的。

3.9 习题

3-1 设随机过程 $x(n) = \sum_{i=1}^K a_i \cos(\omega_i n + \varphi_i) + w(n)$, 其中, a_i 和 ω_i 是常数, φ_i 是相互独立并在 $[0, 2\pi]$ 上服从均匀分布的随机相位, $w(n)$ 是均值为 0、方差为 σ_w^2 的白噪声。试求 $x(n)$ 的自相关函数和功率谱。

3-2 已知 $x(n)$ 满足 AR(2) 模型 $x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) = w(n)$, 其中 $w(n)$ 是均值为 0、方差为 σ_w^2 的白噪声, 试用自相关法来求系数 a_1 和 a_2 。

3-3 二阶 AR(2) 过程 $x(n)$ 的差分方程为

$$x(n) = -0.78x(n-2) + w(n)$$

其中, $w(n)$ 是均值为 0、方差为 0.5 的白噪声。

(1) 写出该随机过程的 Yule-Walker 方程;

(2) 求 $x(n)$ 的方差。

3-4 设平稳随机过程 $x(n)$ 是由零均值、方差为 1 的白噪声 $w(n)$ 激励系统函数为 $H(z)$ 的最小相位滤波器产生的, 其功率谱为

$$S_x(\omega) = \frac{1.25 + \cos\omega}{1.0625 + 0.5\cos\omega}$$

试求系统函数 $H(z)$ 。

3-5 已知平稳随机信号 $x(n)$ 的自相关函数值 $R(0) = 1, R(1) = 0.5, R(2) = 0.5, R(3) = 0.25$ 。现用三阶全极点模型(AR(3)模型)估计它的功率谱, 设模型参数 $b(0) \neq 1$,

$w(n)$ 为零均值方差为1的白噪声。试用莱文森-杜宾算法求模型参数 $a_3(1)$ 、 $a_3(2)$ 、 $a_3(3)$ 及 $b(0)$ 。

3-6 已知某自回归过程的5个观测值为 $\{1, -1, 0, -1, 1\}$ 。

(1) 利用莱文森-杜宾算法设计一个三阶AR模型,确定模型的参数;

(2) 利用Burg算法求一阶和二阶反射系数,并画出二阶预测误差滤波器的格型结构图;

(3) 求该自回归过程的功率谱估计。

3-7 已知序列 $x(n) = \{4.684, 7.247, 8.428, 8.650, 8.640, 8.392, 7.321\}$ 由模型 $x(n) = 1.7x(n-1) - 0.72x(n-2) + w(n)$ 产生,其中, $w(n)$ 是均值为0、方差为1的白噪声。试用Burg算法求AR(2)的模型参数。

3-8 一个自回归过程的5个观测值为

$$x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4$$

(1) 用莱文森-杜宾算法设计一个二阶线性预测器,计算各阶线性预测系数、预测误差功率,以及 $x(0)$ 和 $x(4)$ 的预测值 $\hat{x}(0)$ 和 $\hat{x}(4)$,并画出横向结构预测误差滤波器的框图;

(2) 用Burg算法计算各阶反射系数、预测误差功率,以及预测值 $\hat{x}(0)$ 和 $\hat{x}(4)$,并画出格型结构预测误差滤波器的框图;

(3) 对用上面两种算法求得的预测误差功率、预测值进行比较,看看哪种算法预测更准确。

3-9 随机过程 $x(n)$ 由加性白噪声和单一实正弦波组成:

$$x(n) = a \cos(\omega_0 n + \varphi) + w(n)$$

其中, a 和 ω_0 是常数且 $a > 0$, φ 是相互独立并在 $[0, 2\pi]$ 上服从均匀分布的随机相位, $w(n)$ 是均值为0、方差为 σ_w^2 的白噪声。已知 $x(n)$ 的自相关函数值为

$$R_x(0) = 3, \quad R_x(1) = 1, \quad R_x(2) = 0$$

试用Pisarenko谐波分解法确定正弦波的频率 ω_0 、幅度 a 和白噪声的方差 σ_w^2 。

3-10 设随机信号 $x(n)$ 是由加性白噪声和两个复正弦信号组成的,其三阶自相关矩阵

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 确定噪声的平均功率;

(2) 求信号子空间和噪声子空间;

(3) 判断信号子空间和噪声子空间是否正交;

(4) 用Pisarenko谐波分解法估计信号频率;

(5) 用MUSIC方法估计信号频率。