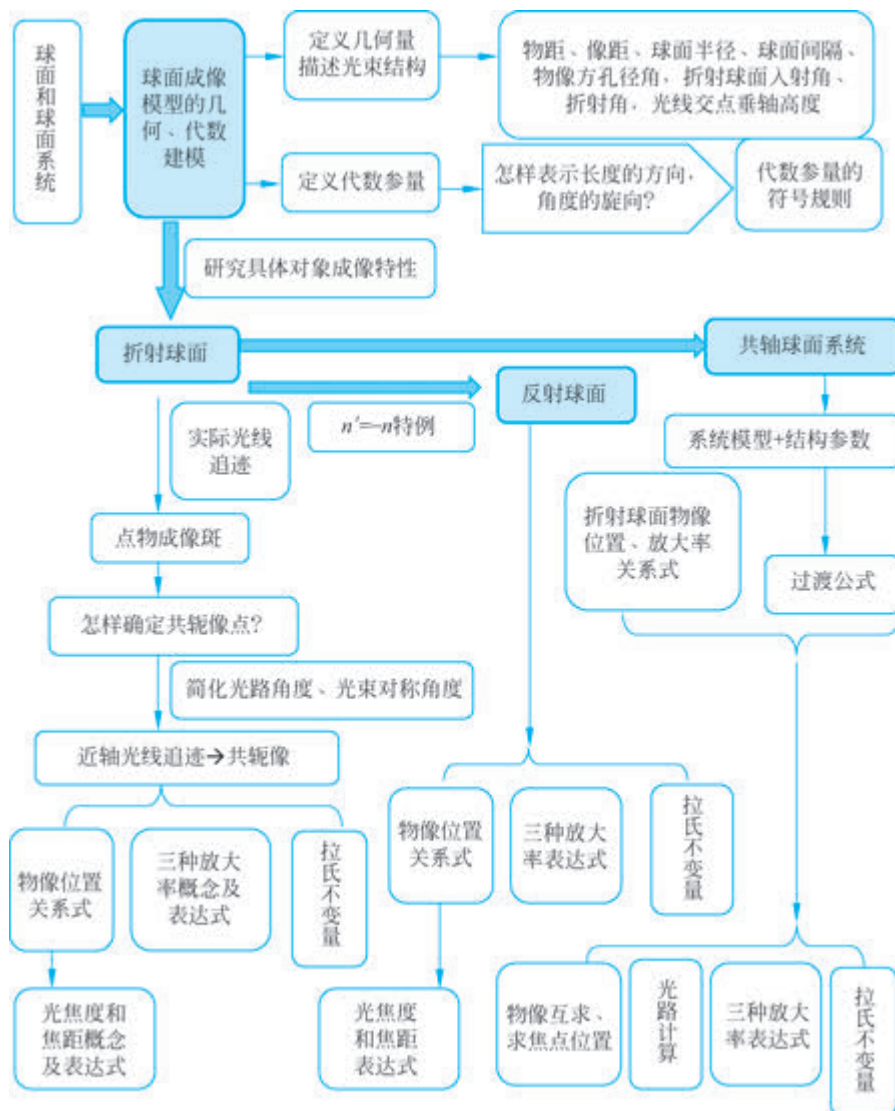


第3章 球面和球面系统



本章思维导图

学习目标：

- (1) 掌握描述光路结构的几何参量定义和对应代数参量的符号规则；
- (2) 了解实际光路追迹公式；
- (3) 掌握近轴区概念及追迹公式；
- (4) 掌握单折射球面近轴区物像位置关系、光焦度及焦距、放大率公式；
- (5) 理解物平面细光束成像模型；
- (6) 掌握反射球面作为折射球面特例的相应成像特性；
- (7) 掌握共轴球面系统过渡公式、物像互求、放大率公式；
- (8) 掌握各种公式在共轴球面系统光路追迹中的作用。

学习重点：

- (1) 代数参量的符号规则；
- (2) 单折射球面及其特例反射球面近轴区物像位置关系公式、光焦度及焦距、放大率公式；
- (3) 共轴球面系统物像互求。

球面是成像光学系统中最常见的基本单元,本章追迹通过球面的光线来研究像的位置及大小,再进一步对整个球面系统的成像进行分析。

3.1 几何参量定义与代数参量符号规则



视频讲解

3.1.1 几何参量定义

由于共轴光学系统的轴对称性,通常只需要研究子午面内的光线成像。图 3-1 为折射球面子午面内轴上点光路图,轴上物点 A 发出一根入射光线,经单个折射球面折射后,出射光线与光轴交于像点 A' 。为定义物、像点的位置,并进行几何光路计算,需定义必要的几何参量来描述光路的几何结构。

截距是用来描述物、像点位置的几何参量。描述物点位置的为物方截距,描述像点位置的为像方截距。物方截距简称为**物距 (Object Distance)**,物距是指物点到顶点的轴向距离,如图 3-1 中的 AO 。像方截距简称为**像距 (Image Distance)**。像距是像点到顶点的轴向距离,如图 3-1 中的 $A'O$ 。

孔径角 (Aperture Angle)用来定位所选用的成像光线。物方光线与主光线的夹角称为物方孔径角,如图 3-1 中的 $\angle EAO$,像方光线与主光线的夹角称为像方孔径角,如图 3-1

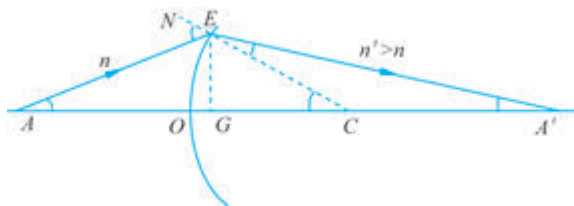


图 3-1 折射球面子午面内轴上点光路图

中的 $\angle EA'O$ 。

除上述几何参量外,还有球面半径 OC 、光线与**折射球面 (Refractive Sphere)**交点的垂轴高度 EG 、法线与光轴夹角 $\angle OCN$ 、光线在折射面上的入射角 $\angle AEN$ 以及折射角 $\angle A'EC$ 。

3.1.2 代数参量符号规则

为了研究光线的传播和成像规则,必须定义与几何参量相对应的代数参量进行光路计算。习惯上用代数参量 L 和 L' 表示物距和像距,用 r 表示球面半径,用 h 表示垂轴高度,用 I 和 I' 表示入射角和折射角,用 φ 表示法线与光轴夹角。

图 3-1 上标注的表述物理长度及角度的几何参量,都是正值。代数参量的长度必须区分正、负方向,代数参量的角度必须有旋转方向,可用量的正负来表示方向。因此,就像在第 1 章的折、反射定律讲解中描述的那样,必须制定代数参量的符号规则。

通常,习惯从左向右追迹光线,所以定义轴向长度代数参量的正方向为从左向右。关联到球面顶点 O 的轴向长度代数参量以 O 为基准,另一点在 O 左边,则代数参量为负值,另一点在 O 右边,则代数参量为正值。按此规则,图 3-1 中轴向长度量 AO 、 $A'O$ 和 OC 对应的代数参量 L 、 L' 和 r 分别为负值、正值和正值。将这些代数参量标注在图 3-1 所示的几何光路上,便形成了如图 3-2 所示的光路图,这样的光路图既保留了几何模型的直观性,又便于代数运算。为了标注正值几何参量 AO ,负的代数参量 L 前需添一个负号,代数参量 L' 和 r 本身为正值,可直接用它们标出正值几何参量 $A'O$ 和 OC 。

对于描述两折射面间隔的代数参量 d ,以前一面顶点为基准,若后一面顶点在前一面右边,则 d 为正,若后一面顶点在前一面左边,则 d 为负。

对于垂轴长度方向,定义从下向上为正方向。基于此,规定垂轴长度代数参量以光轴为基准,另一点在光轴上边,则代数参量为正值,另一点在光轴下边,则代数参量为负值。按此规则,如图 3-1,垂轴长度量 EG 对应的代数参量 h 应为正值。在如图 3-2 所示

光路图上,标正值几何参量 EG 直接用 h 标注即可。

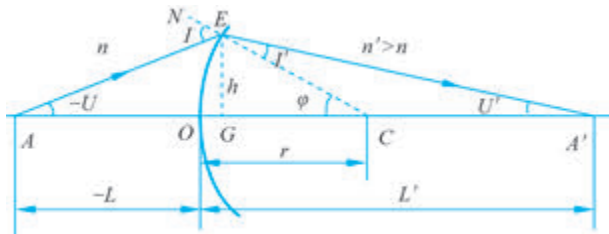


图 3-2 加上代数参量的折射球面轴上点光路

对于角度代数参量,定义从起始边以锐角方向转向终止边,若为顺时针旋转,则角度量为正值。对于物方、像方孔径角,以光轴为起始边,光线为终止边;对于入射角和折射角,以光线为起始边,表面法线为终止边;对于光轴和法线组成的角度,以光轴为起始边,表面法线为终止边。按此规则,如图 3-2 所示,代数角度 U, U', I, I', φ 分别为负、正、正、正、正值。为了标注正值几何角,本身为负值的代数角度 U 前需添加负号。

注意:以上代数参量符号规则并没有限定光线行进方向,比如,当系统中存在反射面,使得光线从右向左传播时,上述规则仍适用。

3.2 折射球面

3.2.1 实际光线与近轴光线追迹

1. 实际光线追迹

研究物体发出的光线怎样通过折射球面成像,主要是研究像的位置、像的大小及像的质量问题。关于像的质量,在“几何光学”的后续课程“光学设计”中才会讨论。下面主要研究像的位置及像的大小问题。首先建立折射球面像的位置与物体位置的函数关系,然后讨论像的大小问题。

相对于轴外物点,轴上物点的成像模型是一个比较好的切入点。如图 3-2 所示,轴上物点 A 发出孔径角为 U 的光线 AE ,通过球面折射后,出射光线和光轴交于 A' ,光轴可看作 A 发出的沿轴成像光线,因此两出射光线的交点 A' 即为像点。下面我们来导出像距 L' 的表达式。

对 $\triangle ACE$ 应用正弦定理,可得到式(3-1)。根据折射定律,可得到式(3-2)。将“三角形一角的补角等于另外两角之和”应用在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle A'CE$ 上,可得到 $U + I = U' + I' =$



视频讲解

φ , 由此可导出式(3-3)。对 $\triangle A'CE$ 应用正弦定理, 可得到式(3-4)。

$$\sin I = \frac{L-r}{r} \sin U \quad (3-1)$$

$$\sin I' = \frac{n}{n'} \sin I \quad (3-2)$$

$$U' = U + I - I' \quad (3-3)$$

$$L' = r + r \frac{\sin I'}{\sin U'} \quad (3-4)$$

通过以上 4 式的传递关系, 可知像距 L' 并不由物距 L 唯一决定, 它还是光线孔径角 U 的函数。这意味着, 选择不同孔径角的入射光线, 出射光线将交于不同像距的像点, 如图 3-3 所示。在某一靠近像面的任何位置的垂轴接收平面上, 都将获得一个像斑。

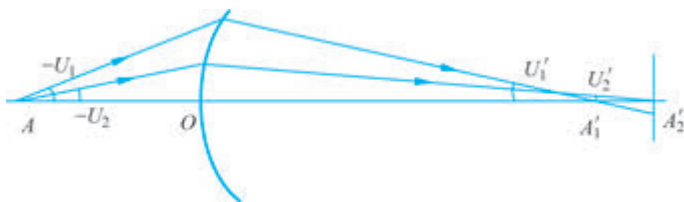


图 3-3 不同孔径角的光线成像光路图

2. 近轴光线追迹

在物点成像得到的众多像点中, 首先应确定一个作为物点唯一对应的像点, 我们也叫共轭像点, 这样才有确定的物、像关系, 其他的像点则为存在像差的像点, 这样就可以进一步研究像差问题。折射球面及其组成的系统虽不能完善成像, 但通过光学设计来控制像斑的大小, 依然可以得到满意的像质。

从简化光路追迹(Ray Trace)公式的角度, 应选择 U 角无限小的入射光线得到的像点作为共轭像点。因为, U 角小时, I 、 I' 、 U' 也跟着小, 这样一来, 上述实际光路追迹 4 式中的正弦函数均可近似用其弧度代替, 这对成像理论模型的运算及应用是有好处的。另外, 从光束的对称角度, 也应选入射光锥中央的主光线所获得的像点作为共轭像点。 U 角无限小的光线称为近轴光线, 近轴光线所在的区域称为近轴区。我们在分析平行平板成像特性时接触过这个区域。

U 角无限小时, I 、 I' 、 U' 也将无限小, 将实际光线追迹式(3-1)~式(3-4)中这些角度的正弦函数近似用其弧度 u 、 i 、 i' 、 u' 代替, 便得到了如下近轴区的光线追迹 4 式:

$$i = \frac{l-r}{r} u \quad (3-5)$$

$$i' = \frac{n}{n'}i \quad (3-6)$$

$$u' = u + i - i' \quad (3-7)$$

$$l' = r + r \frac{i'}{u'} \quad (3-8)$$

通过这些公式,代入任何角度(即使明显不在近轴区的角度)的弧度量,都可计算物点的共轭像点,因为式中的 u 、 i 、 i' 、 u' 已经失去了它们所代表的实际角度意义,是近轴计算过程中的中间变量。为了与实际光线代数参量区别,近轴区的代数参量统一改为小写字母表示。另外,大家可能已经注意到了,本书的代数参量,上标带“'”的为像方参量,无上标的为物方参量或成像系统结构参量。

通过以上 4 式的传递关系,可知像距 l' 唯一由物距 l 决定,不再是 u 的函数。在近轴区,点物通过近轴光线成的点像称为近轴像。轴上物点的近轴像也就是与物点唯一对应的共轭像。

3.2.2 近轴区物像位置关系



视频讲解

图 3-4(a)所示为实际的近轴区光路图,轴上物点 A 通过近轴光线成像交光轴于共轭像点 A'_0 。因为近轴光线几乎挨着光轴,所以留给几何参量及代数参量的标注空间很小。通常在垂轴方向上,对近轴区的光路图进行拉伸,如图 3-4(b)所示,因为光线所在区域为近轴区,所以折射球面被近轴光线覆盖的部分近似为切平面。习惯上,为了区别于平面折射,光路图依然会保留近轴区的球面弧度,如图 3-4(c)所示,因此, O 、 G 两点在图中虽然是分离的,但实际上是近似重合的。

图 3-5 为标注了近轴光路代数参量的轴上物点光路图。根据 $\triangle AEG$ 和 $\triangle A'EG$ 的边角关系,可得

$$lu = h = l'u' \quad (3-9)$$

再根据式(3-9)和近轴区的光线追迹公式(3-5)~式(3-8),可导出式(3-10)~式(3-12):

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l'}\right) = Q \quad (3-10)$$

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r} \quad (3-11)$$

$$n'u' - nu = \frac{n' - n}{r}h \quad (3-12)$$

式(3-10)~式(3-12)是近轴区物、像位置关系公式的不同应用形式,相较于式(3-5)~

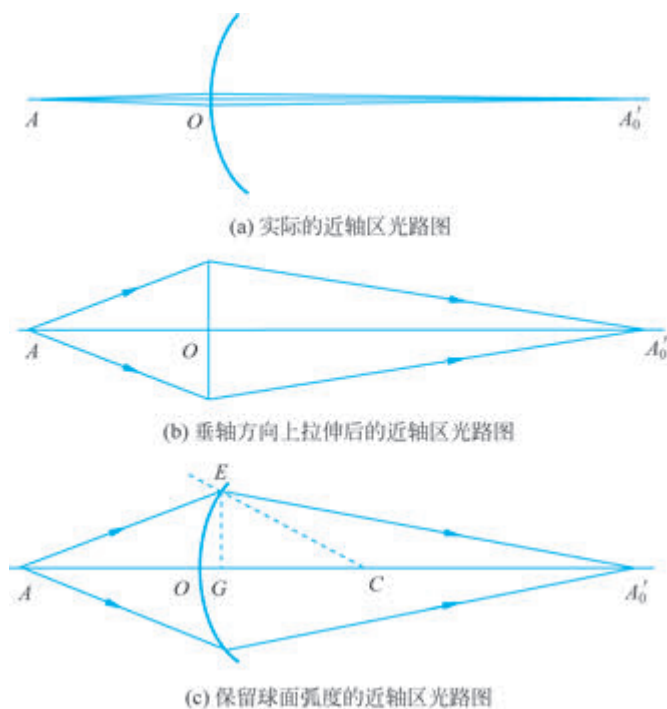


图 3-4 近轴区光路图

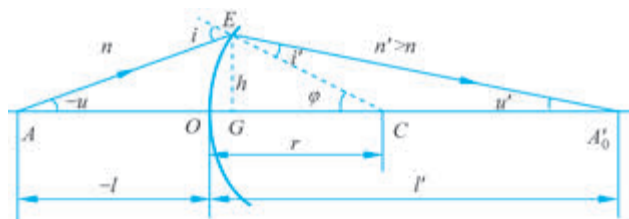


图 3-5 标注了近轴光路代数参量的轴上物点光路图

式(3-8)的组合式,这些公式消去了 u 、 u' 、 i 、 i' 这些中间变量,只用一个公式就通过折射面结构参数 n 、 n' 、 r 关联了物、像点位置 l 及 l' ,且形式上又具有物方、像方的对称性,简洁又便于记忆。式(3-10)左边为物方量,右边为像方量,通过球面成像后,物方、像方量保持不变,这个量用 Q 表示,称为**阿贝不变量(Abbe Invariant)**。式(3-11)是常用的物、像位置关系式,知道物距 l 和像距 l' 中的任何一个,就可以导出另外一个。式(3-12)给出了成像前后物方、像方光线孔径角间的关系,该式实质是用 h/u 和 h/u' 表示物、像位置的成像关系式。



视频讲解

3.2.3 近轴区折射球面光焦度及焦距

式(3-11)是近轴区的物、像位置关系式。等式左侧是像方量和物方量的差值,等式右侧是和折射面结构参数相关的表达式。能否给该式的每一项赋予具体的物理意义呢?首先,基于该式,我们先设定两个数学概念。

第一个数学概念是折合距离,它定义为介质中的长度除以该介质的折射率。 l'/n' 称为像点折合距离, l/n 称为物点折合距离。

第二个数学概念是会聚度(Convergence),它定义为折合距离的倒数,用它来描述物理上光线的会聚或发散程度。物点折合距离的倒数 n/l 称为物方光线的会聚度,记为 V 。同理,像点折合距离的倒数 n'/l' 称为像方光线的会聚度,记为 V' 。

下面通过示例来验证数学上的会聚度概念能否正确描述物理上光线的会聚和发散,能否正确地描述物理上的会聚和发散的程度。

如图 3-6(a)所示,虚物点 A 通过折射面成像得到实像点 A' ,从物理上来看,物方及像方的光线都是会聚光线。从对应的数学概念上看,物方会聚度 V_A 和像方会聚度 V'_A 均为正值,所以我们设定的会聚度概念为正时表示光线会聚。

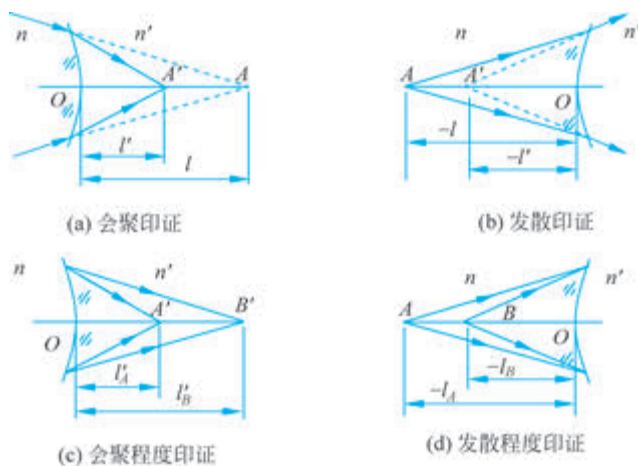


图 3-6 物理上和数学上的会聚度相互印证

如图 3-6(b)所示,物点 A 通过折射面成像得到虚像点 A' ,从物理上来看,物方及像方的光线都是发散光线。从对应的数学概念上看,物方光线会聚度 V_A 和像方光线会聚度 V'_A 均为负值,所以我们设定的会聚度概念为负时表示光线发散。

如图 3-6(c)所示,两像点像方光线相比较,从物理上看,像点 A' 对应的像方光线会聚

度大于像点 B' 对应的像方光线会聚度。从对应的数学概念上看, 因为 $l'_A < l'_B$, 像点 A' 的会聚度 V'_A 也要大于像点 B' 的会聚度 V'_B 。所以我们设定的会聚度概念在趋势上等同于物理上的会聚度。

如图 3-6(d) 所示, 两物点物方光线相比较, 从物理上看, 物点 A 对应的物方光线发散度小于物点 B 对应的物方光线发散度。从对应的数学概念上看, 因为 $|l_A| > |l_B|$, 物点 A 的会聚度 V_A 的绝对值也要小于物点 B 的会聚度 V_B 的绝对值。所以我们设定的会聚度概念在趋势上也等同于物理上的发散度。

综上所述, 我们可以确定我们设定的数学上的会聚度概念 V 和 V' 不但能正确描述物理上光线的会聚和发散, 也能正确地描述物理上的会聚和发散的程度。需要注意的是, 会聚度概念不仅和 $1/l$ 及 $1/l'$ 有关, 还和 n 、 n' 有关。因此, 不同介质中的相同的 V 或 V' 值在物理上并不等价, 示例见 3.2.5 小节中关于折射平面光焦度的相关讨论。如图 3-7 所示, 可以在一维坐标上直观展示数学上的会聚度对应的物理意义。会聚度概念 V 和 V' 为正时表示光线会聚, 为负时表示光线发散。正值越大表示会聚程度越大, 负值的绝对值越大表示发散程度越大。当 V 和 V' 为零时, 此时对应的物、像距 l 和 l' 为无穷大, 表示光线平行。



图 3-7 一维坐标表示的数学上的会聚度对应的物理意义

式(3-11)的左边即为 $V' - V$, 表征折射球面的出射光线和入射光线会聚度的差异, 这个差异是折射球面产生的, 用式(3-11)右边项 $(n' - n)/r$ 来度量, 记为 φ , 有

$$V' - V = \frac{(n' - n)}{r} = \varphi \quad (3-13)$$

式中, φ 称为折射球面的**光焦度(Focal Power)**。折射球面的光焦度是表征折射球面对光线会聚或发散能力的固有参数, 并不因物点、像点位置的变化而改变。折射球面光焦度为正, 表示该折射球面对光束具有会聚能力, 正值越大, 会聚能力越强。折射球面光焦度为负, 表示该球面对光束具有发散能力, 负值绝对值越大, 发散能力越强。光焦度单位为 m^{-1} , 称为**屈光度(Diopter)**, 由于这个单位在物理世界中并不是直观或显而易见的, 比如, 你可能并不能立刻反应出光焦度 $\varphi = 3\text{m}^{-1}$ 对应的会聚能力, 因此通常我们对折射球面会聚能力的感知来自其另一个固有参数——**焦距(Focal Length)**。

我们先来了解**焦点(Focal Point)**的概念。焦点相关共轭光路如图 3-8 所示,无穷远物点的共轭像点称为折射球面的**像方焦点(Image Focus)**或**后焦点(Rear Focus)**,无穷远像点的共轭物点称为折射球面的**物方焦点(Object Focus)**或**前焦点(Front Focus)**。物方焦点、像方焦点到球面顶点 O 的距离称为物方焦距和像方焦距,其正负依然以球面顶点为参考,左负右正。



图 3-8 焦点相关共轭光路

因为折射球面的光焦度是表征折射球面对光线会聚或发散能力的固有参数,并不因物、像点位置的变化而改变,所以完全可以用折射球面在某个特殊的物、像关系中的屈光表现来表征固有屈光能力。因为与无穷远共轭,焦点是折射球面众多的物、像关系中较为特殊的特征点,所以可以用焦距来表征折射球面的固有屈光能力,不同折射球面也可以用焦距来比较各自的屈光能力。比如某折射球面的像方焦距 $f' = 0.1\text{m}$,表示折射球面的会聚能力能将平行的入射光束会聚于顶点后 0.1m 处,它的会聚能力显然比像方焦距 $f' = 1\text{m}$ 的折射球面要强。

因为焦点是特殊的物点或像点,所以焦距就是特殊的物距或像距。通过近轴区的物、像位置关系式(3-11)计算得

$$f' = \frac{n'}{n' - n}r \quad (3-14)$$

$$f = -\frac{n}{n' - n}r \quad (3-15)$$

且有

$$\varphi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \quad (3-16)$$

光焦度 φ 和焦距存在反比例关系。更准确地说,光焦度和焦距是近轴区的概念,超出近轴区的实际光路,由于存在像差,折射球面光焦度和焦距不再是定值。

此外,可以进一步导出焦距相关的应用公式。由式(3-14)和式(3-15)作比值,可得

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n} \quad (3-17)$$

由式(3-14)和式(3-15)求和,可得

$$f' + f = r \quad (3-18)$$

进一步,综合式(3-11)、式(3-17)及式(3-18),可得

$$\frac{f'}{l'} + \frac{f}{l} = 1 \quad (3-19)$$

其中,式(3-17)和式(3-19)普适于任何光学系统,式(3-18)仅适用于单球面成像的情况。



视频讲解

3.2.4 近轴区成像放大率及拉氏不变量

1. 物平面细光束成像模型

近轴区成像位置公式给出了物像位置关系,仅涉及物像在轴向上的求解,并不涉及像相对于物大小的变化。下面将在垂轴方向上研究成像的**放大率(Magnification)**问题。在这之前,还有一个问题需要解决:平面的物能否得到一个平面像呢?如果不能,要研究的垂轴方向上的放大率问题就较为复杂。为了研究这个问题,先建立一个物平面细光束成像模型,在近轴区来探讨这个问题。

图 3-9 为物平面细光束成像模型,如图所示,折射球面球心 C 处放置中央开有透光小孔的光阑确保物点以细光束成像。 A 为平面物体的轴上物点,受制于透光小孔, A 通过折射球面以细光束成像于近轴像点 A' 点,由于是轴上点的近轴像, A' 实为其共轭像点。设有一球心为 C 的球面物体 A_1AA_2 与平面物体相切于 A 点,分别过 A_1 、 A_2 点作球心 C 的连线。现在来分析 A_1 点的成像。分析一个折射面对于整个物面成像时,只有一个光轴和一个轴上点,其他物点只能是轴外点。但对于局部的成像研究,则可以灵活处理。对原光轴 AC 来说, A_1 为轴外点。从 A_1 点成像光束对称的角度, A_1C 亦可为光轴。因此,在研究物点 A_1 的成像问题时, A_1 为光轴 A_1C 的轴上点, A_1 的细光束成像适用前面导出的轴上点成像位置公式。由于 A_1 点和 A 点均在圆心为 C 的圆弧上, A_1 拥

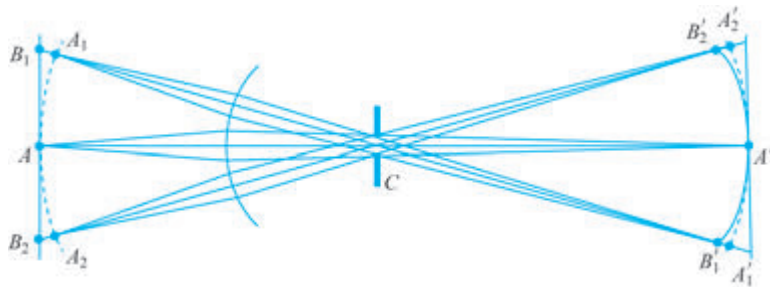


图 3-9 物平面细光束成像模型

有和 A 相同的物距,其像 A'_1 也拥有和 A' 相同的像距,因此, A'_1 应在圆心为 C , 半径为 CA' 的圆弧与光轴 A_1C 的交点处。我们再来看 B_1 点的成像, B_1 为过 A 的垂轴物平面与光轴 A_1C 的交点,比 A_1 离折射球面更远。根据轴上点物像位置关系式,其近轴像点 B'_1 必位于光轴 A_1C 上,且应比 A'_1 点离折射球面更近。既然 $A'A'_1$ 位于球心为 C 的球面上,那么, $A'B'_1$ 必然位于一非球面形式的曲面上,垂轴平面物体 AB_1 的像实为一曲面。既然像相对于物发生了变形,就不好讨论像相对于物的放大率问题了。只有当垂轴平面 AB_1 足够小,为过 A 点的垂轴小平面时,其像面 $A'B'_1$ 才近似为过 A' 的近轴小平面。

通过对物平面细光束成像模型的分析,我们得到的结论可归纳为:对于垂轴平面物体,只有当平面物体足够小(小视场)并以细光束成像时,才能获得平面共轭像。近轴区成像包含细光束成像和小视场成像两层意思。

下面,将在近轴区内研究折射球面成像的放大率。

2. 横向放大率

在图 3-5 上添加轴外点 B 的成像光路,便可得到图 3-10。选取 B 点发出的过折射球心 C 的光线,该光线垂直于球面入射,不改方向出射。因为近轴区内平面物成平面像,出射光线与过 A'_0 点的垂轴平面的交点即为像点 B'_0 。垂轴物体 AB 及其像 $A'_0B'_0$ 的高度通常用代数参量 y 和 y' 表示。

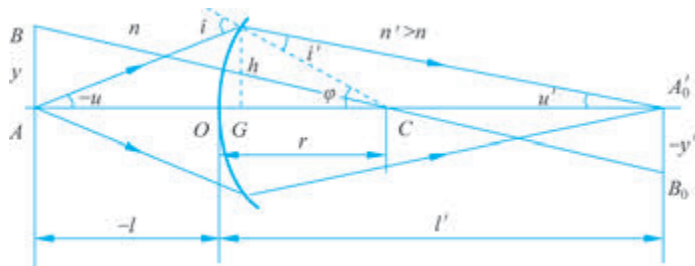


图 3-10 增加了轴外物点的近轴光路代数参量的光路

横向放大率(Transverse magnification)定义为像高 y' 和物高 y 之比,用 β 表示。根据式(3-9)、式(3-10)和图 3-10 光路中的相似三角形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'_0B'_0C$ 的边长关系,可导出横向放大率 β 的表达式如下:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{l' - r}{l - r} = \frac{nl'}{n'l} = \frac{nu}{n'u'} \quad (3-20)$$

根据式(3-20)中的 $\beta = nl'/n'l$,可进行如下的讨论。

- 当 n, n' 一定时,对于某一具体的物像关系, l' 和 l 之比一定, β 为常量。

- 对于折射面成像, n, n' 均为正值。 $\beta > 0$ 时, l 和 l' 必同号, 因此物、像在折射球面同侧, 虚实各异。 $\beta < 0$ 时, l 和 l' 必异号, 因此物、像在折射球面异侧, 虚实相同。

根据式(3-20)中的 $\beta = y'/y$ 可进行如下的讨论。

- $\beta > 0$ 时, y, y' 同号, 成正像, $\beta < 0$ 时, y, y' 异号, 成倒像。
- $|\beta| > 1$ 时, $|y'| > |y|$, 成放大像, 否则成缩小像。

3. 轴向放大率

物像点沿轴移动示意图如图 3-11 所示, **轴向放大率 (Longitudinal Magnification)** 用于描述光轴上一对共轭点沿轴移动量之间的关系, 为轴向像点移动量 dl' 和物点移动量 dl 之比。

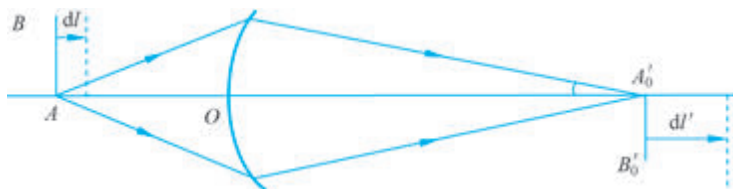


图 3-11 物像点沿轴移动示意图

对式(3-11)求导, 可导出轴向放大率 α 的如下表达形式:

$$\alpha = \frac{dl'}{dl} = \frac{nl'^2}{n'l^2} = \frac{n'}{n} \beta^2 \quad (3-21)$$

由式(3-21)可知, 对于折射面成像, 因为 n, n' 均为正值, 所以 $\alpha > 0$, dl' 与 dl 同号, 表示像移动方向与物移动方向相同。一般 $\alpha \neq \beta$, 立体物与像不再相似。

4. 角放大率

角放大率 (Angular Magnification) 用于描述折射前后一对光线与光轴夹角之间的关系, 为折射光线的孔径角正切 $\tan u'$ 和入射光线的孔径角正切 $\tan u$ 之比, 对于近轴区, 因孔径角 u, u' 很小, 正切之比即为 u' 和 u 之比。如图 3-12 所示的 $u'_1/u_1, u'_2/u_2$ 和 u'_3/u_3 为对应成像光线对的角放大率。根据式(3-20)可导出角放大率 γ 的表达式如下:

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{l}{l'} = \frac{n}{n'} \frac{1}{\beta} \quad (3-22)$$

5. 拉氏不变量

由式(3-20)可得

$$nyu = n'y'u' = j \quad (3-23)$$

式中, j 为**拉氏不变量 (Lagrange Invariant)**, 它是表征光学系统性能的重要参数。

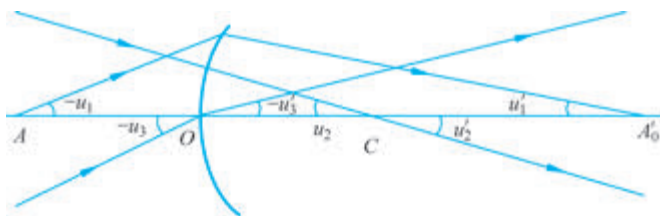


图 3-12 不同光线对的物像方孔径角

拉氏不变量在光能耦合设计中具有重要的指导意义。如图 3-13(a)所示,将光源发光通过聚光透镜耦合进光纤纤芯。光源为有限大小发光体,比如灯丝,其尺寸 y 通常远大于纤芯。为使其像 y' 尽可能多地被纤芯接收,必须使其成缩小像。根据拉氏公式(3-23), u' 必然远大于 u , 较大的 u' 角使得进入纤芯的大部分光最终因为不能满足全反射而从侧面溢出光纤。反之,根据式(3-23),如果使 u' 小于 u , 则 y' 又会大于 y , 如图 3-13(b)所示,此时获得一个放大的像 y' , 远大于纤芯,也不利于光能接收,必须进行折中优化设计。

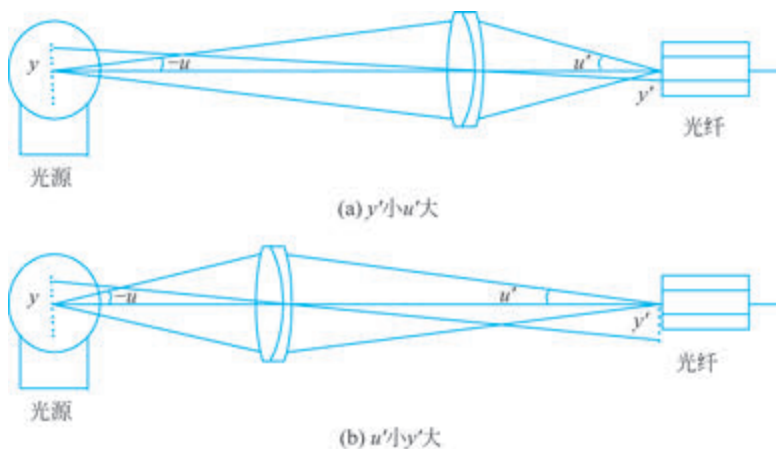


图 3-13 光纤光能耦合示意图

3.2.5 折射平面的成像关系式

在第 2 章的平面和平面系统中,根据折射定律,已经对两个折射平面组成的平板的成像特性进行了分析。由于折射平面即为 $r = \infty$ 的折射球面,将 $r = \infty$ 代入式(3-11)、式(3-12)、式(3-14)、式(3-15)及式(3-20)~式(3-22)可得和折射平面成像相关的式(3-24)~式(3-30):



视频讲解

$$l' = \frac{n'}{n}l \quad (3-24)$$

$$u' = \frac{n}{n'}u \quad (3-25)$$

$$\varphi = 0 \quad (3-26)$$

$$f' = f = \infty \quad (3-27)$$

$$\beta = 1 \quad (3-28)$$

$$a = \frac{n'}{n} \quad (3-29)$$

$$\gamma = \frac{n}{n'} \quad (3-30)$$

式(3-24)和式(3-25)为折射平面的两种不同形式的物、像位置关系式。式(3-26)为折射平面的光焦度,光焦度为零说明折射平面的出射光线和入射光线的会聚度差异 $V' - V$ 为零,但是如图 3-14 所示,从物理上看,折射平面的出射光线和入射光线会聚度确实存在差异,因为出射光束的发散锥角确实大于入射光束的发散锥角。这说明我们设定的数学上的会聚度概念 V 和 V' 虽然可以描述物理上光线的会聚和发散趋势及程度,但需要注意的是,不同介质中的相同的 V 或 V' 值在物理上并不等价。式(3-27)为折射平面的焦距表达式,物方、像方焦距均为 ∞ 。式(3-28)为折射平面的横向放大率表达式,其横向放大率恒为 1,无论对应怎样的物、像位置关系,都可得到正立、等大的像。式(3-29)和式(3-30)为折射平面的轴向和角放大率表达式,仅和折射平面两侧折射率相关,独立于具体的物、像位置关系。

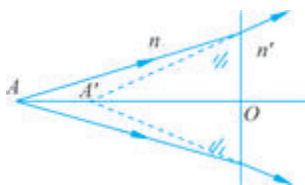


图 3-14 折射平面物像方光线会聚度示意图



视频讲解

3.3 反射球面

反射定律是折射定律在 $n' = -n$ 下的特例。因此,在同一符号规则下,将在近轴区导出的折射球面的结论中的 n' 代之以 n ,便可得到近轴区适用于 **反射球面 (Reflecting**

Sphere)的结论。

3.3.1 近轴区反射球面物、像位置关系

将 $n' = -n$ 代入折射球面物像位置关系式(3-11)可得

$$\frac{1}{l'} + \frac{1}{l} = \frac{2}{r} \quad (3-31)$$

此即为反射球面近轴区物像位置关系式。

3.3.2 近轴区反射球面光焦度及焦距

将 $n' = -n$ 代入折射球面光焦度关系式(3-13)可得反射球面光焦度为

$$\varphi = -\frac{2n}{r} \quad (3-32)$$

式中, n 为反射球面所处介质,如处于水中, n 约为 1.33,处于空气中, n 为 1。

将 $n' = -n$ 代入折射球面焦距关系式(3-14)和式(3-15)可得反射球面焦距为

$$f' = f = \frac{r}{2} \quad (3-33)$$

f' 、 f 相等并与 r 同号,如图 3-15 所示,说明物方、像方焦点重合,且和反射面球心 C 在反射面同一侧。 f' 、 f 如果小于零,根据沿轴线段符号规则,焦点在反射镜左侧,为实焦点。 f' 、 f 如果大于零,则焦点在反射镜右侧,为虚焦点。

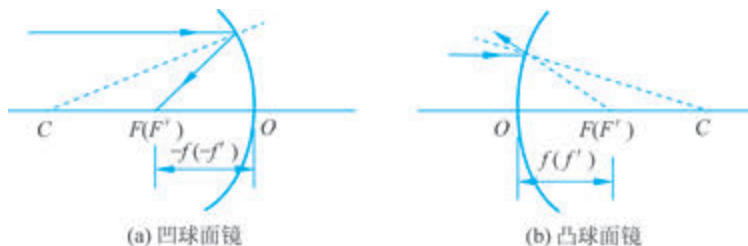


图 3-15 球面镜与焦点相关光路

3.3.3 近轴区反射球面成像放大率及拉氏不变量

将 $n' = -n$ 代入折射球面相应放大率式及拉氏不变量公式,可得反射球面横向、轴向、角放大率式及拉氏不变量为

$$\beta = -\frac{l'}{l} \quad (3-34)$$

$$a = -\beta^2 \quad (3-35)$$

$$\gamma = -\frac{1}{\beta} \quad (3-36)$$

$$j = yu = -y'u' \quad (3-37)$$

根据式(3-34), 如果 $\beta > 0$, 则 l, l' 异号, 物、像分别处于镜面两侧, 物、像虚实各异。反之, 如果 $\beta < 0$, 则 l, l' 同号, 物、像处于镜面同侧, 物、像虚实相同。

根据式(3-35), a 恒小于零, 物、像移动方向相反。

3.3.4 半径为 ∞ 的反射球面——平面镜的成像关系式

在第2章的平面和平面系统中, 根据反射定律, 已经对平面镜的成像进行了分析。由于平面镜即为 $r = \infty$ 的反射球面, 将 $r = \infty$ 代入式(3-11)、式(3-13)~式(3-15)、式(3-20)和式(3-21)可得

$$\left\{ \begin{array}{l} l' = -l \\ \varphi = 0 \\ f' = f = \infty \\ \beta = 1 \\ \alpha = -1 \\ \gamma = -1 \end{array} \right. \quad (3-38)$$

由式(3-38)中 $l' = -l$ 可知平面镜成像物、像对称于镜面两侧。由 $\varphi = 0$ 及 $f' = f = \infty$ 可知平面镜光焦度为零, 焦距为无穷远, 不改变入射光会聚度。由 $\beta = 1$ 可知平面镜成正立、等大的像。由 $\alpha = -1$ 可知平面镜成像, 物、像移动方向相反。由 $\gamma = -1$ 可知平面镜成像出射光线与入射光线对称于法线两侧。



视频讲解

3.4 共轴球面系统

除了反射镜这个特例外, 单面成像元件一般不能作为一个实际的成像元件, 比如折射球面。实际的成像基础元件是透镜。无论是单个透镜, 还是更为复杂的透镜系统, 都是由多个折射球面组成的共轴球面系统。如图3-16所示, 一个由 k 个折射面组成的系统可由下列结构参数确定。

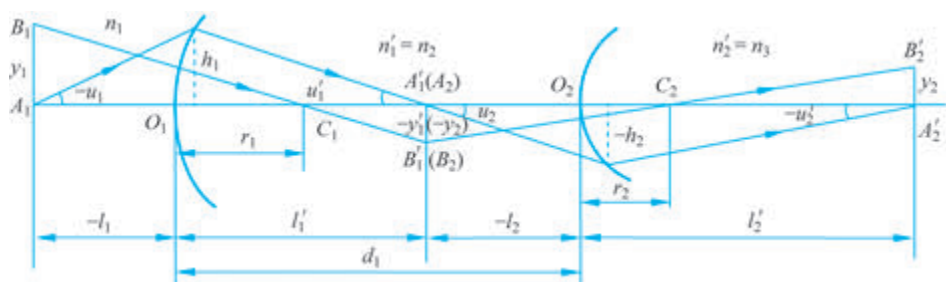


图 3-16 共轴球面系统结构及光路示意图

- 各个折射球面的曲率半径: $r_1, r_2, \dots, r_k$ 。
- 各相邻折射面顶点之间的间距: $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$ 。其中 d_1 是第一面顶点到第二面顶点之间的间距; d_2 是第二面顶点到第三面顶点的间距, 以此类推。
- 各个球面间介质的折射率: $n_1, n_2, \dots, n_{k+1}$ 。其中 n_1 是第一面之前的介质的折射率; n_{k+1} 是第 k 个面之后的介质的折射率, n_2 是第一面之后、第二面之前的介质的折射率, 以此类推。

在物像基本概念中, 我们提到过, 光学系统中, 每一个独立的光学面存在自身的物和像。相邻光学面的成像存在一个衔接, 前一面的像也是后一面的物。在进行共轴球面系统计算时, 除了针对每一个具体的成像面, 应用前 3.2 和 3.3 节导出的成像公式外, 还必须加上面与面之间的过渡公式。根据图 3-16 所示系统光路, 我们可以将过渡公式整理如下:

$$\begin{cases} n_{i+1} = n'_i, (i = 1, 2, \dots, k) \\ y_{i+1} = y'_i, (i = 1, 2, \dots, k-1) \\ u_{i+1} = u'_i, (i = 1, 2, \dots, k-1) \\ l_{i+1} = l'_i - d_i, (i = 1, 2, \dots, k-1) \\ h_{i+1} = h_i - d_i u'_i, (i = 1, 2, \dots, k-1) \end{cases} \quad (3-39)$$

3.4.1 共轴球面系统近轴区物像互求

可通过两种方法实现共轴球面系统由物求像。

第一种方法是由折射面物、像位置关系式(3-11) 结合过渡公式(3-39)求解。其过程为: 根据已知物距及系统结构参数, 通过物、像位置关系式(3-11)由第一个折射面的物方量求得像方量, 再通过过渡公式, 由第一个折射面的像方量求得第二个折射面的物方量,

然后根据第二个折射面的物方量,通过物、像位置关系式求得其像方量,如此不断循环推进,直至求得第 k 个折射面的像方量。

第二种方法是由折射面物、像位置关系式(3-12)结合过渡公式(3-39)求解,其过程同第一种方法一样,区别仅在于物、像位置关系式不同,从而光路计算中所需的过程量不同。

若反过来,通过共轴球面系统由像求物,只需由第 k 面的像方量开始,逆向运用物、像位置关系式及过渡公式,最终将获得第 1 面的物方量。

在求解初级像差的时候,需要获得光线追迹的 h_i 、 i_i 、 i'_i 等过程量,这时需要由式(3-5)~式(3-8)结合过渡公式(3-39)求解。

3.4.2 共轴球面系统近轴区光焦度及焦距求解

光焦度和焦距都是反映折射面屈光能力的物理量,由多个折射面组合而成的系统的光焦能力也对应着光学系统的光焦度和焦距,但由于共轴球面系统的结构过于复杂,折射面个数也不确定,很难将其光焦度和焦距表示成结构参数的通用显式,只能运用 3.4.1 节的方法针对具体的共轴球面系统通过光路追迹来计算其物、像点或焦点位置。共轴球面系统的光焦度及焦距表达式的求解将在第 4 章理想光学系统中讨论。

3.4.3 共轴球面系统近轴区成像放大率及拉氏不变量

由横向放大率的定义,结合过渡公式 $y_{i+1} = y'_i$,可知拥有 k 个面的共轴球面系统的近轴横向放大率 β 为

$$\beta = \frac{y'_k}{y_1} = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \frac{y_4}{y_3} \cdots \frac{y'_k}{y_k} = \frac{y'_1}{y_1} \cdot \frac{y'_2}{y_2} \cdot \frac{y'_3}{y_3} \cdots \frac{y'_k}{y_k} = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 \cdots \beta_k \quad (3-40)$$

将式(3-20)中的 $\beta = nl'/n'l$ 代入式(3-40),再结合过渡公式 $n_{i+1} = n'_i$ 有

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 \cdots \beta_k = \frac{n_1 l'_1}{n'_1 l_1} \cdot \frac{n_2 l'_2}{n'_2 l_2} \cdot \frac{n_3 l'_3}{n'_3 l_3} \cdots \frac{n_k l'_k}{n'_k l_k} = \frac{n_1}{n'_k} \cdot \frac{l'_1 l'_2 \cdots l'_k}{l_1 l_2 \cdots l_k} \quad (3-41)$$

将式(3-20)中的 $\beta = nu/n'u'$ 代入式(3-40),再结合过渡公式 $n_{i+1} = n'_i$ 及 $u_{i+1} = u'_i$ 有

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 \cdots \beta_k = \frac{n_1 u_1}{n'_1 u'_1} \cdot \frac{n_2 u_2}{n'_2 u'_2} \cdot \frac{n_3 u_3}{n'_3 u'_3} \cdots \frac{n_k u_k}{n'_k u'_k} = \frac{n_1 u_1}{n'_k u'_k} \quad (3-42)$$

通过追迹光路获得各个折射面的物、像距,将其代入式(3-41)可计算共轴球面系统的横向放大率。但如果用孔径角形式的物、像位置关系式追迹光路,只需获得系统前物方和系统后像方的孔径角,便可通过式(3-42)计算共轴球面系统的横向放大率。

由轴向放大倍率的定义,结合过渡公式 $l_{i+1}=l'_i-d_i$ 的微分形式 $dl_{i+1}=dl'_i$,可知拥有 k 个面的共轴球面系统的近轴轴向放大率 a 为

$$a = \frac{dl'_k}{dl_1} = \frac{dl_2}{dl_1} \cdot \frac{dl_3}{dl_2} \cdot \frac{dl_4}{dl_3} \cdots \frac{dl'_k}{dl_k} = \frac{dl'_1}{dl_1} \cdot \frac{dl'_2}{dl_2} \cdot \frac{dl'_3}{dl_3} \cdots \frac{dl'_k}{dl_k} = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \quad (3-43)$$

由角向放大倍率的定义,结合过渡公式 $u_{i+1}=u'_i$,可知拥有 k 个面的共轴球面系统的近轴角向放大率 γ 为

$$\gamma = \frac{u'_k}{u_1} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_4}{u_3} \cdots \frac{u'_k}{u_k} = \frac{u'_1}{u_1} \cdot \frac{u'_2}{u_2} \cdot \frac{u'_3}{u_3} \cdots \frac{u'_k}{u_k} = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k \quad (3-44)$$

式(3-21)和式(3-22)为单个折射球面的横向放大率与轴向、角向放大率之间的关系式,将其代入式(3-43)和式(3-44),可推出共轴球面系统各放大率的关系如下:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{n'_k}{n_1} \beta^2 \\ \gamma = \frac{n_1}{n'_k} \frac{1}{\beta} \\ \alpha \gamma = \beta \end{cases} \quad (3-45)$$

由一个面的拉氏不变量 $j = nyu = n'y'u'$,结合过渡公式 $y_{i+1}=y'_i$ 及 $u_{i+1}=u'_i$,可得如下整个系统的拉氏不变量:

$$j = j_1 = j_2 = \cdots = j_k \quad (3-46)$$

j 表征了这个光学系统的性能,即能以多大的视场、多大孔径角的光线入射成像。 j 值大,表明系统能对物体成像的范围大,成像的孔径角大,传输光能多。同时,孔径角还与光学系统分辨微细结构的能力有关。 j 值大的光学系统具有更高的性能。

本章小结

1. 光路图中几何参量对应的代数参量的符号规则如下。

- 轴向长度量的正方向为从左向右。以顶点 O 为基准,左负右正。
- 垂轴长度量的正方向为从下向上。以光轴为基准,上正下负。
- 从起始边以锐角方向顺时针转向终止边的角度量为正值,反之,逆时针转向的为负值。对于物方、像方孔径角,光轴为起始边,光线为终止边;对于入射角和折射角,光线为起始边,表面法线为终止边;对于光轴和法线组成的角度,光轴为起始边,表面法线为终止边。

2. 三角公式用于追迹实际光线,近轴公式用于追迹近轴光线,确定共轭像位置。

3. 近轴区物像位置关系式: $n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right)=Q, \frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=\frac{n'-n}{r}, n'u'-nu=\frac{n'-n}{r}h$ 。

4. 折射球面的光焦度 $\varphi=\frac{(n'-n)}{r}$,它是表征折射球面对光线会聚或发散能力的固有参数,并不因物、像点位置的变化而改变。折射球面光焦度为正,表示该折射球面对光束具有会聚能力,正值越大,会聚能力越强。折射球面光焦度为负,表示该球面对光束具有发散能力,负值绝对值越大,发散能力越强。

5. 无穷远物点的共轭像点称为折射球面的像方焦点或后焦点,无穷远像点的共轭物点称为折射球面的物方焦点或前焦点。物方、像方焦点到球面顶点 O 的距离称为物方和像方焦距,有: $f'=\frac{n'}{n'-n}r, f=-\frac{n}{n'-n}r, \varphi=\frac{n'}{f'}=-\frac{n}{f}, \frac{f'}{f}=-\frac{n'}{n}, f'+f=r, \frac{f'}{l'}+\frac{f}{l}=1$ 。

6. 对于垂轴平面物体,只有当平面物体足够小(小视场)并以细光束成像时,才可能获得平面共轭像。近轴区成像包含细光束成像和小视场成像两层意思。

7. 横向放大率 β 为像高 y' 和物高 y 之比。轴向放大率 α 为轴向像点移动量 dl' 和物点移动量 dl 之比。角放大率 γ 为折射光线的孔径角 u' 和入射光线的孔径角 u 之比。有: $\beta=\frac{y'}{y}=\frac{l'-r}{l-r}=\frac{nl'}{n'l}=\frac{nu}{n'u'}, =\frac{dl'}{dl}=\frac{nl'^2}{n'l^2}=\frac{n'}{n}\beta^2, \gamma=\frac{u'}{u}=\frac{l}{l'}=\frac{n}{n'}\frac{1}{\beta}$ 。

8. 拉氏不变量 $j=nyu=n'y'u'$,它是表征光学系统性能的重要参数。

9. 反射定律是折射定律在 $n'=-n$ 下的特例。因此,在同一符号规则下,将在近轴区导出的折射球面的结论中的 n' 代之以 n ,便可得到近轴区适用于反射球面的结论,有:

$$\frac{1}{l'}+\frac{1}{l}=\frac{2}{r}, \varphi=-\frac{2n}{r}, f'=f=\frac{r}{2}, \beta=-\frac{l'}{l}, \alpha=-\beta^2, \gamma=-\frac{1}{\beta}。$$

10. 通过成像关系式和过渡公式可进行共轴球面系统的光路计算。过渡公式整理如下:

$$\begin{cases} n_{i+1}=n'_i, (i=1,2,\cdots,k) \\ y_{i+1}=y'_i, (i=1,2,\cdots,k-1) \\ u_{i+1}=u'_i, (i=1,2,\cdots,k-1) \\ l_{i+1}=l'_i-d_i, (i=1,2,\cdots,k-1) \\ h_{i+1}=h_i-d_iu'_i, (i=1,2,\cdots,k-1) \end{cases}$$

$$11. \text{共轴球面系统的近轴横向放大率 } \beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 \cdots \beta_k = \frac{n_1}{n_k} \cdot \frac{l'_1 l'_2 \cdots l'_k}{l_1 l_2 \cdots l_k} = \frac{n_1 u_1}{n_k u_k},$$

$$\text{轴向放大率 } a = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k, \text{角放大率 } \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k, \text{各放大率的关系为: } \begin{cases} \alpha = \frac{n'_k}{n_1} \beta^2 \\ \gamma = \frac{n_1}{n'_k} \frac{1}{\beta} \\ \alpha \gamma = \beta \end{cases} \text{。拉}$$

氏不变量 $j = j_1 = j_2 = \cdots = j_k$ 。

拓展阅读

用奉献照亮追光之路的蒋筑英

1956年,18岁的蒋筑英以优异成绩考入北京大学物理系。他在北大读书期间异常刻苦,10个寒暑假有8个在图书馆度过,在学好专业课的同时还掌握了英、俄、德、日、法5门外语。1962年,大学毕业的蒋筑英考入了中国科学院长春光机所,成为中国著名光学专家王大珩招收的第一名研究生。王大珩说当时在我们国家最需要发展的就是光学传递函数测试仪,所以就给了蒋筑英这样一个题目,这是一门评价光学系统质量好坏的新技术。1965年,年仅26岁的蒋筑英在同事们的帮助下,建立了我国第一台光学传递函数测量装置。此后,他又在光学传递函数研究方面取得了一个又一个重要成就,先后解决了国产镜头研制工作中的一些关键技术难题。值得一提的是,20世纪70年代,蒋筑英就与导师王大珩一起攻关,提出了彩色复原质量问题的新方案,最后攻破了这一技术难关,使人们得以看到图像清晰、色彩逼真的彩色电视。在长春光机所,提起蒋筑英,人们都会谈到两个最大、最先进的实验室——光学传递函数测试实验室和X光望远镜检测实验室。正是这两个由蒋筑英亲手建起来的具有当时国际先进水平的实验室,奠定了长春光机所光学检测技术的基础。

蒋筑英心里只有光学事业,大公无私,从不计较个人得失,所里评职称、分房子、提工资时,蒋筑英主动让给更需要的人;义务劳动时,他主动挑脏活累活干。他淡泊名利、从不藏私,翻译了大量论文却从不占为己有,发现对别人研究课题有帮助的资料主动翻译赠送,帮同事修改的论文正式发表却不让署他的名字。

蒋筑英时刻想着国家、想着事业、想着他人,却很少想着自己。高强度的工作渐渐蚕食了他的健康,腹痛越来越厉害,爱人多次催促他去医院,他却总是说“等明天吧”。1982年6月12日,蒋筑英在赴成都验收X射线天文望远镜空间模拟装置时,由于工作劳累致

使病情恶化,经抢救无效于6月15日在成都去世,年仅43岁。

他去世后,聂荣臻元帅为其题词“知识分子的优秀代表”,中共吉林省委追认他为中国共产党党员,国务院追授他为全国劳动模范。

2009年他被评为“100位新中国成立以来感动中国人物”,2019年荣获“最美奋斗者”称号,入选“庆祝中华人民共和国成立70周年大型成就展”1980—1989年英雄模范人物。

习题

1. 标出图3-17所示光路的物像距、物像方孔径角、球面半径、光线在球面上交点的垂轴高度、球面间隔的代数参量。

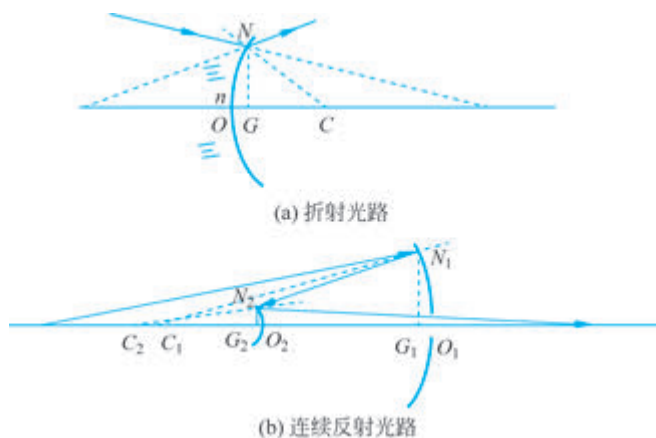


图 3-17 待标近轴代数参量近轴光路

2. 如图3-18所示,鱼缸侧壁近似一个半径为20cm的球面,侧壁厚度可以忽略,鱼缸内水中距侧壁10cm处有一条小鱼,求小鱼共轭像的位置。

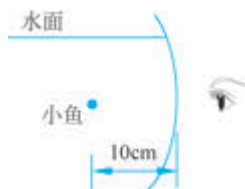


图 3-18 透过鱼缸看小鱼示意图

3. 如图3-19所示,AB物高为5mm,轴上物点A的入射光线孔径角为 30° ,入射光线与折射球面交点的离轴高度为10mm,折射球面曲率半径为200mm,左右两侧的折射

率分别为 1 和 1.5164,求共轭像点位置及像高。

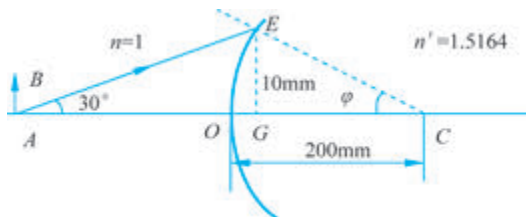


图 3-19 光路示意图

4. 一近视眼镜片前表面半径为 750mm,后表面半径为 187.5mm,折射率为 1.5,求其前后表面的光焦度。如果将该眼镜片置于水中,其前后表面的光焦度又是多少?

5. 一未知半径及折射率的折射球面置于空气中,其物方、像方焦距分别为 -60mm 和 100mm ,求其半径及折射率。

6. 半径 $r=50\text{mm}$,折射率为 1.5 的折射球面对空气中一物体成像,获得了 3 倍的横向放大,求物、像的位置及像的正倒虚实。

7. 半径 $r=50\text{mm}$,折射率为 1.5 的折射球面对空气中一物体成像,求 $\beta=-1$ 时对应的物、像位置及像的正倒虚实,并给出此时物、像距和折射球面焦距的关系。

8. 半径为 500mm 的凹面镜在空气中对物体成像,获得了正立的放大了 2 倍的虚像,求物、像的位置。

9. 半径为 100mm 的凹面镜在空气中对物体成像,分别求出物距为 -1000mm 、 -200mm 、 -100mm 、 -75mm 、 -50mm 、 -40mm 、 -20mm 、 0mm 、 100mm 、 200mm 、 1000mm 时对应的像点位置、横向放大率、正倒或虚实。并用描点连线法用直角坐标曲线描述物距和横向放大率的关系(用曲线的虚实表述像点的虚实)。

10. 根据单个折射球面物像位置关系式推导薄透镜的物方、像方焦距公式,薄透镜折射率为 n ,其物方介质折射率为 n_1 ,像方介质折射率为 n_2 。

11. 一折射率为 1.5164 的薄透镜,在空气中测得其焦距为 50mm ,求其在水中的焦距。