

## 第3章

### CHAPTER 3

# 傅里叶变换与系统的频域分析

在连续时间系统的时域分析中,讨论了以冲激函数为基本信号,将任意输入信号分解为一系列冲激函数的叠加,从而系统的零状态响应等于输入信号与系统冲激响应的卷积积分。本章主要讨论连续傅里叶变换和连续系统的频域分析。以正弦函数或虚指数函数  $e^{j\omega t}$  为基本信号,任意输入信号可分解为一系列不同频率的正弦函数或虚指数函数之和(对于周期信号)或积分(对于非周期信号)。系统分析使用的独立变量是频率(角频率),故称为频域分析(或傅里叶分析)。

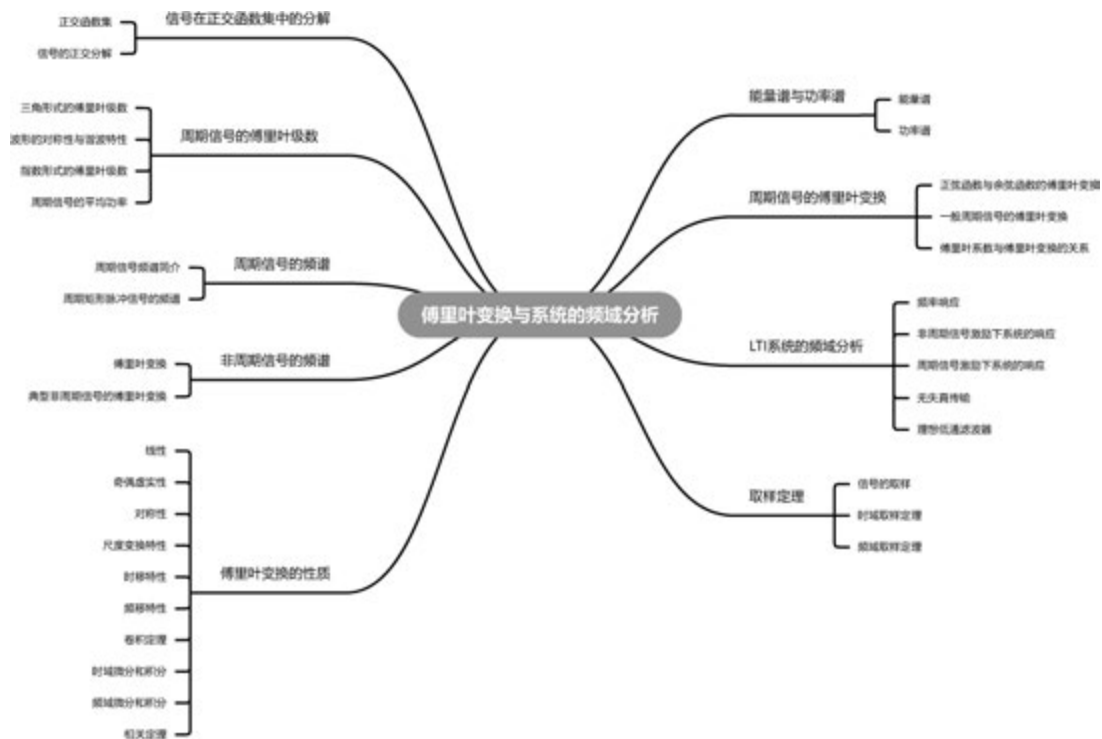
### 教学目标

- 掌握傅里叶级数的概念以及傅里叶系数的计算方法;
- 掌握周期信号的奇偶性、谐波性与傅里叶系数的关系;
- 掌握信号的傅里叶变换及其性质;
- 掌握周期信号频谱与非周期信号频谱的特点、绘制方法;
- 掌握取样定理、无失真传输条件;
- 掌握频率响应函数的概念与求解方法;
- 掌握利用频域分析法计算线性时不变连续系统的零状态响应的方法。

### 教学要求

- 能够叙述连续时间信号正交分解的概念,以及三角函数傅里叶级数、指数函数傅里叶级数的定义;
- 能够描述周期信号的奇偶性、谐波性,与傅里叶系数的关系,频谱的概念;
- 能够解释周期信号傅里叶级数、非周期信号傅里叶变换、周期信号傅里叶变换的定义,以及三者之间的区别和联系;
- 能够利用常用信号傅里叶变换对以及傅里叶变换的性质计算任意信号的傅里叶变换;
- 能够解释取样定理、连续时间线性时不变系统的频域分析方法、不失真传输条件;
- 能够运用频域分析法计算连续时间线性时不变系统的零状态响应、频率响应函数;
- 能够分析系统的幅频特性及相频特性;
- 能够利用上述知识与原理推演、分析专业领域复杂工程问题。

## 思维导图



## 基本概念

LTI 连续系统的频域分析是以正弦函数(正弦和余弦可统称为正弦函数)或虚指数函数为基本信号,将任意连续时间信号表示为一系列不同频率的正弦函数或虚指数函数之和(对于周期信号)或积分(对于非周期信号)。

如果完备的正交函数集是三角函数集或指数函数集,那么周期信号所展开成的无穷级数就分别称为三角形式的傅里叶级数或指数形式的傅里叶级数,统称为傅里叶级数。

周期信号的频谱分为单边频谱与双边频谱,各自又包括幅度频谱与相位频谱,具有离散性、谐波性与收敛性的特点。

非周期信号的频谱具有连续性与收敛性的特点。

系统的频率响应函数是冲激响应的傅里叶变换,也可定义为系统零状态响应的傅里叶变换与激励的傅里叶变换之比。

频域中系统的零状态响应等于系统激励信号的傅里叶变换与频率响应函数的乘积。

无失真传输是指系统的输出信号与输入信号相比,只有幅度大小和出现时间的先后不同,而没有波形上的变化。

取样定理论述了在一定条件下,一个连续时间信号完全可以用该信号在等时间间隔上的样本值表示,利用这些样本值可以恢复原信号。

## 科技发展前沿

在新一轮科技革命与产业变革的浪潮中,集成电路产业作为信息技术的核心基石,正以前所未有的速度推动着社会的进步与发展。作为新质生产力的关键驱动力,集成电路不仅

支撑着人工智能、大数据、云计算等前沿技术的飞跃,更为千行百业的数智化转型铺设了坚实的道路。随着技术的不断革新,集成电路产业正逐步揭示其无限潜力,为全球经济注入新的活力。随着人工智能技术的不断发展,其对存储和计算能力的需求日益增长。传统的中央处理器(Central Processing Unit, CPU)和图形处理单元(Graphics Processing Unit, GPU)已难以满足人工智能应用的高性能需求,专用化的人工智能芯片成为解决这一问题的关键。专用化的人工智能芯片虽然效率高,但学习成本较高,难以快速普及。因此,在大芯片领域,以 GPU、CPU、AI 为例,通用化仍是主流趋势;而在移动设备、智能家居等小芯片领域,更倾向于专用化以满足特定应用需求。

### 3.1 信号在正交函数集中的分解

如同空间矢量可以分解为正交矢量,在信号空间也可以找到若干相互正交的基本信号,使得信号空间中任意信号均可表示成它们的线性组合。

#### 3.1.1 正交函数集

定义在 $(t_1, t_2)$ 区间的两个函数 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ ,若满足两函数的内积为0,即

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt = 0$$

则称 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 在 $(t_1, t_2)$ 区间内正交。正交是直观概念中垂直的推广,垂直一般而言是正交在几何学中的反映,简单起见,函数正交也可以理解为函数之间有垂直的关系。

$n$ 个函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ 构成一个函数集,若这些函数在 $(t_1, t_2)$ 区间内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases} \quad (3-1)$$

则称此函数集为在 $(t_1, t_2)$ 区间的正交函数集,其中 $K_i$ 为常数。在 $(t_1, t_2)$ 区间内相互正交的 $n$ 个函数构成正交信号空间。

如果在正交函数集 $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ 之外,不存在函数 $\phi(t) (\neq 0)$ 满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\varphi_i(t)dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-2)$$

则称此函数集为完备正交函数集。

三角函数集 $\{1, \cos(\Omega t), \cos(2\Omega t), \dots, \cos(m\Omega t), \dots, \sin(\Omega t), \sin(2\Omega t), \dots, \sin(n\Omega t), \dots\}$ 在 $(t_0, t_0 + T)$ 区间 $(T = \frac{2\pi}{\Omega})$ 内是完备的正交函数集,这是因为

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(m\Omega t)\cos(n\Omega t)dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \neq 0 \\ T, & m = n = 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin(m\Omega t)\sin(n\Omega t)dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (3-4)$$



第 17 集  
微课视频

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin(m\Omega t) \cos(n\Omega t) dt = 0 \quad (3-5)$$

即三角函数集满足式(3-1),因而是正交函数集。至于其完备性,这里不进行讨论。

集合  $\{\sin(\Omega t), \sin(2\Omega t), \dots, \sin(n\Omega t), \dots\}$  在  $(t_0, t_0 + T)$  区间  $(T = \frac{2\pi}{\Omega})$  内也是正交函数集,但它不是完备的,因为还有许多函数,如  $\cos(\Omega t), \cos(2\Omega t), \dots$ , 也与此集中的函数正交。

如果复函数集  $\{\varphi_i(t)\} (i=1, 2, \dots, n)$  在  $(t_1, t_2)$  区间内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i, & i = j \end{cases} \quad (3-6)$$

则称此复函数集为正交函数集。其中,  $\varphi_j^*(t)$  为函数  $\varphi_j(t)$  的共轭复数。

由欧拉公式可知,虚指数函数集  $\{e^{jn\Omega t}\} (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  在  $(t_0, t_0 + T)$  区间  $(T = \frac{2\pi}{\Omega})$  内也构成完备的正交函数集。它在  $(t_0, t_0 + T)$  区间内满足

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jm\Omega t} (e^{jn\Omega t})^* dt = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(m-n)\Omega t} dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T, & m = n \end{cases} \quad (3-7)$$

此外,沃尔什(Walsh)函数集、小波(Wavelet)函数集也可构成完备的正交函数集。

### 3.1.2 信号的正交分解

设  $n$  个函数  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$  在  $(t_1, t_2)$  区间构成一个正交函数空间。将任意函数  $f(t)$  用这  $n$  个正交函数的线性组合来近似,可表示为

$$f(t) \approx C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) + \dots + C_n \varphi_n(t) = \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \quad (3-8)$$

这里的问题是如何选择各系数  $C_j$  使  $f(t)$  与近似函数之间误差在  $(t_1, t_2)$  区间内最小,即取得最佳近似。这里的“误差最小”不是指平均误差最小,因为平均误差最小甚至为零时,也可能有较大的正误差和负误差在平均过程中相互抵消,以致不能正确反映两函数的近似程度。通常选择误差的均方值(或称方均值、均方误差)最小。均方误差为

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t)]^2 dt \quad (3-9)$$

为求得使均方误差最小的第  $i$  个系数  $C_i$ , 必须使

$$\frac{\partial \overline{\epsilon^2}}{\partial C_i} = \frac{\partial}{\partial C_i} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t)]^2 dt = 0 \quad (3-10)$$

展开式(3-10)中的被积函数并求导。因为序号不同的正交函数相乘的各项,其积分为零,而且所有不包含  $C_i$  的各项对  $C_i$  求导也等于零,所以只有两项不为零,写为

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \int_{t_1}^{t_2} [-2C_i f(t) \varphi_i(t) + C_i^2 \varphi_i^2(t)] dt = 0$$

交换微分与积分次序得

$$-2 \int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_i(t) dt + 2C_i \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t) dt = 0$$

于是求得系数

$$C_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t)dt} = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)dt \quad (3-11)$$

其中

$$K_i = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t)dt \quad (3-12)$$

式(3-11)就是满足最小均方误差条件下,式(3-8)中各系数  $C_i$  的求解式。此时,  $f(t)$  能获得最佳近似。

将按式(3-11)求得的系数  $C_j$  代入式(3-9),得最佳近似条件下的均方误差为

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[ f(t) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) \right]^2 dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt + \sum_{j=1}^n C_j^2 \int_{t_1}^{t_2} \varphi_j^2(t)dt - 2 \sum_{j=1}^n C_j \int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_j(t)dt \right] \end{aligned}$$

考虑  $\int_{t_1}^{t_2} \varphi_j^2(t)dt = K_j$ ,  $C_j = \frac{1}{K_j} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_j(t)dt$ , 得

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt + \sum_{j=1}^n C_j^2 K_j - 2 \sum_{j=1}^n C_j^2 K_j \right] \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{j=1}^n C_j^2 K_j \right] \end{aligned} \quad (3-13)$$

利用式(3-13)可直接求得在给定项数  $n$  条件下的最小均方误差。

由式(3-13)可见,在用正交函数近似  $f(t)$  时,项数越多,即  $n$  越大,则均方误差越小。

当  $n \rightarrow \infty$  时(为完备正交函数集),  $\overline{\epsilon^2} = 0$ 。此时有

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt = \sum_{j=1}^{\infty} C_j^2 K_j \quad (3-14)$$

式(3-14)称为帕斯瓦尔(Parseval)方程。

如果信号  $f(t)$  是电压或电流,那么式(3-14)等号左端是信号在  $(t_1, t_2)$  区间的能量,等号右端是在  $(t_1, t_2)$  区间各正交分量的能量之和。式(3-14)表明:在  $(t_1, t_2)$  区间信号  $f(t)$  所含能量恒等于  $f(t)$  在完备正交函数集中分解的各正交分量能量的总和。

这样,当  $n \rightarrow \infty$  时,式(3-8)可写为

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \varphi_j(t) \quad (3-15)$$

即函数  $f(t)$  在  $(t_1, t_2)$  区间可分解为无穷多项正交函数之和。

### 3.2 周期信号的傅里叶级数

由式(3-15)可知,周期信号  $f(t)$  在  $(t_0, t_0 + T)$  区间可以展开成在完备正交函数空间中的无穷级数。如果完备的正交函数集是三角函数集或指数函数集,那么,周期信号所展开成



的无穷级数就分别称为三角形式的傅里叶级数或指数形式的傅里叶级数,统称为傅里叶级数。

需要指出,只有当周期信号满足狄里赫利(Dirichlet)条件,即在一个周期内满足以下两点时,才能展开成傅里叶级数。

- (1) 连续或只有有限个第一类间断点;
- (2) 只有有限个极大值或极小值点。

一般来说,实际工程中所使用的周期信号都满足狄里赫利条件,均可展开为傅里叶级数。

### 3.2.1 三角形式的傅里叶级数

设周期信号  $f(t)$ ,其周期为  $T$ ,角频率  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ ,若满足狄里赫利条件,则  $f(t)$ 可分解为如下三角函数形式的傅里叶级数。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\Omega t) + a_2 \cos(2\Omega t) + \cdots + b_1 \sin(\Omega t) + b_2 \sin(2\Omega t) + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t) \end{aligned} \quad (3-16)$$

式(3-16)中的系数  $a_n$  和  $b_n$  称为傅里叶系数,其计算式分别为

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \quad (3-17)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt, \quad n = 1, 2, \cdots \quad (3-18)$$

式(3-17)和式(3-18)中的积分上下限也可取  $0 \sim T$ 。积分上下限是取  $-\frac{T}{2} \sim \frac{T}{2}$  还是  $0 \sim T$ ,

可根据  $f(t)$ 的函数形式(或波形)以怎样求解系数简便来确定。由式(3-17)和式(3-18)可见,傅里叶系数  $a_n$  和  $b_n$  都是关于  $n$ (或  $n\Omega$ )的函数,其中,  $a_n$  是关于  $n$ (或  $n\Omega$ )的偶函数,即  $a_{-n} = a_n$ ; 而  $b_n$  是关于  $n$ (或  $n\Omega$ )的奇函数,即  $b_{-n} = -b_n$ 。

将式(3-16)中同频率的余弦函数项和正弦函数项合并为带有初相位的余弦函数项,则三角形式的傅里叶级数可改写为如下形式。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2) + \cdots \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \end{aligned} \quad (3-19)$$

其中

$$\begin{cases} A_0 = a_0 \\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots \\ \varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \end{cases} \quad (3-20)$$

反过来,将式(3-19)的形式转化为式(3-16),则又可得



傅里叶级数的起源



三角函数傅里叶级数

$$\begin{cases} a_0 = A_0 \\ a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n = -A_n \sin \varphi_n \end{cases} \quad (3-21)$$

由式(3-20)可见,  $A_n$  是关于  $n$  (或  $n\Omega$ ) 的偶函数, 即  $A_{-n} = A_n$ ; 而  $\varphi_n$  是关于  $n$  (或  $n\Omega$ ) 的奇函数, 即  $\varphi_{-n} = -\varphi_n$ 。

式(3-19)是傅里叶级数三角函数形式的另一种表示, 它表明任何满足狄里赫利条件的周期信号可以分解为直流和许多余弦分量之和。其中, 第一项  $\frac{A_0}{2}$  是常数项, 它是周期信号  $f(t)$  中所包含的直流分量, 也是  $f(t)$  在一个周期内的平均值; 第二项  $A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$  称为基波或一次谐波, 它的角频率与原周期信号相同; 第三项  $A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2)$  称为二次谐波, 它的角频率是基波角频率的 2 倍; 以此类推, 还有三次, 四次, ... 谐波。一般而言,  $A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$  称为  $n$  次谐波。式(3-19)表明, 周期信号可以分解为各次谐波分量之和(直流分量可看成是零次谐波)。

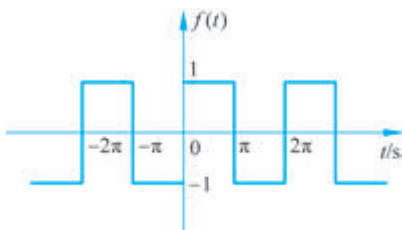


图 3-1 周期方波信号

**例 3-1** 将如图 3-1 所示的周期方波信号  $f(t)$  展开为傅里叶级数。

**解** 由图 3-1 可知, 该周期信号  $f(t)$  的周期为

$T = 2\pi$ s, 角频率  $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ rad/s。根据式(3-17)和式(3-18)可得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} [-\sin(nt)] \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} [\sin(nt)] \Big|_0^{\pi} \\ &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} [\cos(nt)] \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} [-\cos(nt)] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

代入式(3-16)可得  $f(t)$  的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \frac{1}{7} \sin 7t + \dots \right] \quad (3-22)$$

由此可知  $f(t)$  只含奇次谐波分量。用各次谐波叠加合成周期方波  $f(t)$  的过程如图 3-2 所示。

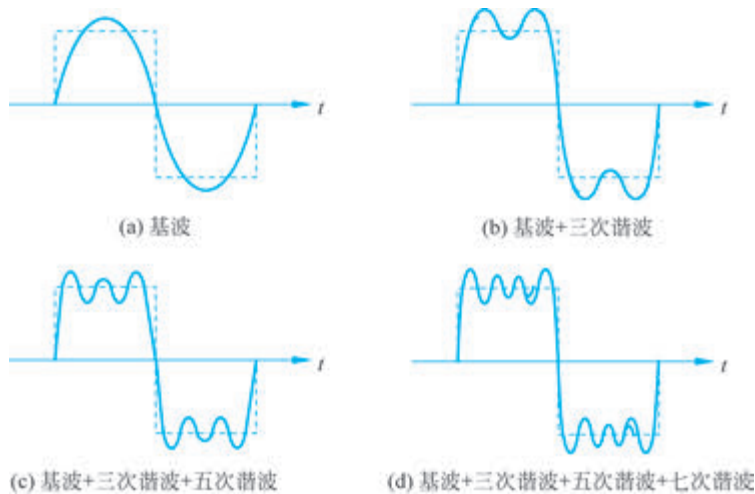


图 3-2 方波的谐波叠加过程

由图 3-2 可见,所用谐波分量越多,合成波形就越接近于原方波信号。还可以看出,频率较低的谐波其振幅较大,它们是组成方波信号的主体;而频率较高的高次谐波振幅较小,它们主要影响合成波形的陡峭程度。

从图 3-2 中还可以看出,合成波形所含谐波分量越多,合成波形中的尖峰越靠近间断点,但尖峰幅度并未明显减小。无论  $n$  取得多大(只要不是无限大),该峰值趋于一个常数,大约等于跳变值的 8.95%,并从间断点开始以起伏振荡的形式逐渐衰减下去。这种现象称为吉布斯(Gibbs)现象

### 3.2.2 波形的对称性与谐波特性

若周期信号  $f(t)$  的波形具有某些对称特性,那么,其傅里叶级数中某些系数将等于零,从而其谐波特性将变得简单。波形的对称性有两类,一类是整周期对称,如偶函数和奇函数;另一类是半周期对称,如奇谐函数和偶谐函数。前者的傅里叶级数展开式中只含有余弦项或正弦项;而后者的傅里叶级数展开式中只含有奇次谐波项或偶次谐波项。

#### 1. $f(t)$ 为偶函数

若函数  $f(t)$  是时间  $t$  的偶函数,即  $f(-t) = f(t)$ ,则其波形关于纵坐标轴对称,如

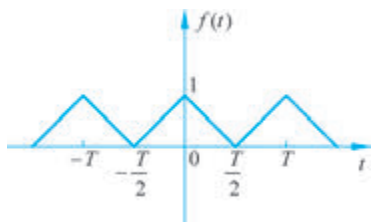


图 3-3 偶函数举例

图 3-3 所示。

当  $f(t)$  是  $t$  的偶函数时,傅里叶级数的系数计算式中的被积函数  $f(t)\cos(n\Omega t)$  是  $t$  的偶函数,而  $f(t)\sin(n\Omega t)$  是  $t$  的奇函数。当被积函数为偶函数时,在一个周期内的积分等于其在半个周期内积分再乘以 2;而当被积函数为奇函数时,在一个周期内积分为 0。于是,傅里叶级数中的系数为



第 19 集  
微课视频



谐波的动画

$$\begin{cases} a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = 0, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3-23)$$

因此,偶函数的傅里叶级数中不含有正弦分量,只可能含有直流分量和余弦分量。需要注意的是,并不是所有偶函数都存在直流分量。波形是否含有直流分量,可以从波形直观地判断:以横坐标轴为界,其波形的上下面积若相等,则无直流分量,否则有直流分量。

## 2. $f(t)$ 为奇函数

若函数  $f(t)$  是时间  $t$  的奇函数,即  $f(-t) = -f(t)$ , 则其波形关于原点对称,如图 3-4 所示。

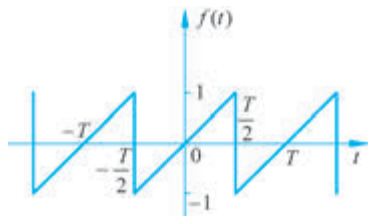


图 3-4 奇函数举例

当  $f(t)$  是  $t$  的奇函数时,则傅里叶级数的系数计算式中的被积函数  $f(t) \cos(n\Omega t)$  是  $t$  的奇函数,而  $f(t) \sin(n\Omega t)$  是  $t$  的偶函数。于是,傅里叶级数中的系数为

$$\begin{cases} a_n = 0, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3-24)$$

因此,奇函数的傅里叶级数中不含有直流分量和余弦分量,只可能含有正弦分量。

实际上,任意函数  $f(t)$  都可以分解为奇函数和偶函数两部分,即

$$f(t) = f_{\text{od}}(t) + f_{\text{ev}}(t)$$

其中,  $f_{\text{od}}(t)$  为奇函数,满足  $f_{\text{od}}(-t) = -f_{\text{od}}(t)$ ;  $f_{\text{ev}}(t)$  为偶函数,满足  $f_{\text{ev}}(-t) = f_{\text{ev}}(t)$ 。

由于  $f(-t) = f_{\text{od}}(-t) + f_{\text{ev}}(-t) = -f_{\text{od}}(t) + f_{\text{ev}}(t)$ , 所以有

$$\begin{cases} f_{\text{od}}(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \\ f_{\text{ev}}(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \end{cases} \quad (3-25)$$

图 3-5 所示为一个周期锯齿波信号的奇、偶函数分解。

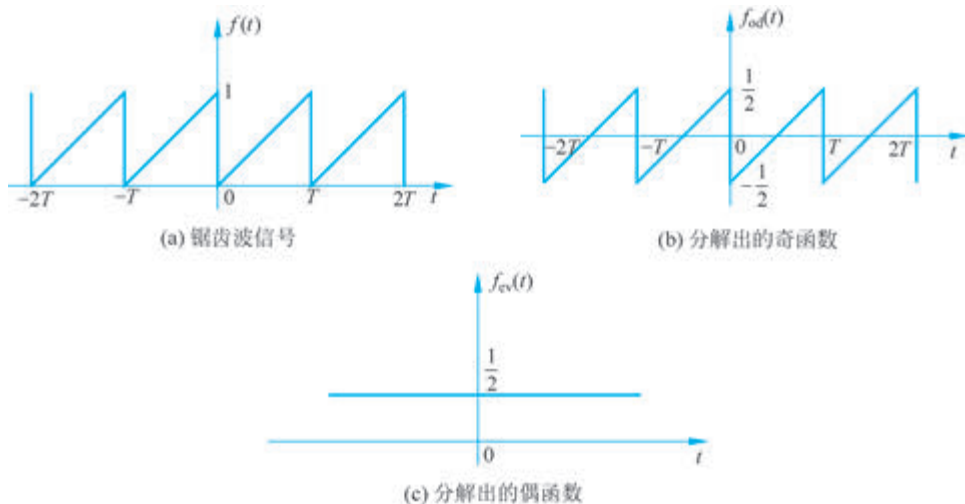


图 3-5 周期锯齿波信号的奇、偶函数分解

### 3. $f(t)$ 为奇谐函数

如果函数  $f(t)$  的波形沿时间轴向左或向右平移半个周期后, 与原波形相对于时间轴对称, 即满足  $f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = -f(t)$ , 则称这种函数为半波对称函数或奇谐函数, 如图 3-6 所示。

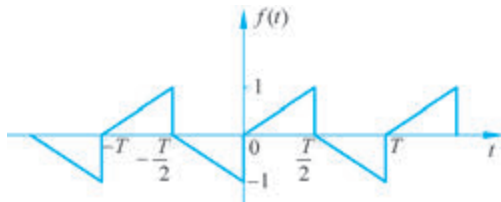


图 3-6 奇谐函数举例

对于奇谐函数, 其傅里叶级数的系数为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} f\left(t - \frac{T}{2}\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \right] \end{aligned}$$

注意到

$$f\left(t - \frac{T}{2}\right) = -f(t)$$

因此

$$a_0 = \frac{2}{T} \left[ -\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \right] = 0 \quad (3-26)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt = \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \cos(n\Omega t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} f\left(t - \frac{T}{2}\right) \cos n\Omega \left(t - \frac{T}{2}\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt \right] \end{aligned}$$

注意到

$$f\left(t - \frac{T}{2}\right) = -f(t)$$

$$\cos n\Omega \left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} \cos n\Omega t, & n = 2, 4, 6, \dots \\ -\cos n\Omega t, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

可求出

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3-27)$$

同理, 可求出

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3-28)$$

因此, 奇谐函数的傅里叶级数中只含有奇次谐波分量, 而不含有直流及偶次谐波分量。

#### 4. $f(t)$ 为偶谐函数

与奇谐函数相对应,如果函数  $f(t)$  的波形沿时间轴向左或向右平移半个周期后,与原波形完全重合,即满足  $f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = f(t)$ ,则称这种函数为半周期重叠函数或偶谐函数。偶谐函数的一个例子是经过全波整流后的电流,如图 3-7 所示。

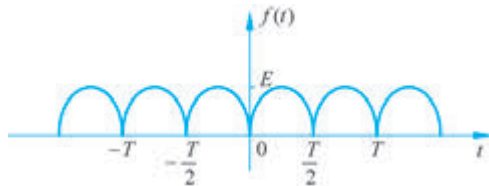


图 3-7 偶谐函数举例

偶谐函数实际上是周期为  $\frac{T}{2}$  的函数,其基波角频率为  $2\pi/\frac{T}{2} = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} = 2\Omega$ 。因此,按以  $T$  为周期,即以  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$  为基波角频率进行谐波分析,当然

就不会存在奇次谐波分量。偶谐函数的傅里叶级数中只可能含有直流分量和偶次谐波分量。

了解了周期信号的奇偶性和奇谐、偶谐等对称性后,就可以对一些波形的谐波分量迅速地作出判断,并便于迅速计算出傅里叶系数。

**例 3-2** 将图 3-8(a)所示周期信号展开为三角形式的傅里叶级数。

**解** 由图 3-8(a)可以看出,  $f(t)$  为偶谐函数,因此它的傅里叶级数中只包含直流分量与偶次谐波分量。并且,观察发现,若将  $f(t)$  沿纵坐标轴向下平移  $\frac{1}{2}$  (即从  $f(t)$  中去掉直流分量  $\frac{1}{2}$ ) 后,便成为如图 3-8(b)所示的  $f_1(t)$ 。很显然,  $f_1(t)$  是奇函数,  $f_1(t)$  的傅里叶级数中只包含正弦分量。综合以上分析可知,  $f(t)$  的傅里叶级数中只含有直流分量和偶次正弦分量。

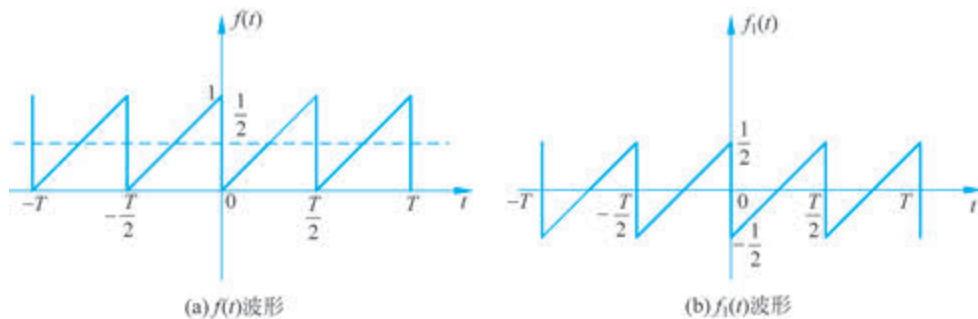


图 3-8 例 3-2 波形图

易知

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \\ a_n &= 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= 0, \quad n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

由式(3-24)并应用部分积分法得

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left( \frac{2}{T}t - \frac{1}{2} \right) \sin(n\Omega t) dt \\
&= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T}t \sin(n\Omega t) dt - \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(n\Omega t) dt \\
&= -\frac{8}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{n\Omega} t d[\cos(n\Omega t)] + \frac{2 \cos(n\Omega t)}{T n\Omega} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{8}{T^2 n\Omega} [t \cdot \cos(n\Omega t)] \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{-8}{T^2 n\Omega} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(n\Omega t) dt + 0 \\
&= -\frac{2}{n\pi} - 0 + 0 = -\frac{2}{n\pi}, \quad n = 2, 4, 6, \dots
\end{aligned}$$

故  $f(t)$  三角形的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2} \sin 2\Omega t + \frac{1}{4} \sin 4\Omega t + \frac{1}{6} \sin 6\Omega t + \frac{1}{8} \sin 8\Omega t + \dots \right) \quad (3-29)$$

MATLAB 代码如下。

```

clc;clear;
T=10; %信号周期
omig=(2*pi)/T; %基波角频率
t=-T:0.01:T;
n=50; %傅里叶级数谐波次数,该值越大,越接近原波形
f=0; %初始值
for i=2:2:n
    f=f+(2/pi)*(1/i)*sin(i*omig*t);
end
ff=1/2-f; %三角形的傅里叶级数展开形式
plot(t,ff);
set(gca,'FontName','Times New Roman');
title('三角形形式傅里叶级数','FontName','宋体');

```

运行结果如图 3-9 所示。

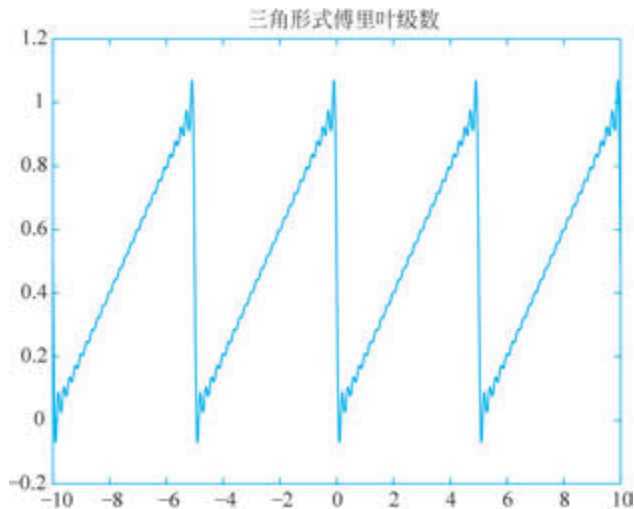


图 3-9 MATLAB 运行结果(例 3-2)

### 3.2.3 指数形式的傅里叶级数

若周期为  $T$ , 角频率  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$  的周期信号  $f(t)$  满足狄里赫利条件, 则它也可以展开为指数形式的傅里叶级数。

指数形式的傅里叶级数可由三角形式的傅里叶级数推出。根据欧拉公式

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

式(3-19)可以改写为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} [e^{j(n\Omega t + \varphi_n)} + e^{-j(n\Omega t + \varphi_n)}] \\ &= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-j\varphi_n} e^{-jn\Omega t} \end{aligned} \quad (3-30)$$

将式(3-30)中第三项的  $n$  用  $-n$  代换, 并考虑  $A_{-n} = A_n, \varphi_{-n} = -\varphi_n$ , 则式(3-30)可写为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} A_{-n} e^{-j\varphi_{-n}} e^{jn\Omega t} \\ &= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} \end{aligned} \quad (3-31)$$

若将式(3-31)中的  $A_0$  写成  $A_0 e^{j\varphi_0} e^{j0\Omega t}$  (其中  $\varphi_0 = 0$ ), 则式(3-31)可写为

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} \quad (3-32)$$

令复数量  $\frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = |F_n| e^{j\varphi_n} = F_n$ , 称其为复傅里叶系数, 简称为傅里叶系数, 其模为  $|F_n|$ , 相角为  $\varphi_n$ , 则可得傅里叶级数的指数形式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad (3-33)$$

根据式(3-21), 式(3-33)中傅里叶系数

$$F_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} (A_n \cos \varphi_n + j A_n \sin \varphi_n) = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \quad (3-34)$$

将式(3-17)和式(3-18)代入式(3-34), 可得

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt - j \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) [\cos(n\Omega t) - j \sin(n\Omega t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (3-35)$$

同样地, 式(3-35)中的积分上下限也可以取  $0 \sim T$ 。

由式(3-34)还可求得三角形式的傅里叶级数和指数形式的傅里叶级数系数之间的关



系,即

$$\begin{cases} F_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2} \\ |F_n| = \frac{1}{2}A_n = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \\ \varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \end{cases} \quad (3-36)$$

由式(3-36)可见,  $|F_n|$  是关于  $n$  (或  $n\Omega$ ) 的偶函数, 即  $|F_{-n}| = |F_n|$ ; 而  $\varphi_n$  是关于  $n$  (或  $n\Omega$ ) 的奇函数, 即  $\varphi_{-n} = -\varphi_n$ 。

式(3-33)表明, 任意周期信号可分解为许多不同频率的虚指数信号 ( $e^{jn\Omega t}$ ) 之和, 其各分量的复振幅为  $F_n$ 。

**例 3-3** 求如图 3-10 所示周期信号的指数形式傅里叶级数。

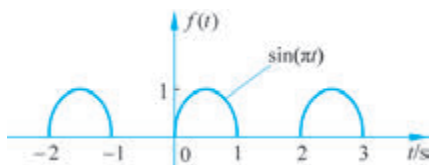


图 3-10 例 3-3 周期信号

**解** 由图 3-10 可知, 该周期信号的周期  $T =$

2s, 角频率  $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}$ , 且有

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\pi t), & 0 < t < 1 \\ 0, & -1 < t < 0 \end{cases}$$

根据式(3-35)可得

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-jn\pi t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(\pi t) e^{-jn\pi t} dt = \frac{1 + e^{-jn\pi}}{2\pi(1 - n^2)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

故

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 + e^{-jn\pi}}{2\pi(1 - n^2)} e^{jn\Omega t} \quad (3-37)$$

MATLAB 代码如下。

```
clc;clear;
T=2; %信号周期
omig=(2*pi)/T; %基波角频率
t=-T:0.01:T;
num=10000; %该值实际为无穷大
f=0; %初始值
for n=-num:num %指数形式的傅里叶级数展开形式
f=f+((1+exp(-1i*n*pi))/(2*pi*(1-n^2+eps))).*exp(1i*n*omig*t);
end %1i为复数单位,(1-n^2+eps)是为了防止分母为0结果为无效值
plot(t,abs(f));
set(gca,'FontName','Times New Roman');
title('指数形式傅里叶级数','FontName','宋体');
```

运行结果如图 3-11 所示。

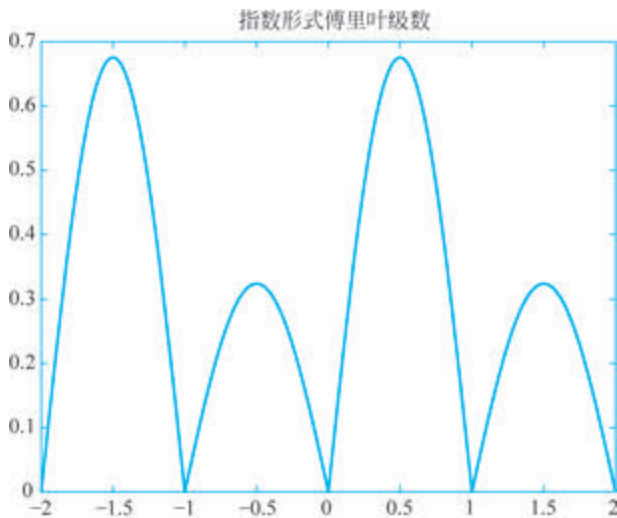


图 3-11 MATLAB 运行结果(例 3-3)

### 3.2.4 周期信号的平均功率

周期信号一般是功率信号,其平均功率定义为它在  $1\Omega$  电阻上消耗的平均功率,即

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \quad (3-38)$$

式(3-38)中的积分上下限也可以取  $0 \sim T$ 。

将式(3-16)表示的三角形的傅里叶级数展开式代入式(3-38),得

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)] \right\}^2 dt \quad (3-39)$$

将式(3-39)中的被积函数展开,在展开式中具有  $\cos(n\Omega t)$  形式的余弦项和具有  $\sin(n\Omega t)$  形式的正弦项,在一个周期内的积分都等于零;具有  $\cos(n\Omega t) \cos(m\Omega t)$  形式的项和  $\sin(n\Omega t) \sin(m\Omega t)$  形式的项(参见式(3-18)),当  $m \neq n$  时其积分为零,当  $m = n$  时其积分值为  $\frac{T}{2}$ ;具有  $\cos(n\Omega t) \sin(m\Omega t)$  形式的项(参见式(3-18)),其积分都为零。因此,式(3-39)的积分结果为

$$P = \left( \frac{a_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (3-40)$$

根据各种形式的傅里叶系数之间的关系,式(3-40)又可改写为

$$P = \left( \frac{A_0}{2} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2 = |F_0|^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} |F_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \quad (3-41)$$

式(3-40)和式(3-41)称为帕斯瓦尔恒等式。它表明,周期信号的平均功率等于其所分解出的直流分量功率与各次谐波功率之和。

**例 3-4** 试求周期信号  $f(t) = 1 - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$  的平均功率。

**解** 按式(3-41)计算  $f(t)$  的平均功率为

$$P = 1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{37}{32} \text{W}$$

### 3.3 周期信号的频谱

#### 3.3.1 周期信号频谱简介

如前所述,任意满足狄里赫利条件的周期信号均可展开为三角形式或指数形式的傅里叶级数。这样一种数学表示式,虽然能完整而准确地表示信号分解的结果,但往往不够直观,不能一目了然。为了能既方便又直观地表示一个信号中含有哪些频率分量,各分量所占的比重怎样,就需要采用一种称为频谱图的表示方法。从广义上说,信号的某种特征量随信号频率变化的关系称为信号的频谱,所画出的图形就称为信号的频谱图。

周期信号的频谱是指周期信号中各分量的幅值、相位随频率的变化关系。根据如式(3-19)所示的傅里叶级数的三角形式,将各次谐波的振幅  $A_n$  与  $\omega$  的关系和各次谐波的初相角  $\varphi_n$  与  $\omega$  的关系分别画在以  $\omega$  为横轴的平面上得到两个线图,如图 3-12(a)和图 3-12(b)所示,分别称为幅度(振幅)频谱图(简称幅度谱)和相位频谱图(简称相位谱)。图中每条竖线代表该频率分量的幅度或初相角,称为谱线。在幅度谱中,连接各谱线顶点的曲线(见图中虚线)称为包络线,它反映了各分量幅度随频率变化的情况。因为  $n \geq 0$ ,所以称这种频谱为单边谱。



第 21 集  
微课视频



抽样信号的  
频谱

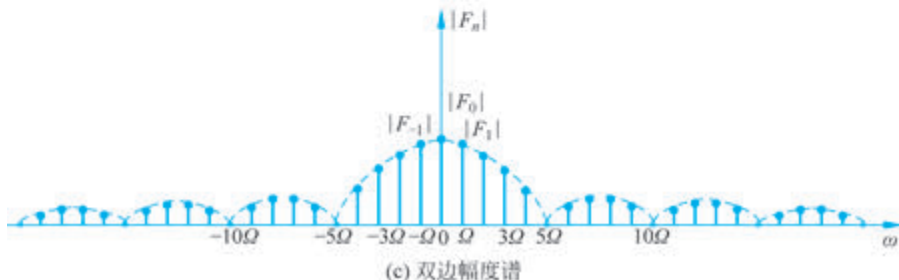
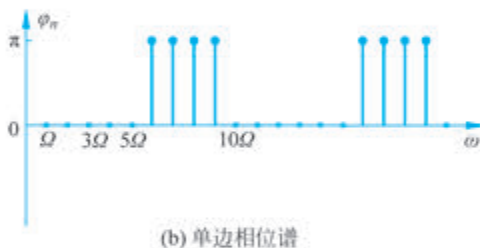
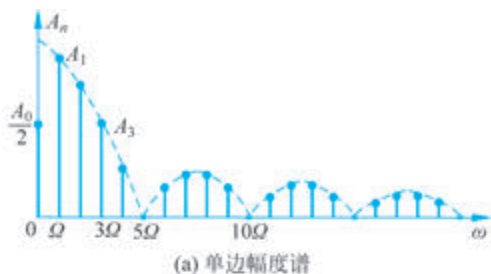


图 3-12 周期信号的频谱

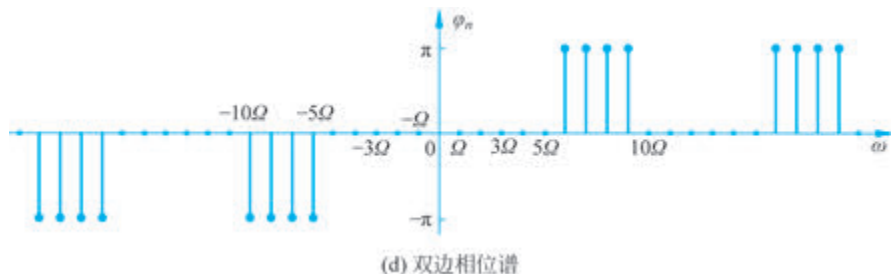


图 3-12 (续)

类似地,也可按如式(3-33)所示的傅里叶级数的指数形式,将各虚指数函数的幅度  $|F_n|$  与  $\omega$  的关系和各虚指数函数的初相角  $\varphi_n$  与  $\omega$  的关系画在以  $\omega$  为横轴的平面上,如图 3-12(c) 和图 3-12(d)所示,由于  $-\infty < n < \infty$ ,所以分别称为双边幅度谱和双边相位谱。在双边谱图中,由于  $|F_n|$  是关于  $n$  的偶函数, $\varphi_n$  是关于  $n$  的奇函数,所以双边幅度谱呈偶对称,而双边相位谱呈奇对称。由于  $F_n$  一般是复函数,所以这种频谱也称为复数频谱(简称复频谱)。实际上,若  $F_n$  为实数,那么也可用  $F_n$  的正负来表示相位为 0 或  $\pi$ ,直接画  $F_n$  与  $\omega$  的关系,即将幅度谱和相位谱画在一张图上。

**例 3-5** 周期信号  $f(t) = 1 - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$ , 试求该周期信号的基波周期  $T$ 、基波角频率  $\Omega$ , 并画出它的单边频谱图。

**解** 首先按式(3-19)将  $f(t)$  改写成傅里叶级数三角形式的标准式,即

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{2\pi}{3} + \pi\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (3-42)$$

显然,1 是该信号的直流分量;  $\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right)$  的周期  $T_1 = 8\text{s}$ ,  $\frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{2\pi}{3}\right)$  的周期  $T_2 = 6\text{s}$ , 所以  $f(t)$  的周期  $T = 24\text{s}$ , 基波角频率  $\Omega = 2\pi/T = \pi/12 \text{ rad/s}$ 。

由此可画出如图 3-13 所示的  $f(t)$  的单边幅度谱和单边相位谱。

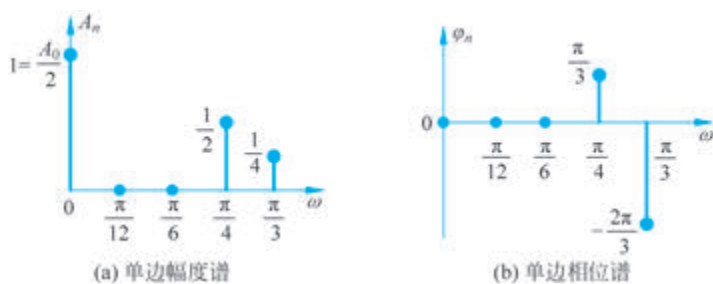


图 3-13 例 3-5 频谱图

**例 3-6** 试画出周期信号  $f(t) = 1 + \sin\omega_1 t + 2\cos\omega_1 t + \cos\left(2\omega_1 t + \frac{\pi}{4}\right)$  的双边频谱图。

**解** 将  $f(t)$  根据欧拉公式整理成如式(3-33)所示的傅里叶级数指数形式的标准式,即

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2j} (e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}) + \frac{2}{2} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) + \frac{1}{2} \left[ e^{(2j\omega_1 t + \frac{\pi}{4})} + e^{-(2j\omega_1 t + \frac{\pi}{4})} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) e^{j\omega_1 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right) e^{-j\omega_1 t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j2\omega_1 t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j2\omega_1 t} \\
 &= \sum_{n=-2}^2 F_n e^{jn\omega_1 t}
 \end{aligned} \tag{3-43}$$

由此可知

$$\begin{aligned}
 F_0 &= 1, \quad F_1 = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) = 1.12e^{-j0.15\pi}, \quad F_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = 1.12e^{j0.15\pi} \\
 F_2 &= \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad F_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

故  $f(t)$  的双边幅度谱、双边相位谱如图 3-14 所示。

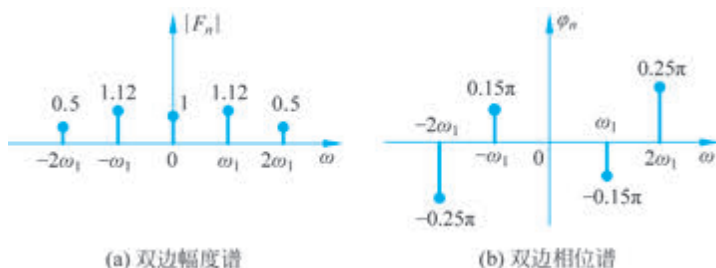


图 3-14 例 3-6 频谱图

通过例 3-5 和例 3-6 可以看出,任何周期信号的频谱都具有如下特点。

- (1) 离散性: 谱线是离散的而不是连续的,这种频谱称为离散频谱。
- (2) 谐波性: 谱线只出现在基波角频率  $\Omega$  的整数倍上。
- (3) 收敛性: 幅度谱的谱线高度随着  $n \rightarrow \infty$  而逐渐衰减为零。

### 3.3.2 周期矩形脉冲信号的频谱

周期矩形脉冲信号是一种典型的周期信号,其频谱分析应用广泛。下面以它为例来具体讨论周期信号频谱的特点。设周期矩形脉冲信号  $f(t)$  的幅度为 1,脉冲宽度为  $\tau$ ,周期为  $T$ ,如图 3-15 所示。

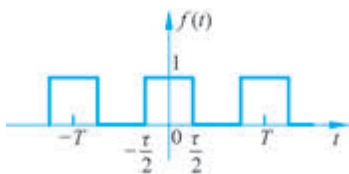


图 3-15 周期矩形脉冲信号

根据式(3-33)可以求得复傅里叶级数系数

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \frac{e^{-jn\Omega t}}{-jn\Omega} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{T} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}{n\Omega} \\
 &= \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}} = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin\frac{n\pi\tau}{T}}{\frac{n\pi\tau}{T}}, \\
 n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots
 \end{aligned} \tag{3-44}$$

如令

$$\text{Sa}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin x}{x} \tag{3-45}$$



第 22 集  
微课视频



傅里叶时域  
尺度变换

称其为取样函数,可知  $\text{Sa}(x)$  是关于  $x$  的偶函数,当  $x \rightarrow 0$  时,  $\text{Sa}(x) = 1$ 。

引入取样函数后,式(3-44)可以写为

$$F_n = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3-46)$$

由于  $F_n$  为实数,因此可将幅度谱与相位谱合画成一个频谱图。图 3-16 画出了  $T = 5\tau$  的周期矩形脉冲信号的频谱图。

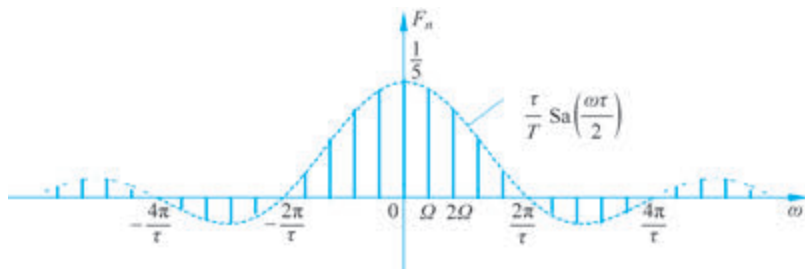


图 3-16 周期矩形脉冲信号的频谱图

从图 3-16 的频谱图中可以看出以下特点。

(1) 周期矩形脉冲信号的频谱具有一般周期信号频谱的特点。它们的频谱都是离散的,谱线只出现在基波角频率  $\Omega$  的整数倍(即各次谐波角频率)上;相邻谱线的间隔为  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ ,与周期  $T$  成反比, $T$  越大,谱线越密集,反之越稀疏;谱线高度(各次谐波的振幅)具有收敛性,总趋势减小,当谐波次数无限增大时,谱线高度将趋近于无穷小。

(2) 周期矩形脉冲信号的频谱,其各谱线的幅度包络线按取样函数  $\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$  的规律变化。在  $\frac{\omega\tau}{2} = m\pi (m = \pm 1, \pm 2, \dots)$  各处,即  $\omega = \frac{2m\pi}{\tau}$  的各处,包络为 0。

(3) 周期矩形脉冲信号的频谱,角频率  $\omega$  从 0 到第一个零点,或任意两个相邻零点之间的谱线数目是由信号的脉宽和周期的比值来决定。图 3-16 所示的频谱对应的是  $T = 5\tau$  时的情况。由于  $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$  是第一个零点处的角频率,而相邻谱线的间隔  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ ,所以角频率  $\omega$  在

$\left[0, \frac{2\pi}{\tau}\right]$ , 共有  $\frac{\tau}{\Omega} = \frac{T}{\tau} = 5$  个谱线间隔,6 根谱线。因此可以推出,若  $n = \frac{T}{\tau}$ ,则角频率  $\omega$  从 0 到第一个零点或任意两个相邻零点之间(包含两个边界频率点)的谱线数目就为  $n+1$ 。

(4) 周期矩形脉冲信号的频谱包含无穷多条谱线,也就是说,它可以分解成无穷多个频率分量。由于各分量的幅度随频率的增高而减小,它的主要能量(平均功率)集中在第一个零点( $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$  或  $f = \frac{1}{\tau}$ )之内。在允许一定失真的条件下,只需传输频率较低的那些分量就够了。通常把  $0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{\tau}$  ( $0 \leq f \leq \frac{1}{\tau}$ ) 这段频率范围称为周期矩形脉冲信号的频带宽度或带宽,记作  $B_\omega$  或  $B_f$ ,有

$$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (3-47)$$

$$B_f = \frac{1}{\tau} \quad (3-48)$$

由式(3-47)和式(3-48)可知,频带宽度与脉冲宽度 $\tau$ 成反比。这种信号的频带宽度与时间宽度成反比的性质称为时频展缩特性。

顺便指出,对于其他一般的周期信号,通常将幅度下降为 $0.1|F_n|_{\max}$ 的频率区间定义为频带宽度。

(5) 当周期矩形脉冲信号的周期 $T$ 一定,而脉冲宽度 $\tau$ 改变时,相邻谱线的间隔保持不变。脉冲宽度越窄,第一个零点处的频率越高,即信号的带宽越宽,两零点之间的谱线数目越多,并且频谱的幅度也相应减小。图3-17画出了周期相同、脉冲宽度不同的矩形脉冲信号及其频谱。

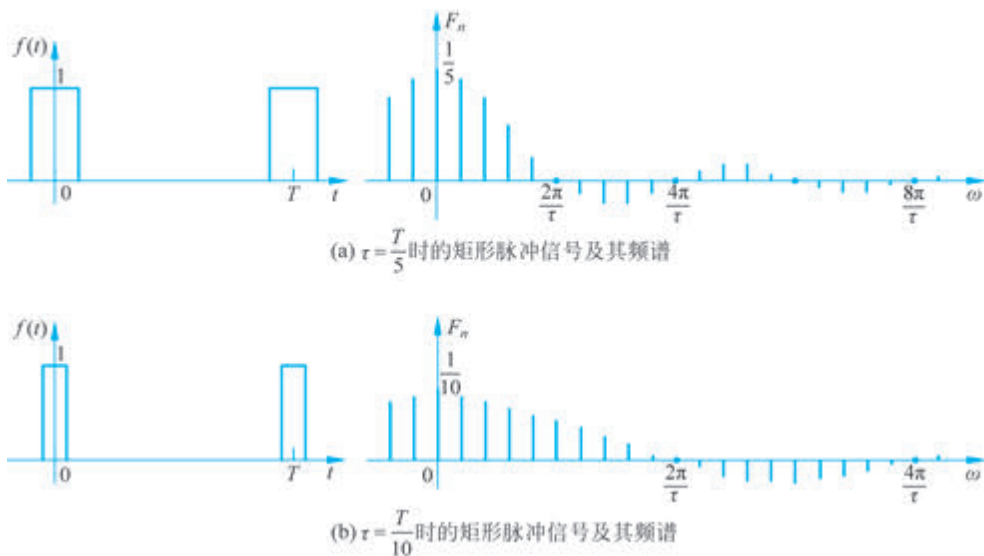


图 3-17 脉冲宽度与频谱的关系

(6) 当周期矩形脉冲信号的脉冲宽度 $\tau$ 一定,而周期 $T$ 改变时,谱线包络线的零点所在位置保持不变。当周期增大时,相邻谱线的间隔将减小,频谱变密,频谱的幅度也将相应减小。图3-18画出了脉冲宽度相同、周期不同的矩形脉冲信号及其频谱。

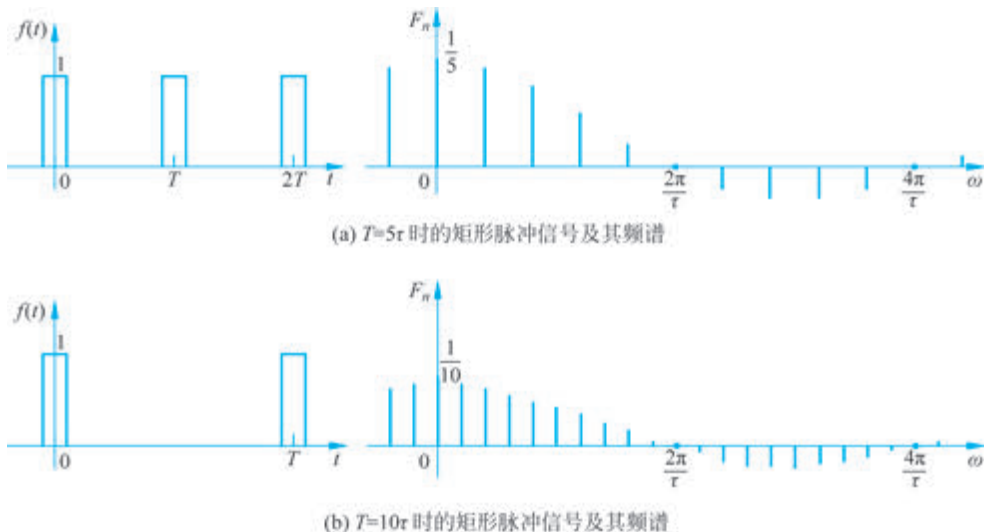


图 3-18 周期与频谱的关系

如果周期  $T$  无限增长(这时就成为非周期信号),那么相邻谱线的间隔将趋近于零,各频率分量的幅度也将趋近于无穷小,周期信号的离散频谱就过渡为非周期信号的连续频谱。

### 3.4 非周期信号的频谱

#### 3.4.1 傅里叶变换

当周期矩形脉冲信号的周期  $T$  趋于无穷大时,就由周期信号转化为非周期信号。对周期信号而言,其频谱是离散谱,相邻谱线的间隔  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ 。当周期信号的周期  $T$  趋于无穷大时,相邻谱线的间隔将趋于无限小,这时就由周期信号的离散频谱变成了非周期信号的连续频谱。同时,由式(3-46)可知,各频率分量的幅度也将趋于无穷小,不过这些无穷小量之间相对大小仍有区别。这样,就不能再用  $F_n$  表示非周期信号的频谱。为了描述非周期信号的频谱特性,有必要引入一个新的概念。令

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{F_n}{1/T} = \lim_{T \rightarrow \infty} F_n T \quad (3-49)$$

由式(3-49)可知, $F(j\omega)$ 表示单位频带的复频谱,因此称  $F(j\omega)$ 为频谱密度函数,这就如同将单位体积内的质量定义为物体的质量密度一样。

由式(3-35)和式(3-33)可得

$$F_n T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \quad (3-50)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n T e^{jn\Omega t} \frac{1}{T} \quad (3-51)$$

考虑到当周期  $T \rightarrow \infty, \Omega \rightarrow$  无穷小时,  $\Omega$  可记为  $d\omega$ ,  $\frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi}$  可记为  $\frac{d\omega}{2\pi}$ ,  $n\Omega$  由离散变量变成了连续变量,可记为  $\omega$ ,同时求和转变为积分。于是,式(3-50)和式(3-51)变成

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_n T \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-52)$$

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-53)$$

式(3-52)称为傅里叶正变换,式(3-53)称为傅里叶逆变换,两式合称为傅里叶变换对,它们也可简记为

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad (3-54)$$

或

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad (3-55)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] \quad (3-56)$$

$F(j\omega)$ 称为  $f(t)$ 的傅里叶变换或频谱密度函数,简称频谱;  $f(t)$ 称为  $F(j\omega)$ 的傅里叶逆变换或原函数。式(3-53)表明,非周期信号可看作由众多不同频率的虚指数分量  $e^{j\omega t}$  所组成的。

如果上述变换中的自变量不用角频率  $\omega$  而用频率  $f$ ,根据  $\omega = 2\pi f$ ,式(3-52)和式(3-53)可



第23集  
微课视频



连续信号周期  
到非周期变化

写为

$$F(jf) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3-57)$$

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j2\pi ft} d\omega \quad (3-58)$$

一般地, 频谱密度函数  $F(j\omega)$  是关于  $\omega$  的复函数, 可写为

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3-59)$$

$|F(j\omega)|$  是频谱密度函数的模, 它表示信号  $f(t)$  中各频率分量的相对大小, 而由式(3-53)

可知, 各频率分量的实际幅度是  $\frac{|F(j\omega)| d\omega}{2\pi}$ , 它是一个无穷小量, 因此非周期信号的频谱不

能再用幅度表示, 而要改用密度函数来表示。  $\varphi(\omega)$  是频谱密度函数的相角, 它表示信号  $f(t)$  中各频率分量的相位关系。可以证明(见 3.5 节), 若  $f(t)$  是实函数, 则  $|F(j\omega)|$  是关于  $\omega$  的偶函数, 即  $|F(-j\omega)| = |F(j\omega)|$ ; 而  $\varphi(\omega)$  是关于  $\omega$  的奇函数, 即  $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$ 。与周期信号的频谱类似, 把  $|F(j\omega)| \sim \omega$  和  $\varphi(\omega) \sim \omega$  的关系曲线分别称为非周期信号的幅频频谱图(简称幅度谱)和相位频谱图(简称相位谱), 它们都是角频率  $\omega$  的连续函数。

和周期信号一样, 也可将式(3-53)改写成三角函数形式, 即

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega + \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \end{aligned} \quad (3-60)$$

因为  $|F(j\omega)|$  是  $\omega$  的偶函数, 而  $\varphi(\omega)$  是  $\omega$  的奇函数, 所以式(3-61)中第一个积分的被积函数是偶函数; 第二个积分的被积函数是奇函数, 积分值应为零。故有

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \quad (3-61)$$

可见, 非周期信号与周期信号一样, 也可以分解为许多不同频率的正、余弦分量。不同的是, 由于非周期信号的周期趋于无穷大, 基波角频率趋于无穷小, 所以它包含了从零到无限高的所有频率分量。

应当指出, 前面推导傅里叶变换的过程并未遵循严格的数学步骤。实际上, 傅里叶变换需要满足一定的条件才能存在, 而这种条件类似于傅里叶级数的狄里赫利条件。可以证明, 信号  $f(t)$  的傅里叶变换存在的充分条件是在无限区间内绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (3-62)$$

但这并非必要条件。当引入广义函数的概念后, 许多不满足绝对可积条件的信号(如周期信号、阶跃函数、符号函数等)也能进行傅里叶变换。

## 3.4.2 典型非周期信号的傅里叶变换

### 1. 矩形脉冲信号(门函数)

已知矩形脉冲信号的表达式为



第 24 集  
微课视频

$$g_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (3-63)$$

其中,  $\tau$  为脉冲宽度。它的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}}}{-j\omega} = \frac{2\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega} = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (3-64)$$

从而

$$|F(j\omega)| = \tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right| \quad (3-65)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \\ \pm\pi, & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+2)\pi}{\tau} \end{cases}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (3-66)$$

因为  $F(j\omega)$  是实函数, 通常用一条  $F(j\omega)$  曲线就能同时表示幅度频谱  $|F(j\omega)|$  和相位频谱  $\varphi(\omega)$ , 如图 3-19 所示。

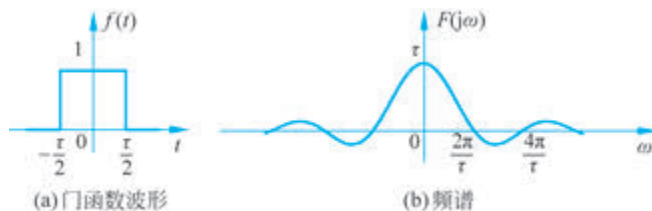


图 3-19 矩形脉冲信号的波形及频谱

由图 3-19 可见, 虽然矩形脉冲信号在时域中集中于有限的范围内, 但是它的频谱却以  $\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$  的规律变化, 分布在无限宽的频率范围上, 而其信号能量则主要集中于  $\omega = 0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$  (或  $f = 0 \sim \frac{1}{\tau}$ ) 频率范围内。因而, 通常认为这种信号占有频率范围(即频带宽度)  $B_{\omega}$  近似为  $\frac{2\pi}{\tau}$  (或  $B_f$  近似为  $\frac{1}{\tau}$ ), 即

$$B_{\omega} \approx \frac{2\pi}{\tau} \quad \left(\text{或 } B_f \approx \frac{1}{\tau}\right) \quad (3-67)$$

## 2. 单边指数函数

已知单边指数信号的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3-68)$$

其中,  $\alpha > 0$ 。它的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad (3-69)$$

从而

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \quad (3-70)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha} \quad (3-71)$$

单边指数信号的波形  $f(t)$  及其幅度谱  $|F(j\omega)|$  和相位谱  $\varphi(\omega)$  如图 3-20 所示。

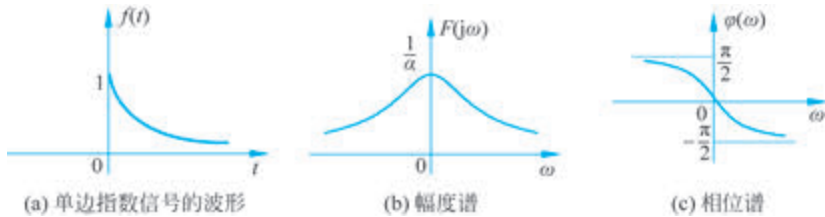


图 3-20 单边指数信号的波形及频谱

### 3. 双边指数函数

已知双边指数信号的表达式为

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}, \quad -\infty < t < \infty \quad (3-72)$$

其中,  $\alpha > 0$ , 它的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (3-73)$$

从而

$$|F(j\omega)| = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (3-74)$$

$$\varphi(\omega) = 0 \quad (3-75)$$

双边指数信号的波形  $f(t)$  及其频谱  $F(j\omega)$  如图 3-21 所示。

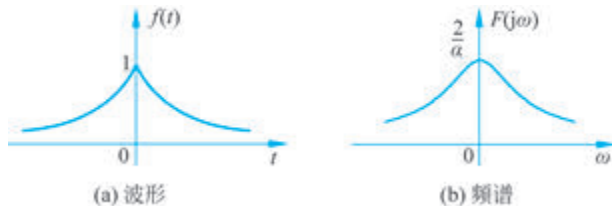


图 3-21 双边指数信号的波形及频谱

### 4. 冲激函数

利用冲激函数的取样性质, 可得单位冲激函数  $\delta(t)$  的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (3-76)$$

可见, 单位冲激函数的频谱等于常数, 也就是说, 在整个频率范围内频谱是均匀分布的。因此, 这种频谱通常称为均匀谱或白色谱。

单位冲激函数的波形及其频谱  $F(j\omega)$  如图 3-22 所示。

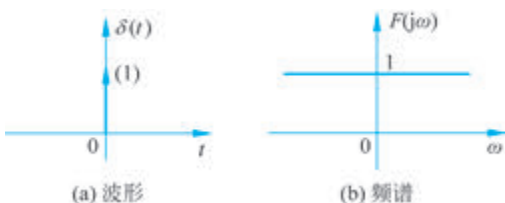


图 3-22 单位冲激函数的波形及频谱

### 5. 冲激偶函数

利用冲激偶函数的性质,可得冲激偶函数  $\delta'(t)$  的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) e^{-j\omega t} dt = - \left. \frac{d}{dt} e^{-j\omega t} \right|_{t=0} = j\omega \quad (3-77)$$

同理可得  $\delta^{(n)}(t)$  的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) e^{-j\omega t} dt = (-1)^n \left. \frac{d^n}{dt^n} e^{-j\omega t} \right|_{t=0} = (j\omega)^n \quad (3-78)$$

### 6. 直流信号

有一些信号不满足绝对可积这一充分条件,如直流信号 1、阶跃函数  $\varepsilon(t)$  等,但其傅里叶变换却存在。这些信号的傅里叶变换直接用定义式不易求解,可通过下面的方法来求解。

可构造一函数序列  $\{f_n(t)\}$  逼近  $f(t)$ ,即

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \quad (3-79)$$

其中,  $f_n(t)$  满足绝对可积条件,并且  $\{f_n(t)\}$  的傅里叶变换所形成的序列  $\{F_n(j\omega)\}$  是极限收敛的。则可定义  $f(t)$  的傅里叶变换  $F(j\omega)$  为

$$F(j\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(j\omega) \quad (3-80)$$

这样定义的傅里叶变换也称为广义傅里叶变换。

为了求解直流信号 1 的傅里叶变换,先构造双边指数函数序列

$$f_\alpha(t) = e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0 \quad (3-81)$$

显然有

$$f(t) = 1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha(t) \quad (3-82)$$

由于双边指数序列  $f_\alpha(t)$  的傅里叶变换为

$$F_\alpha(j\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (3-83)$$

故直流信号 1 的傅里叶变换  $F(j\omega)$  为

$$F(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_\alpha(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0 \\ \infty, & \omega = 0 \end{cases} \quad (3-84)$$

由式(3-84)可知,直流信号 1 的傅里叶变换  $F(j\omega)$  为一冲激函数,其强度计算为

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\frac{\omega}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2 \arctan \frac{\omega}{\alpha} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi \quad (3-85)$$

因此,直流信号 1 的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad (3-86)$$

直流信号 1 的傅里叶变换还可以通过下面的方法来求解。

已经知道  $\delta(t) \leftrightarrow 1$ , 将其代入傅里叶逆变换定义式,有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t) \quad (3-87)$$

将式(3-87)中  $\omega \rightarrow t, t \leftarrow -\omega$ , 得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \delta(-\omega) \quad (3-88)$$

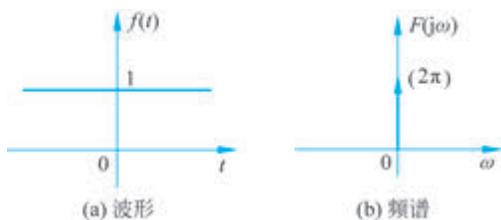


图 3-23 直流信号 1 的波形及频谱

式(3-88)也可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad (3-89)$$

式(3-89)的左端是求直流信号 1 的傅里叶变换,由此可知直流信号 1 的傅里叶变换为  $2\pi\delta(\omega)$ 。

直流信号 1 的波形及其频谱如图 3-23 所示。

### 7. 符号函数

符号函数  $\text{sgn}(t)$  定义为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (3-90)$$

虽然符号函数不满足绝对可积条件,但它的傅里叶变换却存在。可以构造如下双边指数衰减函数序列。

$$f_{\alpha}(t) = \begin{cases} -e^{at}, & t < 0 \\ e^{-at}, & t > 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0 \quad (3-91)$$

而

$$\text{sgn}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_{\alpha}(t) \quad (3-92)$$

由于  $f_{\alpha}(t)$  的傅里叶变换为

$$F_{\alpha}(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\alpha - j\omega} = -\frac{j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (3-93)$$

因此符号函数的傅里叶变换  $F(j\omega)$  为

$$F(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_{\alpha}(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( -\frac{j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right) = \frac{2}{j\omega} \quad (3-94)$$

从而

$$|F(j\omega)| = \frac{2}{|\omega|} \quad (3-95)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases} \quad (3-96)$$

符号函数的波形频谱如图 3-24 所示。

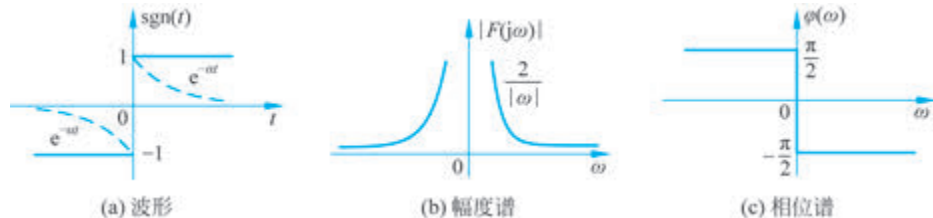


图 3-24 符号函数的波形及频谱

### 8. 单位阶跃函数

单位阶跃函数  $\varepsilon(t)$  也不满足绝对可积条件,但其傅里叶变换同样存在。可以利用符号函数和直流信号的傅里叶变换求单位阶跃函数的傅里叶变换。单位阶跃函数可表示为

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \quad (3-97)$$

因此,其傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3-98)$$

从而

$$|F(j\omega)| = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{|\omega|} \quad (3-99)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases} \quad (3-100)$$

单位阶跃函数的波形及频谱如图 3-25 所示。

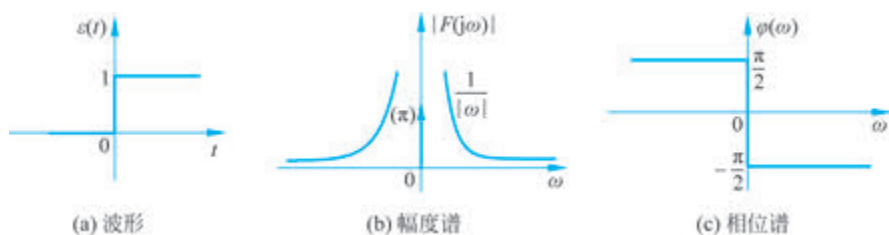


图 3-25 单位阶跃函数的波形及频谱

单位阶跃函数  $\varepsilon(t)$  的频谱在  $\omega=0$  处存在一个强度为  $\pi$  的冲激函数,这是因为  $\varepsilon(t)$  中含有直流分量而产生的。此外,由于单位阶跃函数  $\varepsilon(t)$  不是纯直流信号,它在  $t=0$  处有跳变,因此在它的频谱中还出现了其他频率分量。

熟悉了以上这些常用信号的傅里叶变换,对进一步掌握信号与系统的频域分析将会带来很大方便。常见函数的傅里叶变换如表 3-1 所示。

表 3-1 常见函数的傅里叶变换

函 数	表 达 式	$F(j\omega)$
门函数	$g_\tau(t) = \begin{cases} 1, &  t  \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, &  t  > \frac{\tau}{2} \end{cases}$	$\tau \operatorname{Sa}(\tau\omega/2)$
单边指数函数	$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$1/(\alpha + j\omega)$
双边指数函数	$f(t) = e^{-\alpha t }, \quad -\infty < t < +\infty$	$2\alpha/(\alpha^2 + \omega^2)$
冲激函数	$\delta(t)$	1
冲激偶函数	$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$

续表

函 数	表 达 式	$F(j\omega)$
直流信号	1	$2\pi\delta(\omega)$
符号函数	$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t > 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases}$	$2/j\omega$
单位阶跃函数	$\epsilon(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/j\omega$

### 3.5 傅里叶变换的性质

式(3-52)和式(3-53)表示的傅里叶变换对建立了时间函数与频谱函数之间的对应关系。其中,一个函数确定之后,另一个函数随之被唯一地确定。也就是说,信号可以在时域中通过时间函数  $f(t)$  完整地表示出来,也可以在频域中通过频谱函数  $F(j\omega)$  完整地表示出来。本节将讨论傅里叶变换的性质,即信号在时域中进行某种运算后在频域中发生的变化,或者反过来,在频域中进行某种运算后在时域中发生的变化。熟悉这些性质,将给信号分析研究工作带来方便。

#### 3.5.1 线性

若

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$$

则对任意常数  $a$  和  $b$ , 有

$$af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega) \quad (3-101)$$

线性性质表明信号的频谱等于各单独信号的频谱之和。由傅里叶变换的定义式容易证明上述结论。显然,这也适用于多个信号的情况。

证明:

$$\begin{aligned} F[af_1(t) + bf_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} af_1(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} bf_2(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega) \end{aligned}$$

#### 3.5.2 奇偶虚实性

通常遇到的实际信号都是实信号,即它们是时间的实函数。若  $f(t)$  是实函数,那么根据  $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$ , 式(3-52)可写为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t) dt \\ &= R(\omega) + jX(\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned} \quad (3-102)$$

其中,频谱函数的实部和虚部分别为



第 25 集  
微课视频

$$\begin{cases} R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{cases} \quad (3-103)$$

频谱函数的模和相角分别为

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) = \arctan \left[ \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right] \end{cases} \quad (3-104)$$

由式(3-103)可知,由于  $\cos(-\omega t) = \cos(\omega t)$ ,  $\sin(-\omega t) = -\sin(\omega t)$ ,故  $R(\omega)$  是  $\omega$  的偶函数,  $X(\omega)$  是  $\omega$  的奇函数,即

$$\begin{cases} R(-\omega) = R(\omega) \\ X(-\omega) = -X(\omega) \end{cases} \quad (3-105)$$

进而由式(3-104)可知,  $|F(j\omega)|$  是  $\omega$  的偶函数,  $\varphi(\omega)$  是  $\omega$  的奇函数,即

$$\begin{cases} |F(-j\omega)| = |F(j\omega)| \\ \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \end{cases} \quad (3-106)$$

进一步,若  $f(t)$  是实偶函数,则由式(3-103)还可以看出,  $f(t) \sin(\omega t)$  是  $t$  的奇函数,  $f(t) \cos(\omega t)$  是  $t$  的偶函数,因此有

$$\begin{cases} X(\omega) = 0 \\ F(j\omega) = R(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \end{cases} \quad (3-107)$$

此时,  $F(j\omega) = R(\omega)$ , 它是  $\omega$  的实偶函数。

相反地,若  $f(t)$  是实奇函数,则由式(3-103)可知,  $f(t) \sin(\omega t)$  是  $t$  的偶函数,  $f(t) \cos(\omega t)$  是  $t$  的奇函数,因此有

$$\begin{cases} R(\omega) = 0 \\ F(j\omega) = jX(\omega) = -j2 \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{cases} \quad (3-108)$$

此时,  $F(j\omega) = jX(\omega)$ , 它是  $\omega$  的虚奇函数。

此外,若  $f(t)$  是实函数,由式(3-104)可求得  $f(-t)$  的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-109)$$

令  $\tau = -t$ , 得

$$\mathcal{F}[f(-t)] = \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) e^{j\omega\tau} d(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j(-\omega)\tau} d\tau = F(-j\omega) \quad (3-110)$$

考虑到  $R(\omega)$  是  $\omega$  的偶函数,  $X(\omega)$  是  $\omega$  的奇函数,故

$$F(-j\omega) = R(-\omega) + jX(-\omega) = R(\omega) - jX(\omega) = F^*(j\omega) \quad (3-111)$$

其中,  $F^*(j\omega)$  是  $F(j\omega)$  的共轭复数。因此,  $f(-t)$  的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-j\omega) = F^*(j\omega) \quad (3-112)$$

将以上结论归纳总结如下。

若  $f(t)$  是实函数,且设

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

则有

(1)  $R(-\omega) = R(\omega)$ ,  $X(-\omega) = -X(\omega)$ ,  $|F(-j\omega)| = |F(j\omega)|$ ,  $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$ 。

(2)  $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega) = F^*(j\omega)$ 。

(3) 若  $f(-t) = f(t)$ , 则

$$X(\omega) = 0, \quad F(j\omega) = R(\omega)$$

(4) 若  $f(-t) = -f(t)$ , 则

$$R(\omega) = 0, \quad F(j\omega) = jX(\omega)$$

对于  $f(t)$  是虚函数的情况, 也可类似地推出以下结论。

(1)  $R(-\omega) = -R(\omega)$ ,  $X(-\omega) = X(\omega)$ ,  $|F(-j\omega)| = |F(j\omega)|$ ,  $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$ 。

(2)  $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega) = -F^*(j\omega)$ 。

此外, 无论  $f(t)$  为实函数还是虚函数, 都具有以下性质。

$$\begin{cases} f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega) \\ f^*(t) \leftrightarrow F^*(-j\omega) \\ f^*(-t) \leftrightarrow F^*(j\omega) \end{cases} \quad (3-113)$$

读者可以自己来证明。

### 3.5.3 对称性

若

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (3-114)$$

对称性表明, 与信号  $f(t)$  的频谱函数  $F(j\omega)$  形式相同的时间函数  $F(jt)$  的频谱为  $2\pi f(-\omega)$ , 这里的  $f(-\omega)$  与原信号  $f(t)$  有相同的形式。证明如下。

傅里叶逆变换的定义式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-115)$$

将式(3-115)中  $t \rightarrow -t$  得

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (3-116)$$

将式(3-116)中  $t \rightarrow \omega$ ,  $\omega \rightarrow t$ , 得

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt$$

或

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt \quad (3-117)$$

式(3-117)表明, 时间函数  $F(jt)$  的傅里叶变换为  $2\pi f(-\omega)$ , 即式(3-114)。

例如, 时域冲激函数  $\delta(t)$  的傅里叶变换为常数  $1(-\infty < \omega < \infty)$ , 由对称性可得, 时域常数  $1(-\infty < t < \infty)$  的傅里叶变换为  $2\pi\delta(-\omega)$ , 由于  $\delta(\omega)$  是  $\omega$  的偶函数, 故有

$$\begin{aligned} \delta(t) &\leftrightarrow 1 \\ 1 &\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$



第 26 集  
微课视频

这与式(3-86)的结果相同。

**例 3-7** 求取样函数  $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$  的频谱函数。

**解** 由式(3-64)知矩形脉冲信号的傅里叶变换为

$$g_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

显然,对于  $\tau=2$ ,幅度为 1 的矩形脉冲信号有

$$\frac{1}{2}g_2(t) \leftrightarrow Sa(\omega)$$

利用对称性得

$$Sa(t) \leftrightarrow \pi g_2(-\omega) = \pi g_2(\omega) \quad (3-118)$$

函数  $Sa(t)$  的波形及其频谱如图 3-26 所示。

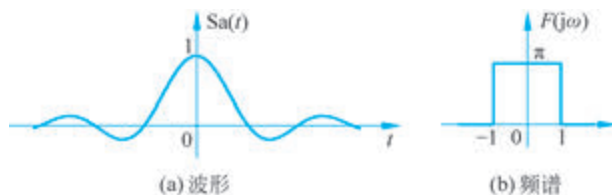


图 3-26  $Sa(t)$  的波形及频谱

MATLAB 代码如下。

```

clc;clear;
Fs=128; %采样频率
T=1/Fs; %采样时间
t=-(4*pi):T:(4*pi)-T; %时间向量
sa=sinc(t/pi); %MATLAB 函数 sinc(t)=sin(pi*t)/(pi*t)
subplot(211);plot(t,sa,'LineWidth',2);
xlabel('t');ylabel('Sa(t)');
set(gca,'FontName','Times New Roman');
xlabel('t');ylabel('Sa(t)');
title('采样函数波形','FontName','宋体');
N=2^ceil(log2(length(sa))); %FFT 点数
F=fft(sa,N)/Fs; %傅里叶变换,采样信号的频谱幅度是原始信号幅度的 1/Fs
AA=fftshift(abs(F)); %重新排列,实现频谱搬移
w=-Fs/2:Fs/N:(Fs/2-Fs/N); %频率向量
subplot(212);plot(w,AA,'LineWidth',2);axis([-1 1 0 4]);
xlabel('w');ylabel('F(jw)');
set(gca,'FontName','Times New Roman');
title('采样函数频谱','FontName','宋体');

```

运行结果如图 3-27 所示。

**例 3-8** 求函数  $t$  和  $\frac{1}{t}$  的频谱函数。

**解** (1) 求函数  $t$  的频谱函数。

由于

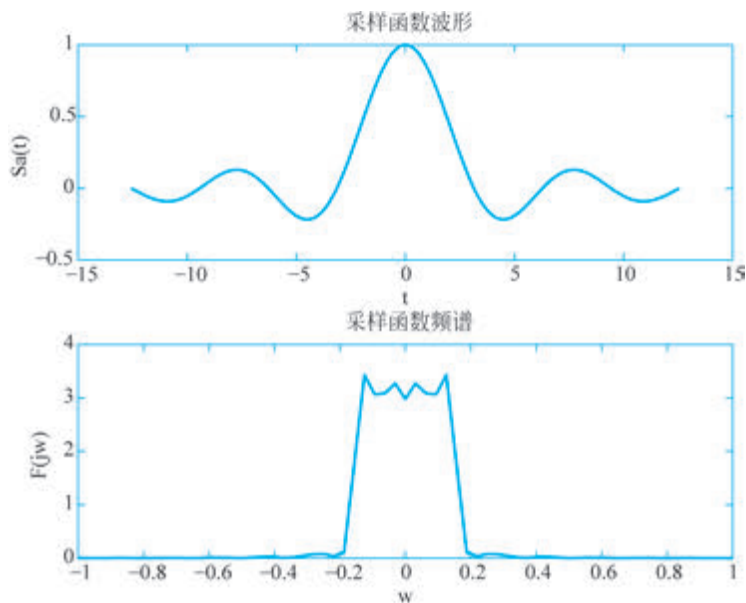


图 3-27 MATLAB 运行结果(例 3-7)

$$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$$

由对称性和冲激偶的奇函数特点得

$$jt \leftrightarrow 2\pi\delta'(-\omega) = -2\pi\delta'(\omega)$$

又由线性性质得

$$t \leftrightarrow j2\pi\delta'(\omega) \quad (3-119)$$

(2) 求函数  $\frac{1}{t}$  的频谱函数。

由于

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

由对称性和符号函数的奇函数特点得

$$\frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi\text{sgn}(-\omega) = -2\pi\text{sgn}(\omega)$$

又由线性性质得出

$$\frac{1}{t} \leftrightarrow -j\pi\text{sgn}(\omega) \quad (3-120)$$

MATLAB 代码如下。

```
clc;clear;
syms t;
f1=t;
f2=1/t;
Fw1=fourier(f1);          %直接调用 fourier()函数求频谱函数
Fw2=fourier(f2);
disp(['例 3-8 (1)谱函数: ',char(Fw1)]);
disp(['例 3-8 (2)谱函数: ',char(simplify(Fw2))]);
```

运行结果为

例 3-8 (1) 谱函数:  $\pi * \text{dirac}(1, w) * 2i$

例 3-8 (2) 谱函数:  $-\pi * \text{sign}(w) * 1i$

**例 3-9** 求函数  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$  的频谱函数。

**解** 由于  $e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ , 当  $\alpha = 1$  时有

$$e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{2}{1 + \omega^2}$$

由对称性得

$$\frac{2}{1 + t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|}$$

又由线性性质得

$$f(t) = \frac{1}{1 + t^2} \leftrightarrow \pi e^{-|\omega|} \quad (3-121)$$

### 3.5.4 尺度变换特性

若

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j \frac{\omega}{a}\right) \quad (3-122)$$

其中,  $a$  为非零实常数。尺度变换性质可证明如下。

根据傅里叶变换的定义式有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

令  $\tau = at$ , 当  $a > 0$  时, 有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau = \frac{1}{a} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

当  $a < 0$  时, 有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau = - \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau = - \frac{1}{a} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

综合以上两种情况, 即得式(3-122)。

当  $a = -1$  时, 式(3-122)变成

$$f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$$

这正是式(3-112)。

尺度变换特性表明, 信号在时域中压缩 ( $a > 1$ ) 等效于在频域中扩展; 反之, 信号在时域中扩展 ( $a < 1$ ) 则等效于在频域中压缩。对于  $a = -1$  的特例, 它说明信号在时域中沿纵轴反褶等效于在频域中频谱也沿纵轴反褶。上述结论是不难理解的, 因为信号的波形压缩, 信

号随时间变化就加快,所以它所包含的频率分量增加,也就是说频谱展宽。根据能量守恒原理,各频率分量的大小必然减小。图 3-28 以矩形脉冲信号及其频谱为例直观地说明了这种尺度变换特性。可见,矩形脉冲信号的持续时间与信号的占有频带成反比,这与前面分析周期矩形脉冲信号频谱时的情况是一致的。因此可知,如果要压缩信号的持续时间,就不得不以展宽频带为代价;而如果要压缩信号的频带宽度,则又不得不以增加信号的持续时间为代价。这就是通信中时长与带宽的矛盾,或者通信速度与信道容量的矛盾。

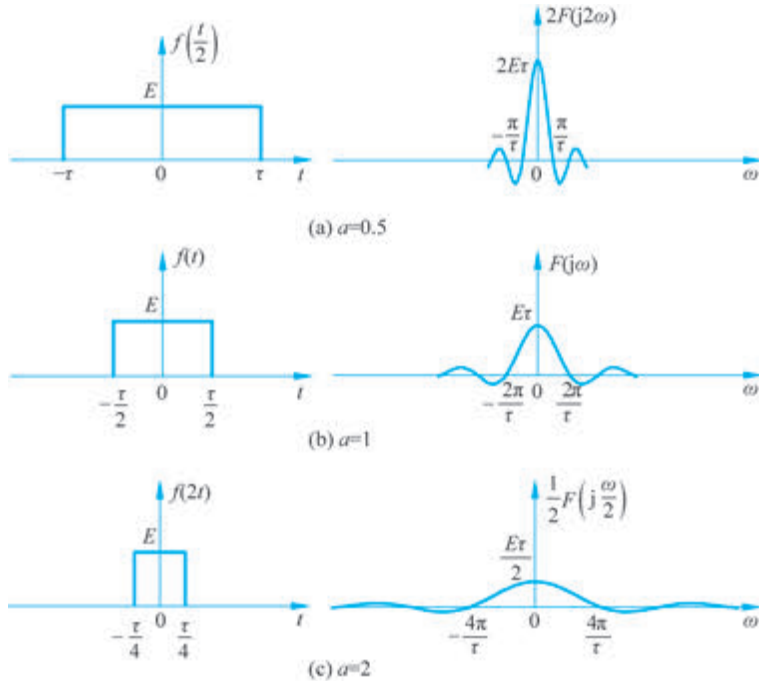


图 3-28 尺度变换特性的举例说明

**例 3-10** 求函数  $f(t) = \frac{1}{1-jt}$  的频谱函数。

**解** 由于  $e^{-t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega+1}$ , 由对称性得

$$\frac{1}{jt+1} \leftrightarrow 2\pi e^{\omega} \varepsilon(-\omega)$$

又由尺度变换特性得

$$\frac{1}{-jt+1} \leftrightarrow 2\pi e^{-\omega} \varepsilon(\omega) \quad (3-123)$$

MATLAB 代码如下。

```
clc;clear;
syms t;
f=1/(1-1i*t);
Fw=fourier(f); %直接调用 fourier()函数求频谱函数
disp(['例 3-10 谱函数: ',char(Fw)]);
```

运行结果为

例 3-10 谱函数:  $\pi * \exp(-w) * (\text{sign}(w) + 1)$

### 3.5.5 时移特性

若

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$f(t \pm t_0) \leftrightarrow e^{\pm j\omega t_0} F(j\omega) \quad (3-124)$$

其中,  $t_0$  为实常数。时移特性表明信号  $f(t)$  在时域中沿时间轴右移(或左移)  $t_0$ , 等效于在频域中频谱乘以因子  $e^{-j\omega t_0}$  (或  $e^{j\omega t_0}$ )。也就是说信号移位后, 其幅度谱不变, 而相位谱附加  $-\omega t_0$  (或  $\omega t_0$ )。可证明如下。

根据傅里叶变换的定义式有

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

令  $\tau = t - t_0$ , 那么

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} e^{-j\omega t_0} d\tau = e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

同理可得

$$\mathcal{F}[f(t + t_0)] = e^{j\omega t_0} F(j\omega)$$

不难证明, 如果信号既有时移又有尺度变换, 则有

$$\mathcal{F}[f(at - t_0)] = \mathcal{F}\left[fa\left(t - \frac{t_0}{a}\right)\right] = \frac{1}{|a|} e^{-j\frac{\omega}{a}t_0} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad (3-125)$$

**例 3-11** 求图 3-29(a) 中函数  $f(t)$  的频谱。

**解** 图 3-29(a) 中函数  $f(t)$  可以看作图 3-29(b) 中函数  $f_1(t)$  和图 3-29(c) 中函数  $f_2(t)$  的叠加, 即

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

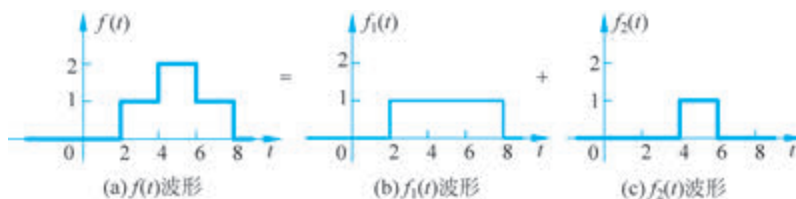


图 3-29 例 3-11 图

由图 3-29 可知

$$f_1(t) = g_6(t - 5)$$

$$f_2(t) = g_2(t - 5)$$

根据矩形脉冲信号的傅里叶变换及时移特性可知

$$f_1(t) = g_6(t - 5) \leftrightarrow 6\text{Sa}(3\omega) e^{-j5\omega}$$

$$f_2(t) = g_2(t - 5) \leftrightarrow 2\text{Sa}(\omega) e^{-j5\omega}$$

又根据线性性质得

$$f(t) \leftrightarrow [6\text{Sa}(3\omega) + 2\text{Sa}(\omega)] e^{-j5\omega} \quad (3-126)$$

**例 3-12** 求如图 3-30 所示三脉冲信号的频谱。

**解** 令  $f_0(t)$  表示矩形单脉冲信号, 由式(3-64)知其频谱函数  $F_0(j\omega)$  为

$$F_0(j\omega) = E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

因为

$$f(t) = f_0(t) + f_0(t + T) + f_0(t - T)$$

由时移特性知  $f(t)$  的频谱函数  $F(j\omega)$  为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= F_0(j\omega)(1 + e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) \\ &= E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) [1 + 2\cos(\omega T)] \end{aligned} \quad (3-127)$$

其频谱如图 3-31 所示。可见, 随着脉冲个数的增多, 频谱的包络线不变, 带宽也不变。

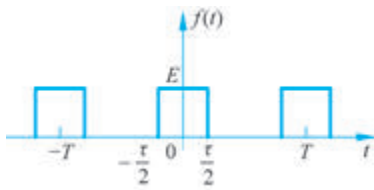


图 3-30 三脉冲信号

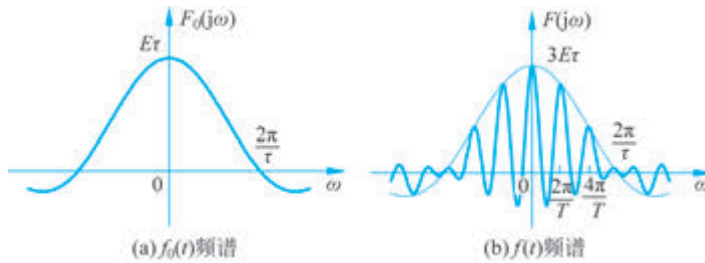


图 3-31 三脉冲信号的频谱

MATLAB 代码如下。

```

clc;clear;
tao=2; %脉冲信号宽度
T=6; %脉冲周期
E=1; %脉冲幅度
dt=0.01; %采样间隔
Fs=1/dt; %采样频率
t=-(T+tao):dt:(T+tao);
f1=stepfun(t,-tao/2)-stepfun(t,tao/2); %中间脉冲信号
f2=stepfun(t,T-tao/2)-stepfun(t,T+tao/2); %右边脉冲信号
f3=stepfun(t,-T-tao/2)-stepfun(t,-T+tao/2); %左边脉冲信号
f=E*(f1+f2+f3);
subplot(211);plot(t,f,'LineWidth',2);axis([- (T+tao) (T+tao) 0 1.2]);
xlabel('t');ylabel('f(t)');
set(gca,'FontName','Times New Roman');
title('三脉冲信号','FontName','宋体');
N=2^ceil(log2(length(f))); %FFT 点数
F=fft(f,N)*dt; %傅里叶变换,采样信号的频谱幅度是原始
%信号幅度的 T 倍
AA=fftshift(abs(F)); %重新排列,实现频谱搬移
    
```

```

w = -Fs/2:Fs/N:(Fs/2-Fs/N); % 频率向量
subplot(212); plot(w, AA, 'LineWidth', 2);
axis([-2 * pi)/tao (2 * pi)/tao 0 3 * E * tao]);
xlabel('w'); ylabel('F(jw)');
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman');
title('三脉冲信号频谱', 'FontName', '宋体');

```

运行结果如图 3-32 所示。

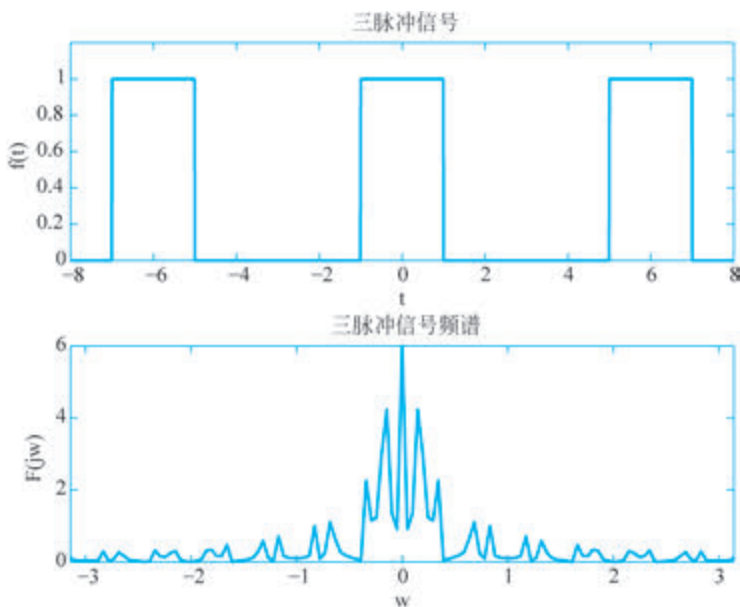


图 3-32 MATLAB 运行结果(例 3-12)

### 3.5.6 频移特性

若

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$e^{\pm j\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F[j(\omega \mp \omega_0)] \quad (3-128)$$

其中,  $\omega_0$  为实常数。频移特性表明在时域中信号  $f(t)$  乘以因子  $e^{j\omega_0 t}$ , 对应于在频域中将频谱  $F(j\omega)$  右移  $\omega_0$ ; 在时域中信号  $f(t)$  乘以因子  $e^{-j\omega_0 t}$ , 对应于在频域中将频谱  $F(j\omega)$  左移  $\omega_0$ 。可证明如下。

根据傅里叶变换的定义式有

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = F[j(\omega - \omega_0)]$$

同理可得

$$\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t} f(t)] = F[j(\omega + \omega_0)]$$

频移特性在通信系统中得到广泛的应用, 如调幅、变频、同步解调等过程都是在频谱搬



第 27 集  
微课视频



频谱搬移  
在频谱中的  
应用

移的基础上实现的。频谱搬移的实现原理是将信号  $f(t)$  乘以所谓载频信号  $\cos(\omega_0 t)$  或  $\sin(\omega_0 t)$ 。下面分析这种相乘作用引起的频谱搬移。

$$\cos\omega_0(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

$$\sin\omega_0(t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}$$

因此有

$$f(t)\cos\omega_0(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2}F[j(\omega + \omega_0)] \quad (3-129)$$

$$f(t)\sin\omega_0(t) \leftrightarrow -\frac{j}{2}F[j(\omega - \omega_0)] + \frac{j}{2}F[j(\omega + \omega_0)] \quad (3-130)$$

$f(t)$  乘以  $\cos(\omega_0 t)$  或  $\sin(\omega_0 t)$ , 对应于将频域中  $f(t)$  的频谱  $F(j\omega)$  一分为二, 沿频率轴向左和向右各平移  $\omega_0$ 。

**例 3-13** 已知  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , 求  $y(t) = f(2t)e^{j3t}$  的频谱。

**解** 根据尺度变换特性知

$$f(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(j\frac{\omega}{2}\right) \quad (3-131)$$

进一步, 由频移特性得

$$f(2t)e^{j3t} \leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(j\frac{\omega - 3}{2}\right) \quad (3-132)$$



尺度变换与  
频移特性的  
应用

**例 3-14** 已知矩形调幅信号  $f(t) = Eg_\tau(t)\cos(\omega_0 t)$ , 其中  $g_\tau(t)$  为矩形脉冲, 脉宽为  $\tau$ , 如图 3-33(a) 中虚线所示。试求其频谱函数。

**解** 已知矩形脉冲  $g_\tau(t)$  的频谱  $G_\tau(j\omega)$  为

$$G_\tau(j\omega) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}Eg_\tau(t)(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$f(t)$  的频谱  $F(j\omega)$  为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{2}EG_\tau[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2}EG_\tau[j(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}\right] + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}\right] \end{aligned} \quad (3-133)$$

矩形调幅信号的频谱  $F(j\omega)$  如图 3-33(b) 所示。

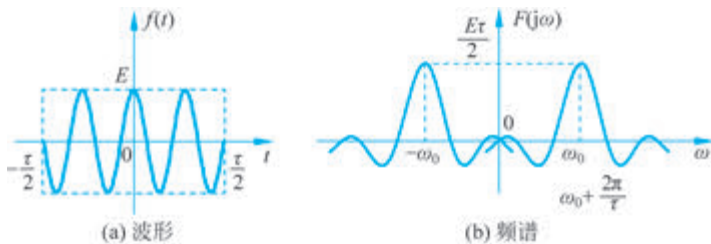


图 3-33 矩形调幅信号的波形及频谱

### 3.5.7 卷积定理

卷积定理是通信系统和信号处理研究领域应用最广的傅里叶变换性质之一。它描述的是两个函数在时域(或频域)中的卷积积分,对应于频域(或时域)中二者的傅里叶变换(或逆变换)应具有的关系。

#### 1. 时域卷积定理

若

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$$

则

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega) \quad (3-134)$$

时域卷积定理表明,在时域中两个函数的卷积积分对应于频域中两个函数频谱的乘积。

#### 2. 频域卷积定理

若

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$$

则

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega) * F_2(j\omega) \quad (3-135)$$

其中

$$F_1(j\omega) * F_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\eta)F_2[j(\omega - \eta)] d\eta \quad (3-136)$$

频域卷积定理表明,在时域中两个函数的乘积对应于频域中两个函数频谱的卷积积分的 $\frac{1}{2\pi}$ 。

时域卷积定理证明如下。

根据卷积积分的定义

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau) d\tau$$

其傅里叶变换为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

由时移特性得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = F_2(j\omega) e^{-j\omega\tau}$$

由此得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)F_2(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= F_2(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= F_1(j\omega)F_2(j\omega) \end{aligned}$$



第28集  
微课视频



频域卷积  
定理证明

频域卷积定理的证明类似,这里不再重复。

**例 3-15** 求函数  $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$  的频谱函数。

**解** 由于矩形脉冲信号  $g_\tau(t)$  与其频谱的对应关系为

$$g_\tau(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

显然,对于  $\tau=2$ ,幅度为 1 的矩形脉冲信号,有

$$g_2(t) \leftrightarrow 2\text{Sa}(\omega)$$

利用对称性得

$$2\text{Sa}(t) \leftrightarrow 2\pi g_2(-\omega) = 2\pi g_2(\omega)$$

由线性性质得

$$\text{Sa}(t) \leftrightarrow \pi g_2(\omega)$$

由频域卷积定理得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [\pi g_2(\omega)] * [\pi g_2(\omega)] = \frac{\pi}{2} g_2(\omega) * g_2(\omega) \\ &= \frac{\pi}{2} g_2(\omega) * g_2(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\omega + \pi, & -2 \leq \omega \leq 0 \\ -\frac{\pi}{2}\omega + \pi, & 0 \leq \omega \leq 2 \\ 0, & \omega > 2 \text{ 或 } \omega < -2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3-137)$$

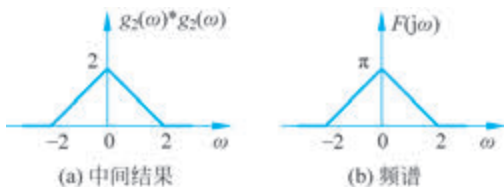


图 3-34  $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$  的频谱

$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$  的频谱函数  $F(j\omega)$  如图 3-34 所示。

**例 3-16** 求斜升函数  $r(t) = t\varepsilon(t)$  和函数  $|t|$  的频谱函数。

**解** (1) 求  $r(t) = t\varepsilon(t)$  的频谱函数。由式(3-19)可知

$$t \leftrightarrow j2\pi\delta'(\omega)$$

根据频域卷积定理得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[t\varepsilon(t)] &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[t] * \mathcal{F}[\varepsilon(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \times j2\pi\delta'(\omega) * \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] \\ &= j\pi\delta'(\omega) * \delta(\omega) + \delta'(\omega) * \frac{1}{\omega} \\ &= j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2} \end{aligned}$$

即

$$r(t) = t\varepsilon(t) \leftrightarrow j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2} \quad (3-138)$$

(2) 求  $|t|$  的频谱函数。由于  $|t|$  可写为

$$|t| = t\varepsilon(t) + (-t)\varepsilon(-t) \quad (3-139)$$

对式(3-138)利用奇偶虚实特性中的  $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega) = F^*(j\omega)$ , 有

$$(-t)\varepsilon(-t) \leftrightarrow -j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

由线性性质得

$$|t| \leftrightarrow -\frac{2}{\omega^2} \quad (3-140)$$

### 3.5.8 时域微分和积分

$f(t)$  的导数和积分可表示为

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad (3-141)$$

$$f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx \quad (3-142)$$

#### 1. 时域微分定理

若

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega) \quad (3-143)$$

时域微分定理说明在时域中  $f(t)$  对  $t$  取  $n$  阶导数, 等效于在频域中  $f(t)$  的频谱  $F(j\omega)$  乘以  $(j\omega)^n$ 。

#### 2. 时域积分定理

若

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$f^{(-1)}(t) \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega} \quad (3-144)$$

其中

$$F(0) = F(j\omega) \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (3-145)$$

若  $F(0) = 0$ , 则式(3-144)可写为

$$f^{(-1)}(t) \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} \quad (3-146)$$

式(3-143)和式(3-144)可证明如下。

由于

$$f'(t) = f'(t) * \delta(t) = f(t) * \delta'(t)$$

根据时域卷积定理及  $\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$ , 有

$$f'(t) \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$$

重复运用以上结果得式(3-143)。



第 29 集  
微课视频

由于

$$f^{(-1)}(t) = f^{(-1)}(t) * \delta(t) = f(t) * \delta^{(-1)}(t) = f(t) * \varepsilon(t)$$

根据时域卷积定理及冲激函数的取样性质,有

$$f^{(-1)}(t) \leftrightarrow F(j\omega) \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

**例 3-17** 求  $f(t) = \frac{1}{t^2}$  的频谱函数。

**解** 由于

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

由对称性得

$$\frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi \text{sgn}(-\omega)$$

由线性性质得

$$\frac{1}{t} \leftrightarrow -j\pi \text{sgn}(\omega)$$

由时域微分定理得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{t} \right) \leftrightarrow -(j\omega) j\pi \text{sgn}(\omega) = \pi\omega \text{sgn}(\omega)$$

由线性性质得

$$\frac{1}{t^2} \leftrightarrow -\pi\omega \text{sgn}(\omega) = -\pi |\omega| \quad (3-147)$$

**例 3-18** 求图 3-35(a)中三角形脉冲信号  $f(t)$  的频谱函数。

**解** 对三角形脉冲信号  $f(t)$  求一、二阶导数,如图 3-35(b)和图 3-35(c)所示。

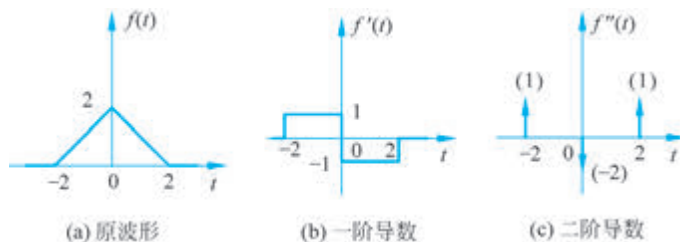


图 3-35 例 3-18 图

可知

$$f(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^x f''(y) dy dx$$

并且

$$f''(t) = \delta(t+2) - 2\delta(t) + \delta(t-2)$$

根据时移特性及时域冲激函数的傅里叶变换可得

$$f''(t) \leftrightarrow e^{j2\omega} - 2 + e^{-j2\omega}$$

又由图 3-35(b)和图 3-35(c)可知

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f''(t) dt = 0$$

故根据式(3-146)得

$$f(t) \leftrightarrow \frac{F_2(j\omega)}{(j\omega)^2} = -\frac{e^{j2\omega} - 2 + e^{-j2\omega}}{\omega^2} \quad (3-148)$$

MATLAB 代码如下。

```

clc;clear;
syms t;
f1=(t+2)*(heaviside(t+2)-heaviside(t));
f2=(2-t)*(heaviside(t)-heaviside(t-2));
f=f1+f2;
f1f=diff(f);
f2f=diff(f,t,2);
Fw=fourier(f); %直接调用 fourier()函数求频谱函数
disp(['例 3-18 一阶导数: ',char(simplify(f1f))]);
disp(['例 3-18 二阶导数: ',char(simplify(f2f))]);
disp(['例 3-18 谱函数: ',char(simplify(Fw))]);

```

运行结果为

```

例 3-18 一阶导数: heaviside(t - 2) + heaviside(t + 2) - 2 * heaviside(t)
例 3-18 二阶导数: dirac(t - 2) + dirac(t + 2) - 2 * dirac(t)
例 3-18 谱函数: -(exp(-w * 2i) * (exp(w * 2i) - 1)^2)/w^2

```

这里可引出一个结论: 设  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , 若  $f(t)$  是时限信号, 即满足  $f(-\infty) + f(\infty) = 0$ , 且知  $f^{(n)}(t) \leftrightarrow F_n(j\omega)$ , 则有

$$f(t) \leftrightarrow \frac{F_n(j\omega)}{(j\omega)^n} \quad (3-149)$$

### 3.5.9 频域微分和积分

设

$$F^{(n)}(j\omega) = \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n} \quad (3-150)$$

$$F^{(-1)}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} F(jx) dx \quad (3-151)$$

与之前类似, 这里也隐含  $F^{(-1)}(-\infty) = 0$ 。

#### 1. 频域微分定理

若

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(j\omega) \quad (3-152)$$

频域微分定理说明在时域中  $f(t)$  乘以  $(-jt)^n$ , 等效于在频域中  $f(t)$  的频谱  $F(j\omega)$  对  $\omega$  取  $n$  阶导数。

## 2. 频域积分定理

若

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$\pi f(0)\delta(t) + \frac{f(t)}{-jt} \leftrightarrow F^{(-1)}(j\omega) \quad (3-153)$$

其中

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega \quad (3-154)$$

若  $f(0) = 0$ , 则式(3-153)可写为

$$\frac{f(t)}{-jt} \leftrightarrow F^{(-1)}(j\omega) \quad (3-155)$$

频域微分定理和频域积分定理可用频域卷积定理证明,方法与时域类似,这里从略。

**例 3-19** 求斜升函数  $r(t) = t\varepsilon(t)$  的频谱函数。

**解** 由于单位阶跃函数  $\varepsilon(t)$  及其频谱函数为

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

可得

$$-jt\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \pi\delta'(\omega) - \frac{1}{j\omega^2}$$

再根据线性性质得

$$t\varepsilon(t) \leftrightarrow j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

这与例 3-15 结果完全相同。

**例 3-20** 求  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} d\omega$ 。

**解** 由于

$$g_{\tau}(t) \leftrightarrow \frac{2\tau \sin\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)}{\tau\omega}$$

故

$$g_{2a}(t) \leftrightarrow \frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$$

根据傅里叶逆变换定义式得  $g_{2a}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(a\omega)}{\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} e^{j\omega t} d\omega$

当  $t=0$  时,有

$$g_{2a}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} d\omega$$

因此

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} g_{2a}(0) = \frac{\pi}{2} \quad (3-156)$$

### 3.5.10 相关定理

#### 1. 相关函数

为比较某信号与另一延时  $\tau$  的信号之间的相似程度,需要引入相关函数的概念。相关函数是鉴别信号的有力工具,被广泛应用于雷达回波的识别、通信同步信号的识别等领域。相关函数也称相关积分,它与卷积的运算方法类似。

实函数  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  之间的互相关函数定义为

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t+\tau)f_2(t)dt \quad (3-157)$$

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t+\tau)dt \quad (3-158)$$

可见,互相关函数是两信号之间时间差  $\tau$  的函数。

需要注意,一般地,有

$$R_{12}(\tau) \neq R_{21}(\tau) \quad (3-159)$$

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau) \quad (3-160)$$

$$R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau) \quad (3-161)$$

如果  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  是同一信号,即  $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ ,这时无须区分  $R_{12}$  与  $R_{21}$ ,用  $R(\tau)$  表示,称为自相关函数,即

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)f(t)dt \quad (3-162)$$

容易看出,对自相关函数有

$$R(\tau) = R(-\tau) \quad (3-163)$$

可见,实函数  $f(t)$  的自相关函数是时移  $\tau$  的偶函数。

根据互相关函数的定义,不难看出互相关函数和卷积积分的关系为

$$R_{12}(t) = f_1(t) * f_2(-t) \quad (3-164)$$

#### 2. 相关定理

若

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega), \quad f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$R_{12}(\tau) \leftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega) \quad (3-165)$$

$$R_{21}(\tau) \leftrightarrow F_1^*(j\omega)F_2(j\omega) \quad (3-166)$$

$$R(\tau) \leftrightarrow |F_1(j\omega)|^2 \quad (3-167)$$

式(3-165)和式(3-166)表明,时域中两个信号相关函数的频谱等于其中一个信号的频谱与另一信号频谱的共轭之乘积。式(3-167)表明,自相关函数的频谱等于原信号幅度谱的平方。

式(3-165)和式(3-166)可证明如下。

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = \mathcal{F}[f_1(\tau) * f_2(-\tau)] = \mathcal{F}[f_1(\tau)] \mathcal{F}[f_2(-\tau)]$$

由于

$$\mathcal{F}[f_2(-\tau)] = F_2(-j\omega) = F_2^*(j\omega)$$



第30集  
微课视频

故

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = F_1(j\omega)F_2^*(j\omega)$$

同理可得

$$\mathcal{F}[R_{21}(\tau)] = F_1^*(j\omega)F_2(j\omega)$$

显然,当  $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ ,有

$$R(\tau) = f(\tau) * f(-\tau) \leftrightarrow F(j\omega)F^*(j\omega) \leftrightarrow |F_1(j\omega)|^2$$

即式(3-167)也得证。

## 3.6 能量谱与功率谱

如前所述,信号的频谱反映了信号的幅度和相位随频率的分布情况,它在频域中描述了信号的特征。此外,还可以用能量谱和功率谱描述信号,它们反映了信号的能量或功率密度随频率的变化情况,它对于研究信号的能量(或功率)的分布、决定信号所占有频率等问题有着重要的作用。特别是对随机信号,无法用确定的时间函数来表示,也就无法用频谱表示,往往用功率谱描述它的频率特性。

### 3.6.1 能量谱

信号  $f(t)$  在  $1\Omega$  电阻上的瞬时功率为  $|f(t)|^2$ , 在  $-T < t < T$  时间区间的能量为

$$\int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (3-168)$$

信号的能量定义为在  $-\infty < t < \infty$  时间区间上信号的能量,表示为

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (3-169)$$

如果信号  $f(t)$  是实函数,则式(3-169)可写为

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt \quad (3-170)$$

如果信号能量有限,即  $0 < E < \infty$ , 则称信号为能量有限信号,简称能量信号。矩形脉冲信号、三角脉冲信号、单边或双边指数衰减信号等都是能量信号。

将傅里叶逆变换定义式代入式(3-170)得

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \quad (3-171)$$

交换积分次序得

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F(-j\omega) d\omega \end{aligned}$$

由  $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega) = F^*(j\omega)$  得

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (3-172)$$

式(3-172)称为帕斯瓦尔方程或能量等式。它表明,在时域中求信号的能量与在频域中



第 31 集  
微课视频

用频谱密度来计算能量是一致的。

为了表征信号的能量随频率的分布情况,可以借助密度的概念,引入一个能量密度函数,简称为能量频谱或能量谱。能量谱定义为单位频率的信号能量,记为  $E(\omega)$ 。由于在频带  $df$  内信号的能量为  $E(\omega)df$ ,因而信号在整个频率范围  $(-\infty, \infty)$  的总能量为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)d\omega \quad (3-173)$$

比较式(3-172)和式(3-173),可知

$$E(\omega) = |F(j\omega)|^2 \quad (3-174)$$

由式(3-174)可知,信号的能量谱  $E(\omega)$  是  $\omega$  的偶函数,它只与频谱函数的模量有关,而与相位无关。能量谱  $E(\omega)$  是单位频率的信号能量,它的单位是  $J \cdot s$ 。

由式(3-163)和式(3-174)可知

$$R(\tau) \leftrightarrow E(\omega) \quad (3-175)$$

式(3-175)表明,信号的能量谱  $E(\omega)$  与其自相关函数  $R(\tau)$  是一对傅里叶变换对。

**例 3-21** 求信号  $f(t) = \cos(997t) \frac{\sin 5t}{\pi t}$  的能量。

**解** 根据矩形脉冲信号的傅里叶变换及傅里叶变换的对称性,不难得出

$$\frac{\sin 5t}{\pi t} \leftrightarrow g_{10}(\omega)$$

根据傅里叶变换的频移特性得

$$2\cos(997t) \frac{\sin 5t}{\pi t} \leftrightarrow g_{10}(\omega - 997) + g_{10}(\omega + 997)$$

最后根据式(3-172)得

$$E = \frac{5}{2\pi} \quad (3-176)$$

MATLAB 代码如下。

```
clc;clear;
syms t w;
f=cos(997 * t) * sin(5 * t)/( pi * t);
Fw=fourier(f);
E=int(f^2, t, -inf, inf);           %根据式(3-172)计算能量
disp(['例 3-21 能量: ',char(E)]);
```

运行结果为

```
例 3-21 能量: 5/(2 * pi)
```

### 3.6.2 功率谱

信号  $f(t)$  的功率定义为  $-\infty < t < \infty$  的平均功率,表示为

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (3-177)$$

如果信号  $f(t)$  是实函数, 则式(3-177)可写为

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)^2 dt \quad (3-178)$$

如果信号功率有限, 即  $0 < P < \infty$ , 则称信号为功率有限信号, 简称功率信号, 如阶跃信号、周期信号等。

由信号能量和信号功率的定义可知, 若信号为能量信号, 则  $P = 0$ ; 若信号为功率信号, 则  $E = \infty$ 。

功率信号的能量趋于无穷大, 即  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt \rightarrow \infty$ 。为此, 从  $f(t)$  中截取  $|t| \leq \frac{T}{2}$  的一段, 得到一个截尾函数, 即

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (3-179)$$

如果  $T$  是有限值, 则  $f_T(t)$  的能量也是有限的。令

$$f_T(t) \leftrightarrow F_T(j\omega) \quad (3-180)$$

由式(3-172)可知  $f_T(t)$  的能量可表示为

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(j\omega)|^2 d\omega \quad (3-181)$$

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)^2 dt$$

由式(3-178)和式(3-181)得  $f(t)$  的平均功率为

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_T(j\omega)|^2}{T} d\omega \quad (3-182)$$

当  $T$  增加时,  $f_T(t)$  的能量增加,  $|F_T(j\omega)|^2$  也增加。当  $T \rightarrow \infty$  时,  $f_T(t) \rightarrow f(t)$ , 此时  $F_T(j\omega)/T$  可能趋于一极限。类似于能量密度函数, 定义功率密度函数  $P(\omega)$  为单位频率的信号功率, 从而信号的平均功率为

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega \quad (3-183)$$

比较式(3-183)和式(3-182), 可知

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(j\omega)|^2}{T} \quad (3-184)$$

由式(3-184)可知, 功率谱  $P(\omega)$  是  $\omega$  的偶函数, 它只和频谱函数的模量有关, 而与相位无关。功率谱反映了信号的功率随频率的分布情况。显然,  $P(\omega)$  曲线所覆盖的面积在数值上等于信号的总功率。  $P(\omega)$  的单位是  $\text{W} \cdot \text{s}$ 。

若  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  是功率信号, 则相关函数重新定义为

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(t - \tau) dt \right] \quad (3-185)$$

$$R_{21}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t) f_1(t - \tau) dt \right] \quad (3-186)$$

以及

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t - \tau) dt \right] \quad (3-187)$$

由式(3-187)可得

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t - \tau) dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) f_T(t - \tau) dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} f_T(t) * f_T(-t) \end{aligned} \quad (3-188)$$

又由于

$$f_T(t) * f_T(-t) \leftrightarrow F_T(j\omega) F_T^*(j\omega) = |F_T(j\omega)|^2 \quad (3-189)$$

故可知

$$R(\tau) \leftrightarrow P(\omega) \quad (3-190)$$

式(3-190)表明,功率信号的功率谱函数与其自相关函数是一对傅里叶变换对。式(3-190)称为维纳-欣钦(Wiener-Khintchine)关系。由于随机信号不能用频谱表示,但是利用自相关函数可以求得功率谱。这样就可以通过功率谱描述随机信号的频域特性。

## 3.7 周期信号的傅里叶变换

在前面的讨论中已经知道,周期信号的频谱可以用傅里叶级数表示,而非周期信号的频谱则是用傅里叶变换表示的。本节将讨论周期信号的傅里叶变换,以及傅里叶级数与傅里叶变换之间的关系,目的是把周期信号与非周期信号的分析方法统一起来,使傅里叶变换这一工具得到更广泛的应用。

### 3.7.1 正弦函数与余弦函数的傅里叶变换

由于

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (3-191)$$

由频移特性得

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (3-192)$$

$$e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (3-193)$$

故根据欧拉公式有

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (3-194)$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (3-195)$$

正弦信号和余弦信号的频谱如图 3-36 所示。



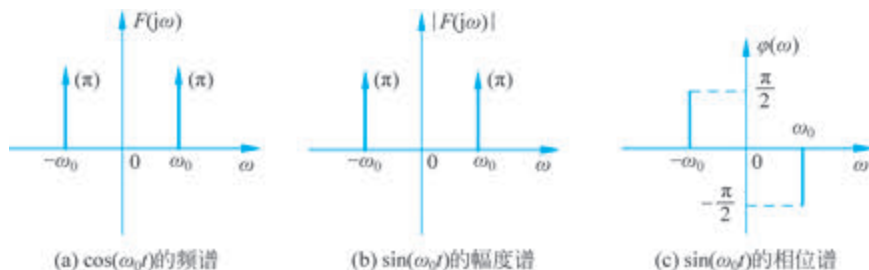


图 3-36 正弦信号和余弦信号的频谱

### 3.7.2 一般周期信号的傅里叶变换

对于一个周期为  $T$  的周期函数  $f_T(t)$ , 其指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad (3-196)$$

其中,  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$  为基波角频率;  $F_n$  为傅里叶系数, 即

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\Omega t} dt \quad (3-197)$$

对式(3-196)两边取傅里叶变换, 并利用傅里叶变换的线性性质, 且考虑到  $F_n$  与时间  $t$  无关, 得

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \leftrightarrow F_T(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega) \quad (3-198)$$

式(3-198)表明, 周期信号的傅里叶变换(频谱密度函数)是由无穷多个冲激函数组成的, 这些冲激函数位于信号的各谐波角频率  $n\Omega$  处, 强度为各相应幅度  $F_n$  的  $2\pi$  倍。

**例 3-22** 周期为  $T$  的周期性单位冲激函数序列为

$$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (3-199)$$

其中,  $m$  为整数。求其傅里叶变换。

**解** 考虑  $\delta_T(t)$  在  $(-T/2, T/2)$  只有一个冲激函数  $\delta(t)$ , 由取样性质得

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \quad (3-200)$$

由式(3-198)可得

$$\delta_T(t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \Omega \delta_\Omega(\omega) \quad (3-201)$$

式(3-201)表明, 在时域中, 周期为  $T$  的单位冲激函数序列  $\delta_T(t)$  的傅里叶变换是一个在频域中周期为  $\Omega$  的冲激序列。图 3-37 所示为  $\delta_T(t)$  波形及其频谱。

**例 3-23** 周期矩形脉冲信号  $f_T(t)$  如图 3-38(a) 所示, 求其傅里叶变换。

**解** 周期信号  $f_T(t)$  可看作一时限非周期信号  $f_0(t)$  的周期拓展, 即

$$f_T(t) = \delta_T(t) * f_0(t) \quad (3-202)$$

根据傅里叶变换的时域卷积定理和冲激函数的取样性质有

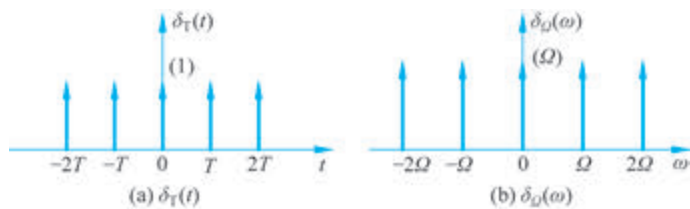


图 3-37 周期冲激函数序列及其频谱

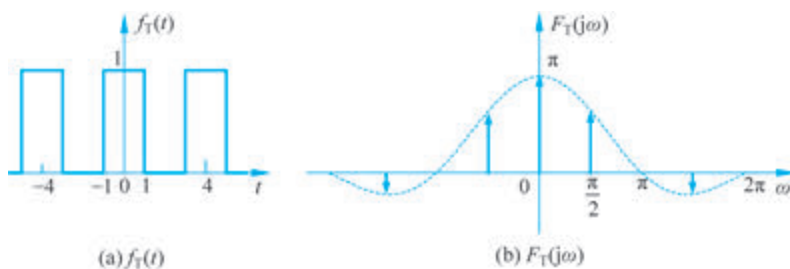


图 3-38 周期矩形脉冲信号及其傅里叶变换

$$F_T(j\omega) = \Omega \delta_\Omega(\omega) F_0(j\omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(jn\Omega) \delta(\omega - n\Omega) \quad (3-203)$$

由图 3-38 可知

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \quad (3-204)$$

本例可取  $f_0(t) = g_2(t)$ , 且有

$$f_0(t) = g_2(t) \leftrightarrow 2\text{Sa}(\omega) \quad (3-205)$$

代入式(3-203)可得

$$F_T(j\omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\text{Sa}(n\Omega) \delta(\omega - n\Omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (3-206)$$

式(3-206)表明,周期矩形脉冲信号的傅里叶变换是由位于各谐波角频率  $n\Omega$  处的冲激函数所组成的,其强度的包络线形状与单脉冲信号频谱的形状相同。周期矩形脉冲信号的频谱如图 3-38(b)所示。

### 3.7.3 傅里叶系数与傅里叶变换的关系

式(3-198)和式(3-203)都是周期信号  $f_T(t)$  的傅里叶变换表示式。比较这二式可知,周期信号  $f_T(t)$  的傅里叶系数  $F_n$  与其第一个周期的单脉冲信号频谱  $F_0(j\omega)$  的关系为

$$F_n = \frac{\Omega}{2\pi} F_0(jn\Omega) = \frac{1}{T} F_0(j\omega) \Big|_{\omega=n\Omega} \quad (3-207)$$

式(3-207)表明,周期信号的傅里叶系数  $F_n$  等于  $F_0(j\omega)$  在频率为  $n\Omega$  处的值乘以  $\frac{1}{T}$ 。

由傅里叶系数的定义式,有

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_0(t) e^{-jn\Omega t} dt \quad (3-208)$$

由傅里叶变换的定义式,得

$$F_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_0(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-209)$$

比较以上二式也可得到式(3-207)的结果。这表明,傅里叶变换的许多性质、定理也可用于傅里叶级数,这也给出求周期信号傅里叶级数的另一种方法。

## 3.8 LTI 系统的频域分析

频域分析是将信号分解为无穷多项不同频率的虚指数函数之和,从而把时域中求解响应的问题通过傅里叶变换或傅里叶级数转化为频域中的问题,整个分析过程是在频域内进行。利用频域分析法可以分析系统的频率响应、滤波、取样、物理可实现等问题。

### 3.8.1 频率响应

设 LTI 系统的冲激响应为  $h(t)$ , 当激励是角频率为  $\omega$  的虚指数函数  $e^{j\omega t}$  ( $-\infty < t < \infty$ ) 时, 其零状态响应为

$$y(t) = h(t) * e^{j\omega t} \quad (3-210)$$

在频域分析中, 信号的定义域为  $-\infty < t < \infty$ , 而  $t = -\infty$  总可认为系统的状态为零, 因此频域分析中的响应均是指零状态响应, 常写为  $y(t)$ 。

根据卷积的定义得

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot e^{j\omega t} \quad (3-211)$$

而积分  $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$  正好是  $h(t)$  的傅里叶变换  $H(j\omega)$ , 称为系统的频率响应函数或频率响应, 则式(3-211)可写为

$$y(t) = H(j\omega) e^{j\omega t} \quad (3-212)$$

式(3-212)表明, 当激励是幅度为 1 的虚指数函数  $e^{j\omega t}$  时, 系统的响应是系数为  $H(j\omega)$  的同频率的虚指数函数,  $H(j\omega)$  反映了响应  $y(t)$  的幅度和相位。

当激励为任意信号  $f(t)$  时, 可将该信号看作无穷多不同频率的虚指数分量之和, 即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(j\omega)}{2\pi} d\omega \cdot e^{j\omega t} \quad (3-213)$$

由式(3-213)可知, 频率为  $\omega$  的虚指数分量为  $\frac{F(j\omega)}{2\pi} d\omega \cdot e^{j\omega t}$ 。由式(3-212)可知, 对于该分量的响应为  $\frac{F(j\omega)}{2\pi} d\omega H(j\omega) \cdot e^{j\omega t}$ , 根据线性性质可得任意信号  $f(t)$  作用下系统的响应为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(j\omega)}{2\pi} d\omega H(j\omega) \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-214)$$

令响应  $y(t)$  的频谱函数为  $Y(j\omega)$ , 激励的频谱函数为  $F(j\omega)$ , 则由式(3-214)得

$$Y(j\omega) = H(j\omega) F(j\omega) \quad (3-215)$$

可见, 冲激响应  $h(t)$  反映了系统的时域特性, 而频率响应  $H(j\omega)$  则反映了系统的频域特性, 二者的关系为



$$h(t) \leftrightarrow H(j\omega) \quad (3-216)$$

通常,频率响应(函数)(有时也称为系统函数)可定义为系统零状态响应的傅里叶变换  $Y(j\omega)$  与激励的傅里叶变换  $F(j\omega)$  之比,即

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} \quad (3-217)$$

它是频率(角频率)的复函数,可写为

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} = \frac{|Y(j\omega)|}{|F(j\omega)|} e^{j[\varphi_y(\omega) - \varphi_f(\omega)]} \quad (3-218)$$

其中,  $|H(j\omega)|$  称为幅频特性(或幅频响应),它是角频率为  $\omega$  的输出与输入信号的幅度之比;  $\theta(\omega)$  称为相频特性(或相频响应),它是输出与输入信号的相位差。由于  $|H(j\omega)|$  是  $h(t)$  的傅里叶变换,根据傅里叶变换的奇偶性可知,  $|H(j\omega)|$  是  $\omega$  的偶函数,  $\theta(\omega)$  是  $\omega$  的奇函数。

由以上分析可知,一个系统既可以在时域进行分析,又可以在频域进行分析,前者可以比较直观地得出系统响应的波形,而且便于进行数值计算,而后者则是信号与系统分析和处理的有效工具。需要强调,只有系统的单位冲激响应  $h(t)$  的傅里叶变换存在,系统的频率响应  $|H(j\omega)|$  才存在;否则,系统不存在频率响应。也只有输入信号的傅里叶变换存在并且系统频率响应存在的条件下,方可对系统使用频域方法分析。

### 3.8.2 非周期信号激励下系统的响应

傅里叶变换的时域卷积定理将系统对输入信号零状态响应的时域分析与频域分析对应起来,从而可以总结出如图 3-39 所示的系统频域分析法的步骤。

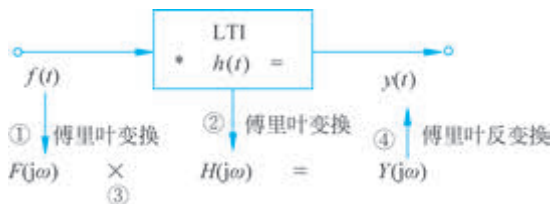


图 3-39 系统频域分析法的步骤

由图 3-39 可知,频域分析法的基本思想是把输入信号与系统冲激响应的卷积运算变换为频域中的乘积运算与求傅里叶逆变换运算。不管输入信号是周期信号还是非周期信号,频域分析系统零状态响应的思想都是适用的。

假设系统的激励信号为  $f(t)$ ,其零状态响应为  $y(t)$ ,那么  $n$  阶系统的微分方程为

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0 f(t) \quad (3-219)$$

令  $y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$ ,  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ ,对式(3-219)两边作傅里叶变换,由傅里叶变换的线性和时域微分特性得

$$[a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_0] Y(j\omega) = [b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \cdots + b_0] F(j\omega)$$

根据式(3-218),可得系统的频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} \quad (3-220)$$

式(3-220)表明,系统的频率响应一般是取决于系统方程系数(j $\omega$ )的有理分式,它与激励、响应都无关。在时域分析中由系统的方程求系统的单位冲激响应  $h(t)$  是很烦琐的,但如果考虑零状态条件对方程取傅里叶变换,通过式(3-220)先求得频率响应函数  $H(j\omega)$ ,再进行傅里叶逆变换求  $h(t)$ ,就显得非常简便。

**例 3-24** 某系统的微分方程为  $y'(t) + 2y(t) = f(t)$ , 求  $f(t) = e^{-t}\epsilon(t)$  时的零状态响应  $y(t)$ 。

**解** 微分方程两边进行傅里叶变换

$$j\omega Y(j\omega) + 2Y(j\omega) = F(j\omega)$$

得

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{j\omega + 2}$$

由于

$$f(t) = e^{-t} \leftrightarrow F(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

所以

$$Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} = \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2}$$

进行傅里叶逆变换得系统的零状态响应为

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\epsilon(t)$$

MATLAB 代码如下。

```

clc;clear all;
sys=tf([1],[1 2]);           %根据理论推导公式构造系统函数
t=0:0.01:4*pi;
f=exp(-t);                 %输入激励
y=lsim(sys,f,t);          %调用lsim()函数求出系统的输出响应
subplot(211);plot(t,y,'LineWidth',2);
xlabel('Time');ylabel('Output');
set(gca,'FontName','Times New Roman');
title('零状态响应','FontName','宋体');
yt=exp(-t)-exp(-2*t);
subplot(212);plot(t,yt,'LineWidth',2);
xlabel('Time');ylabel('Output');
set(gca,'FontName','Times New Roman');
title('理论推导','FontName','宋体');

```

运行结果如图 3-40 所示。

**例 3-25** 如图 3-41(a)所示电路, $R=1\Omega$ , $C=1F$ ,以  $u_c(t)$  为输出,求其单位冲激响应  $h(t)$ 。

**解** 画出电路的频域模型,如图 3-41(b)所示,可得

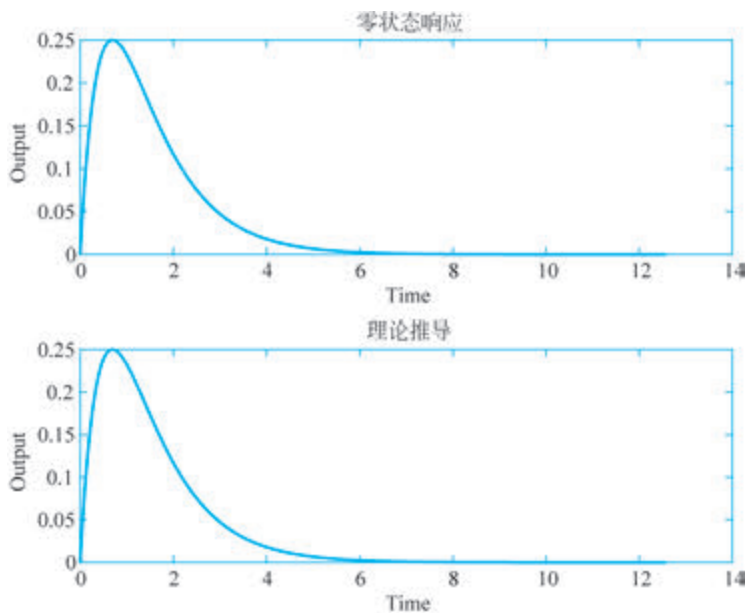


图 3-40 MATLAB 运行结果(例 3-24)

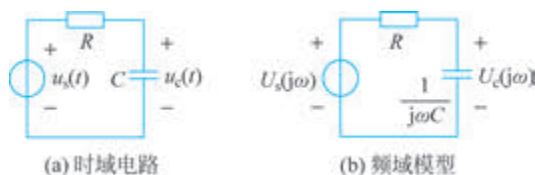


图 3-41 例 3-25 图

$$H(j\omega) = \frac{U_c(j\omega)}{U_s(j\omega)} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega + 1}$$

进行傅里叶逆变换得系统的冲激响应为

$$h(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$$

### 3.8.3 周期信号激励下系统的响应

周期信号的定义域为  $-\infty < t < \infty$ , 因此当周期信号作用于系统时, 可认为信号是在  $t = -\infty$  时刻接入系统的, 因而在有限时刻考虑系统响应时, 系统的响应就只存在稳态响应了。

通常所遇到的周期信号都满足狄里赫利条件, 因此可以把它分解为傅里叶级数。这样, 周期信号可看作由一系列谐波分量所组成。根据叠加定理, 周期信号在系统中产生的响应, 等于各谐波分量分别单独作用时所产生的响应之和。如果能求出系统的频率响应  $H(j\omega)$ , 那么利用式(3-217)便可求得各谐波单独作用时所产生的响应。最后, 把各个响应叠加起来, 就得到周期信号作用下系统的稳态响应。

根据式(3-33), 周期激励信号  $f_T(t)$  可展成指数形式的傅里叶级数, 即



$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad (3-221)$$

根据式(3-210),系统的响应为

$$y(t) = h(t) * f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n [h(t) * e^{jn\Omega t}] \quad (3-222)$$

根据式(3-212),式(3-222)可写为

$$y(t) = h(t) * f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\Omega) e^{jn\Omega t} \quad (3-223)$$

式(3-223)说明,在复振幅为  $F_n$ ,角频率为  $n\Omega$  的虚指数函数  $e^{jn\Omega t}$  的作用下,系统的响应是系数为  $F_n H(jn\Omega)$  的同频率的虚指数函数。知道了周期信号  $f_T(t)$  的指数形式傅里叶级数和系统的频率响应,就可按式(3-223)很方便地计算出系统的稳态响应。

当然,周期激励信号  $f_T(t)$  还可展开成三角形式的傅里叶级数,即

$$f_T(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad (3-224)$$

根据欧拉公式,式(3-224)可转化为

$$f_T(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-j\varphi_n} e^{-jn\Omega t} \quad (3-225)$$

根据式(3-210)和式(3-212),可得系统的响应为

$$f_T(t) = \frac{A_0}{2} H(0) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} H(jn\Omega) e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-j\varphi_n} H(-jn\Omega) e^{-jn\Omega t} \quad (3-226)$$

由于  $H(jn\Omega) = |H(jn\Omega)| e^{j\theta(n\Omega)}$ ,且  $|H(-jn\Omega)| = |H(jn\Omega)|$ , $\theta(-n\Omega) = -\theta(n\Omega)$ ,故式(3-226)可写为

$$f_T(t) = \frac{A_0}{2} H(0) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} |H(jn\Omega)| e^{j\theta(n\Omega)} e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-j\varphi_n} |H(jn\Omega)| e^{-j\theta(n\Omega)} e^{-jn\Omega t} \quad (3-227)$$

根据欧拉公式,式(3-227)可继续改写为

$$y(t) = \frac{A_0}{2} H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n |H(jn\Omega)| \cos[n\Omega t + \varphi_n + \theta(n\Omega)] \quad (3-228)$$

式(3-228)说明,直流分量产生的响应仍是直流分量,只是扩大了  $H(0)$  倍;角频率为  $n\Omega$  的  $n$  次谐波产生的响应仍是同频率的基本信号,只是振幅扩大了  $|H(jn\Omega)|$  倍,相位在原相位的基础上附加  $\theta(n\Omega)$ 。知道了周期信号  $f_T(t)$  的三角形式傅里叶级数和系统的频率响应,也可按式(3-228)很方便地计算出系统的稳态响应。

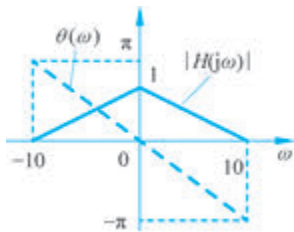


图 3-42 例 3-26 图

**例 3-26** 某 LTI 系统的  $|H(j\omega)|$  和  $\theta(\omega)$  如图 3-42 所示,若  $f(t) = 2 + 4\cos(5t) + 4\cos(10t)$ ,求系统的响应。

**解** 信号  $f(t)$  显然是周期信号,其基波角频率为  $\Omega = 5\text{rad/s}$ 。

(1) 解法一：傅里叶变换法。

对  $f(t)$  求傅里叶变换, 有

$$F(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + 4\pi[\delta(\omega - 5) + \delta(\omega + 5)] + 4\pi[\delta(\omega - 10) + \delta(\omega + 10)]$$

根据式(3-218), 有

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

所以

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= F(j\omega)H(j\omega) = 4\pi\delta(\omega)H(0) + 4\pi[\delta(\omega - 5)H(j5) + \delta(\omega + 5)H(-j5)] + \\ &\quad 4\pi[\delta(\omega - 10)H(j10) + \delta(\omega + 10)H(-j10)] \\ &= 4\pi\delta(\omega) + 4\pi[-j0.5\delta(\omega - 5) + j0.5\delta(\omega + 5)] \end{aligned}$$

求傅里叶逆变换得系统的响应为

$$y(t) = F^{-1}[Y(j\omega)] = 2 + 2\sin(5t)$$

(2) 解法二：傅里叶级数法。

$f(t)$  的表达式是三角形的傅里叶级数, 由图 3-42 可知

$$H(0) = 1, \quad H(j5) = 0.5e^{-j0.5\pi}, \quad H(j10) = 0$$

根据式(3-228)可求得系统的响应为

$$y(t) = 2 + 4 \times 0.5\cos(5t - 0.5\pi) = 2 + 2\sin(5t)$$

可见, 信号  $f(t)$  经过系统后, 直流分量不变, 基波分量的幅度衰减为原来的一半, 且相移  $90^\circ$ , 二次谐波分量完全被滤除。

### 3.8.4 无失真传输

一般情况下, 系统响应的波形与激励的波形不同, 信号在传输过程中将产生失真。

线性系统引起的失真是由两方面因素造成的。一方面是系统对信号中各频率分量幅度产生不同程度的衰减, 使响应各频率分量的相对幅度产生变化, 引起幅度失真。另一方面是系统对各频率分量产生的相移与频率不成正比, 使响应的各频率分量在时间轴上的相对位置产生变化, 引起相位失真。

必须指出, 线性系统的幅度失真与相位失真都不产生新的频率分量。而对于非线性系统, 由于其非线性特性对所传输的信号会产生非线性失真, 所以可能产生新的频率分量。

在实际应用中, 有时需要利用系统进行波形变换, 这时必然产生失真。而有时则希望传输过程中信号失真最小。下面讨论线性系统无失真传输的条件。

所谓信号无失真传输, 是指系统的输出信号与输入信号相比, 只有幅度的大小和出现时间先后不同, 而没有波形上的变化。输入信号为  $f(t)$ , 经过无失真传输后, 输出信号应为

$$y(t) = Kf(t - t_d) \quad (3-229)$$

即输出信号  $y(t)$  的幅度是输入信号的  $K$  倍, 而且比输入信号延迟了  $t_d$ 。设输出信号  $y(t)$  频谱函数为  $Y(j\omega)$ , 输入信号  $f(t)$  的频谱函数为  $F(j\omega)$ , 对式(3-229)进行傅里叶变换, 根据时移特性可知, 输出与输入信号频谱之间的关系为

$$Y(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d} F(j\omega) \quad (3-230)$$

由式(3-230)可知, 为了使信号传输无失真, 系统的频率响应函数应为

$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d} \quad (3-231)$$



第 35 集  
微课视频

其幅频特性和相频特性分别为

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = K \\ \theta(\omega) = -\omega t_d \end{cases} \quad (3-232)$$

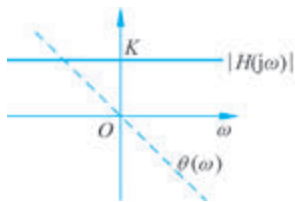


图 3-43 无失真传输系统的幅频特性和相频特性

式(3-231)和式(3-232)就是为了使信号无失真传输,对频率响应函数提出的要求,即在全部频带内,系统的幅频特性 $|H(j\omega)|$ 应为一个常数,而相频特性 $\theta(\omega)$ 应为过原点的直线。无失真传输系统的幅频特性和相频特性如图 3-43 所示。

上述是信号无失真传输的理想条件。当传输有限带宽的信号时,只要在信号占有频带范围内,系统的幅频特性和相频特性满足以上条件即可。

由于系统的冲激响应 $h(t)$ 是频率响应 $H(j\omega)$ 的傅里叶逆变换,因此对式(3-231)进行傅里叶逆变换,得

$$h(t) = K\delta(t - t_d) \quad (3-233)$$

式(3-233)是无失真传输对系统冲激响应的要求,即无失真传输系统的冲激响应也应是冲激函数,只是它是输入冲激函数的 $K$ 倍并延迟了 $t_d$ 。

**例 3-27** 某系统的幅频特性 $|H(j\omega)|$ 和相频特性 $\theta(\omega)$ 如图 3-44 所示,则下列信号通过该系统时,不产生失真的是( )。

- A.  $f(t) = \cos(t) + \cos(8t)$       B.  $f(t) = \sin(2t) + \sin(4t)$   
C.  $f(t) = \sin(2t)\sin(4t)$       D.  $f(t) = \cos^2(4t)$

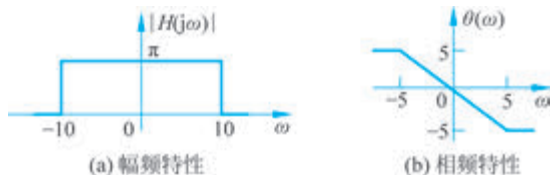


图 3-44 例 3-27 图

**解** 由幅频特性和相频特性可知,该系统对 $-5 < \omega < 5$ 的频率分量可无失真传输。

选项 A 中 $\cos(8t)$ 不在无失真传输范围内,故该信号通过系统会产生失真。选项 C 中,由于 $\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$ ,进行傅里叶级数展开后存在 $\cos(6t)$ ,它不在无失真传输范围内,故该信号通过系统会产生失真。选项 D 中,由于 $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$ ,进行傅里叶级数展开后存在 $\cos(8t)$ ,故该信号通过系统会产生失真。只有选项 B 表示的信号可以无失真地通过该系统。

### 3.8.5 理想低通滤波器

在实际应用中,常常希望改变一个信号的频率成分,提取或增大所希望的频率分量,滤除或减小不希望的频率分量,这个工程称为信号的滤波。按照允许通过的频率分量划分,滤波器可分为低通、高通、带通、带阻等几种。

具有如图 3-45 所示幅频特性和相频特性的系统称为理想低通滤波器。它将低于角频率  $\omega_c$  的信号无失真地传输,而阻止角频率高于  $\omega_c$  的信号通过,其中  $\omega_c$  称为截止角频率。信号能通过的频率范围称为通带,信号被阻止通过的频率范围称为阻带或阻带。

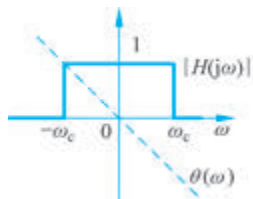


图 3-45 理想低通滤波器的幅频特性和相频特性

设理想低通滤波器的截止角频率为  $\omega_c$ ,通带内幅频特性  $|H(j\omega)|=1$ ,相频特性  $\theta(\omega)=-\omega t_d$ ,则理想低通滤波器的频率响应可写为

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} = g_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d} \quad (3-234)$$

### 1. 理想低通滤波器的冲激响应

系统的冲激响应是频率响应函数  $H(j\omega)$  的傅里叶逆变换,因此,理想低通滤波器的冲激响应为

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} [g_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d}]$$

由于

$$g_\tau(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)$$

根据傅里叶变换的对称性可知

$$\frac{\tau}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \leftrightarrow g_\tau(\omega)$$

令  $\frac{\tau}{2} = \omega_c$ , 得

$$\frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \leftrightarrow g_{2\omega_c}(\omega)$$

再由时移特性得理想低通滤波器的冲激响应为

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)] \quad (3-235)$$

其波形如图 3-46 所示。可见,理想低通滤波器冲激响应的峰值比输入的  $\delta(t)$  延迟了  $t_d$ ,而且输出脉冲在其建立之前就已出现。对于实际的物理系统,当  $t < 0$  时,输入信号尚未接入,当然不可能有输出。这里的结果是由于采用了实际上不可能实现的理想化

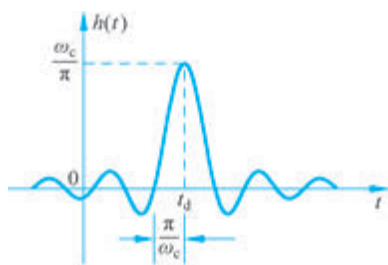


图 3-46 理想低通滤波器冲激响应的波形

传输特性所导致的。

### 2. 理想低通滤波器的阶跃响应

设理想低通滤波器的阶跃响应为  $g(t)$ ,它等于冲激响应  $h(t)$  与单位阶跃函数的卷积积分,即

$$g(t) = h(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(\tau - t_d)]}{\omega_c(\tau - t_d)} d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x_c} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{x_c} \frac{\sin x}{x} dx \quad (3-236)$$

由于  $\frac{\sin x}{x}$  是偶函数, 故

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \quad (3-237)$$

称函数  $\frac{\sin x}{x}$  的定积分为正弦积分, 表示为  $\text{Si}(y)$ , 即

$$\text{Si}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx \quad (3-238)$$

其函数值可以从正弦积分表中查得。将式(3-237)和式(3-238)代入式(3-236), 得理想低通滤波器的阶跃响应为

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_d)] \quad (3-239)$$

理想低通滤波器阶跃响应波形如图 3-47 所示。可见, 理想低通滤波器的阶跃响应和输入的阶跃函数相比有明显的失真, 它不像阶跃函数那样陡直上升, 而且在  $-\infty < t < \infty$  区间就已出现, 这同样是采用理想化频率响应所致。理想低通滤波器的阶跃响应的延迟时间为  $t_0$ 。阶跃响应的最小值出现在  $t_0 - \frac{\pi}{\omega_c}$  时刻, 最大值出现在  $t_0 + \frac{\pi}{\omega_c}$  时刻。阶跃响应从最小值

上升到最大值所需时间称为上升时间  $t_r$ ,  $t_r = \frac{2\pi}{\omega_c}$ 。可见理想低通滤波器的截止角频率  $\omega_c$  越

低, 阶跃响应  $g(t)$  上升越缓慢。令  $B = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{t_r}$ , 表示滤波器带宽(即截止频率)。由此可得到一个有用的结论: 理想低通滤波器阶跃响应的上升时间与系统的带宽成反比。

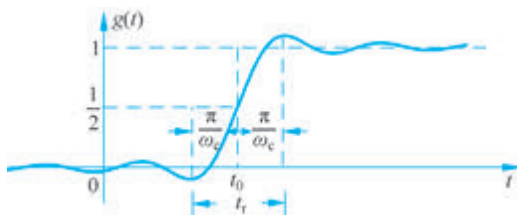


图 3-47 理想低通滤波器阶跃响应波形

当从某信号的傅里叶变换恢复或逼近原信号时, 如果原信号包含间断点, 那么在各间断点处, 其恢复信号将出现过冲, 这种由频率截断效应引起的振荡现象称为吉布斯现象。只要  $\omega_c < \infty$ , 则必有振荡。将理想低通滤波器第一个极大值所处时刻  $t_0 + \frac{\pi}{\omega_c}$  代入式(3-239), 得阶跃响应的最大值为

$$g_{\max} = 0.5 + \text{Si}(\pi)/\pi = 1.0895$$

其过冲比稳态值高约 9%。

虽然理想低通滤波器是物理不可实现的, 但传输特性接近于理想特性的电路却不难构成。图 3-48(a) 是一个二阶低通滤波器, 其中  $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ 。电路的频率响应函数为

$$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}} \quad (3-240)$$

考虑到  $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , 并令截止角频率  $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , 式(3-240)可写为

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + j\sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_c}} = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

其幅频特性和相频特性分别为

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}}$$

$$\theta(\omega) = -\arctan \left[ \frac{\sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_c}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \right]$$

图 3-48(c)和图 3-48(d)分别画出了该电路的幅频特性和相频特性。在  $\omega = \pm\omega_c$  处,  $|H(\pm j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta(\pm\omega) = \mp \frac{\pi}{2}$ 。可见,该电路的幅频、相频特性与理想低通滤波器相似。

实际上,电路的阶数越高,其幅频、相频特性越接近理想特性。对该电路的频率响应函数进行傅里叶逆变换可求出系统的冲激响应为

$$h(t) = \frac{2\omega_c}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\omega_c t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c t\right) \varepsilon(t)$$

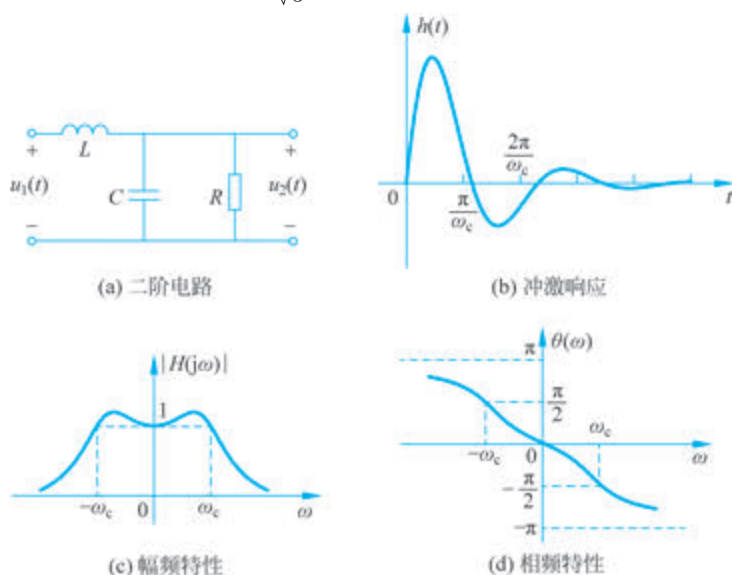


图 3-48 二阶低通滤波器的特性

图 3-48(b)画出了该电路的冲激响应,也与理想特性相似。不过,这里的响应是从  $t=0$  开始的,当  $t < 0$  时,  $h(t)=0$ ,这是由于该电路是物理可实现的。

为了能根据系统的幅频、相频特性或冲激响应、阶跃响应判断系统是否是物理可实现的,需要找到物理可实现系统所应满足的条件。

就时域特性而言,一个物理可实现的系统,其冲激响应和阶跃响应必须满足

$$\begin{cases} h(t) = 0, & t < 0 \\ g(t) = 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3-241)$$

即响应不应在激励作用之前出现。

就频域特性而言,佩利(Paley)和维纳(Wiener)证明了物理可实现系统的幅频特性必须满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (3-242)$$

并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty \quad (3-243)$$

式(3-243)称为佩利-维纳准则。从该准则可以看出,对于物理可实现系统,其幅频特性可在某些孤立频率点上为零,但不能在某个有限频带内为零。



第 36 集  
微课视频



信号的取样

## 3.9 取样定理

取样定理论述了在一定条件下,一个连续信号完全可以用离散样本值表示。这些样本值包含了该连续信号的全部信息,利用这些样本值可以恢复原信号。可以说,取样定理在连续信号与离散信号之间架起了一座桥梁,为其互相转换提供了理论依据。

### 3.9.1 信号的取样

所谓取样,就是利用取样脉冲序列  $s(t)$  从连续信号  $f(t)$  中“抽取”一系列离散样本值的过程。这样得到的离散信号称为取样信号。它是对信号进行数字处理(见图 3-49)的第一个环节。图 3-49 中的取样信号  $f_s(t)$  可写为

$$f_s(t) = f(t)s(t) \quad (3-244)$$

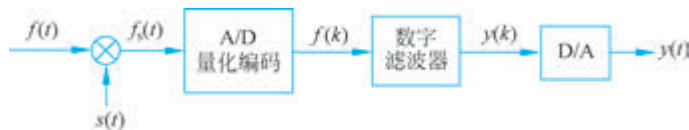


图 3-49 数字处理过程

其中,取样脉冲序列  $s(t)$  也称为开关函数。如果其各脉冲间隔的时间相同,均为  $T_s$ ,就称为均匀取样。 $T_s$  称为取样周期或取样间隔,  $f_s = 1/T_s$  称为取样频率或取样率,  $\omega_s = 2\pi/T_s$  称为取样角频率。信号的取样如图 3-50 所示。

如果  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ ,  $s(t) \leftrightarrow S(j\omega)$ ,则由频域卷积定理得取样信号  $f_s(t)$  的频谱函数为

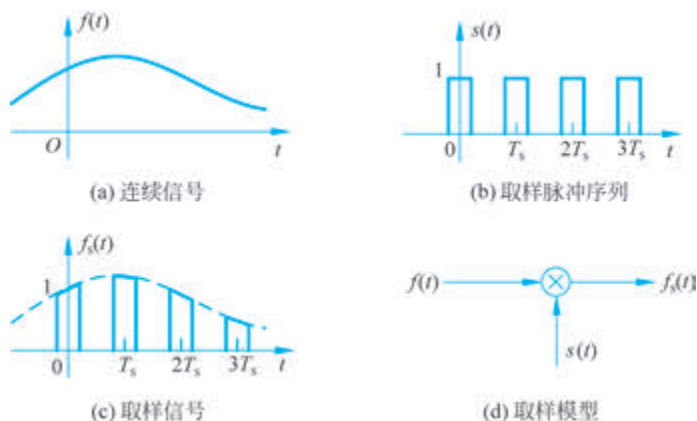


图 3-50 信号的取样

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S(j\omega) \quad (3-245)$$

### 1. 冲激取样

若  $s(t)$  是周期为  $T_s$  的冲激函数序列  $\delta_{T_s}(t)$ , 则称为冲激取样, 如图 3-51 所示。冲激序列  $\delta_{T_s}(t)$  的频谱函数也是周期冲激序列, 即

$$s(t) = \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow S(j\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad (3-246)$$

其中,  $\omega_s = 2\pi/T_s$ 。

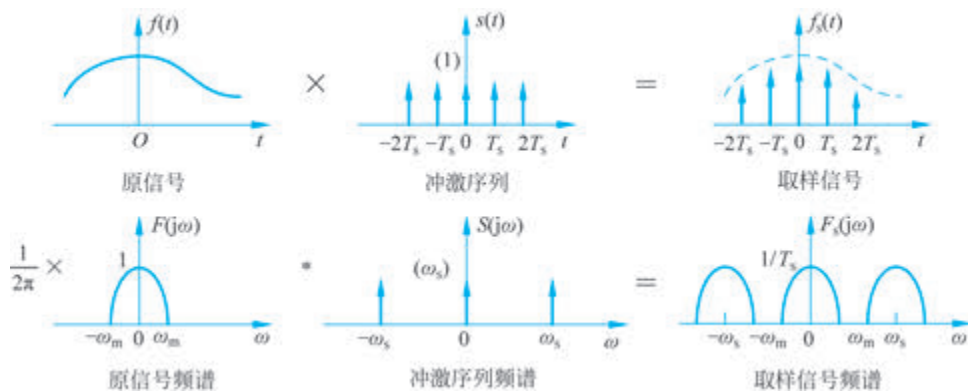


图 3-51 冲激取样

如果  $f(t)$  的频带是有限的, 即  $f(t)$  的频谱只在  $(-\omega_m, \omega_m)$  区间为有限值, 而其余区间为零, 这样的信号称为频带有限信号, 简称带限信号。

由式(3-244)得取样信号  $f_s(t)$  为

$$f_s(t) = f(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (3-247)$$

设  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , 将式(3-246)代入式(3-245)可求得取样信号  $f_s(t)$  的频谱函数为

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega) * \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_s)] \quad (3-248)$$

由图 3-51 和式(3-248)可知, 取样信号  $f_s(t)$  的频谱  $F_s(j\omega)$  是由原信号频谱  $F(j\omega)$  的无限个频移项组成, 其频移的角频率为  $n\omega_s$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 其幅值为原频谱的  $\frac{1}{T_s}$ 。

由取样信号  $f_s(t)$  的频谱  $F_s(j\omega)$  不难发现, 如果  $\omega_s \geq 2\omega_m$  (即  $f_s \geq 2f_m$  或  $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ ), 这时其频谱不发生混叠, 因此能设法 (如利用低通滤波器) 从  $F_s(j\omega)$  中取出  $F(j\omega)$ , 即从  $f_s(t)$  中恢复原信号  $f(t)$ ; 否则将发生混叠, 而无法恢复原信号。可见, 为了不发生频谱混叠, 必须满足  $\omega_s \geq 2\omega_m$ 。

## 2. 矩形脉冲取样

如图 3-52 所示, 若取样脉冲序列  $s(t)$  是幅度为 1, 脉宽为  $\tau$  ( $\tau < T_s$ ) 的单位矩形脉冲序列  $p_{T_s}(t)$ , 则取样脉冲序列  $s(t)$  的频谱函数为

$$S(j\omega) = \frac{2\pi\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s) \quad (3-249)$$

设  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , 将式(3-249)代入(3-245)可求得取样信号  $f_s(t)$  的频谱函数为

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S(j\omega) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F[j(\omega - n\omega_s)] \quad (3-250)$$

比较式(3-248)和式(3-250), 由图 3-51 和图 3-52 可知, 经过冲激取样或矩形脉冲取样后, 其取样信号  $f_s(t)$  的频谱相似。因此, 当  $\omega_s \geq 2\omega_m$  时, 矩形脉冲取样信号的频谱  $F_s(j\omega)$  也不会出现混叠, 从而能从取样信号  $f_s(t)$  中恢复原信号  $f(t)$ 。



频谱混叠



时分复用

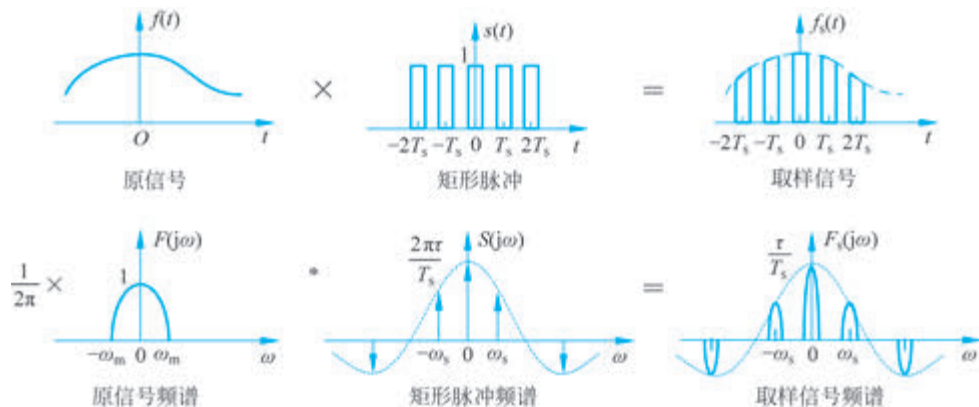


图 3-52 矩形脉冲取样

## 3.9.2 时域取样定理

时域取样定理可表述如下。

一个频谱在  $(-\omega_m, \omega_m)$  区间以外为零的频带有限信号  $f(t)$ , 可唯一地由其在均匀间隔  $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$  上的样点值  $f(nT_s)$  确定。

需要说明的是,为了能从取样信号  $f_s(t)$  中恢复原信号  $f(t)$ , 必须满足以下两个条件: ①  $f(t)$  必须是带限信号, 即其频谱函数在  $|\omega| > \omega_m$  各处为零; ② 取样频率不能太低, 必须满足  $f_s \geq 2f_m$ , 或者说, 取样间隔不能太大, 必须满足  $T_s \leq 1/(2f_m)$ , 否则将发生频谱混叠。通常把最低允许的取样频率  $f_s = 2f_m$  称为奈奎斯特(Nyquist)频率, 将最大允许的取样间隔  $T_s = 1/(2f_m)$  称为奈奎斯特间隔。

当  $\omega_s \geq 2\omega_m$  时, 将取样信号  $f_s(t)$  通过理想低通滤波器。

$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (3-251)$$

其截止角频率  $\omega_c$  取  $\omega_m \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$ , 有

$$F(j\omega) = F_s(j\omega)H(j\omega) \leftrightarrow f(t) = f_s(t) * h(t) \quad (3-252)$$

即可由取样信号  $f_s(t)$  恢复原信号  $f(t)$ 。

### 3.9.3 频域取样定理

根据时域与频域的对偶性可推出频域取样定理。频域取样定理表述如下: 一个在时域  $(-t_m, t_m)$  区间以外为 0 的时限信号  $f(t)$  的频谱函数为  $F(j\omega)$ , 可唯一地由其在均匀频率间隔  $f_s < 1/(2t_m)$  上的样值点  $F(jn\omega_s)$  确定。  $F(j\omega)$  的计算式为

$$F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(j\frac{n\pi}{t_m}\right) \text{Sa}(\omega t_m - n\pi) \quad (3-253)$$

其中,  $t_m = \frac{1}{2f_s}$ 。

## 本章小结

本章主要介绍连续时间信号与系统的频域分析方法, 依次介绍了连续时间周期信号的傅里叶级数表示法、连续时间非周期信号的傅里叶变换表示法、傅里叶变换的若干性质、周期信号的傅里叶表示法, 以及在频域中如何分析连续时间信号与系统, 最后介绍了连续时间信号与离散时间信号的桥梁——取样定理。

## 本章习题

3-1 求下列周期信号的基波角频率  $\Omega$  和周期  $T$ 。

(1)  $e^{j100t}$ ;

(2)  $\cos\left[\frac{\pi}{2}(t-3)\right]$ ;

(3)  $\cos(2t) + \sin(4t)$ ;

(4)  $\cos(2\pi t) + \cos(3\pi t) + \cos(5\pi t)$ ;

(5)  $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ ;

$$(6) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)。$$

3-2 4个周期相同的信号如图 3-53 所示。

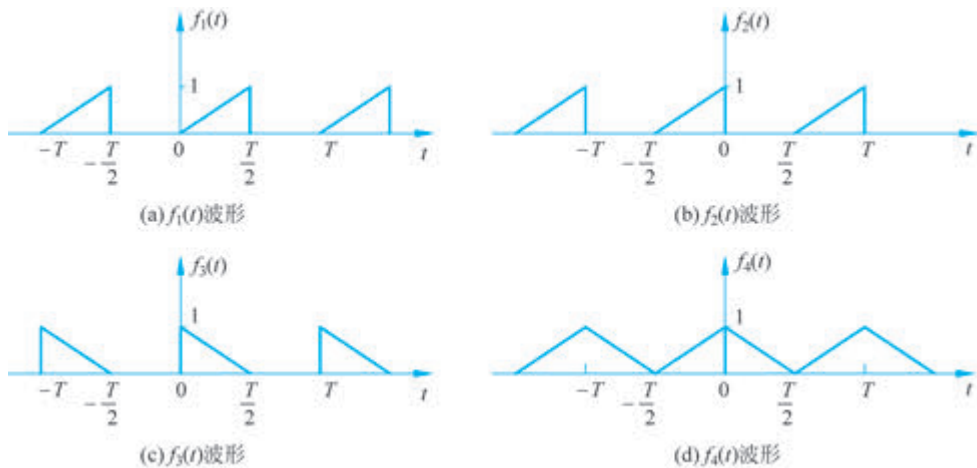


图 3-53 题 3-2 图

- (1) 用直接求傅里叶系数的方法求信号  $f_1(t)$  的傅里叶级数(三角形式)；
- (2) 将  $f_1(t)$  左(或右)移  $\frac{T}{2}$ , 可得  $f_2(t)$ , 利用(1)的结果求  $f_2(t)$  的傅里叶级数；
- (3) 利用以上结果求  $f_3(t)$  的傅里叶级数；
- (4) 利用以上结果求  $f_4(t)$  的傅里叶级数。

3-3 利用奇偶性判断如图 3-54 所示的各周期信号的傅里叶级数中所含有的频率分量。

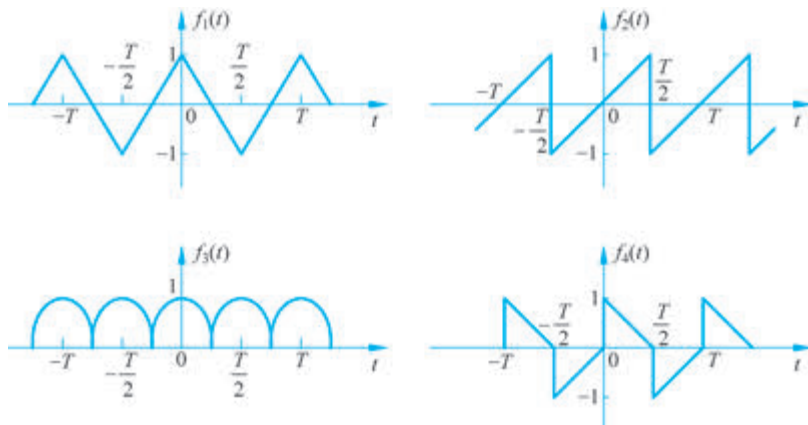


图 3-54 题 3-3 图

3-4 将如图 3-55 所示的周期信号  $f(t)$  展开为傅里叶级数。

3-5 已知周期电压

$$u(t) = \left[ 2 + 3\sin\frac{\pi}{6}t - 4\cos\frac{\pi}{6}t + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - 60^\circ\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + 45^\circ\right) \right] \text{ V}$$

试分别画出其单边、双边幅度谱与相位谱。

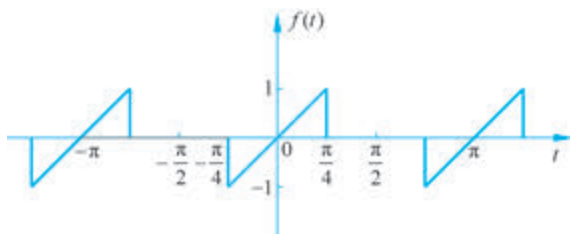


图 3-55 题 3-4 图

3-6 计算下列信号的傅里叶变换。

(1)  $f_1(t) = e^{jt} \operatorname{sgn}(3-2t)$ ;

(2)  $f_2(t) = \frac{d}{dt}[e^{-2(t-1)} \epsilon(t)]$ ;

(3)  $f_3(t) = e^{2t} \epsilon(-t+1)$ ;

(4)  $f_4(t) = \begin{cases} \cos \frac{\pi t}{2}, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ ;

(5)  $f_5(t) = \frac{2}{t^2+4}$ 。

3-7 若  $f(t)$  为虚函数, 且  $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ , 试证:

(1)  $R(\omega) = -R(-\omega), X(\omega) = X(-\omega)$ ;

(2)  $F(-j\omega) = -F^*(j\omega)$ 。

3-8 已知频谱  $F(j\omega) = [\epsilon(\omega) - \epsilon(\omega-2)]e^{-j\omega}$ , 求原函数  $f(t)$ 。

3-9 已知  $F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , 试求下列各式的傅里叶变换。

(1)  $\frac{df(t)}{dt} * \frac{1}{\pi t}$ ;

(2)  $(1-t)f(1-t)$ 。

3-10 已知  $F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , 求  $\int_{-\infty}^{1-\frac{1}{2}t} f(x)dx$  的傅里叶变换。

3-11 如图 3-56 所示的信号  $f(t)$ , 其傅里叶变换  $F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , 求:

(1)  $F(0)$ ;

(2)  $\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)d\omega$ 。

3-12 求如图 3-57 所示各信号的傅里叶变换。

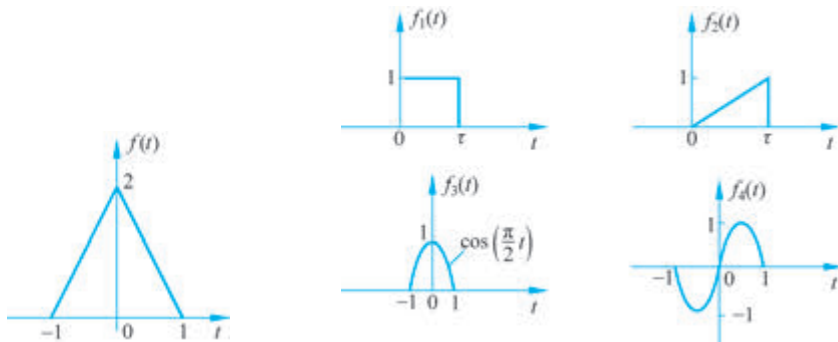


图 3-56 题 3-11 图

图 3-57 题 3-12 图

3-13 如图 3-58 所示信号  $f(t)$  的频谱函数为  $F(j\omega)$ , 求下列各值 (不必求出  $F(j\omega)$ )。



图 3-58 题 3-13 图

- (1)  $F(0)$ ;
- (2)  $\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega$ ;
- (3)  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$ 。

3-14 一个周期为  $T$  的周期信号  $f(t)$ , 已知其指数形式的傅里叶级数的系数为  $F_n$ , 求下列周期信号的傅里叶级数的系数。

- (1)  $f_1(t) = f(t - t_0)$ ;
- (2)  $f_2(t) = f(-t)$ ;
- (3)  $f_3(t) = \frac{df(t)}{dt}$ ;
- (4)  $f_4(t) = f(at), a > 0$ 。

3-15 已知信号  $f(t)$  如图 3-59 所示, 其傅里叶变换  $F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , 求  $\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$ 。

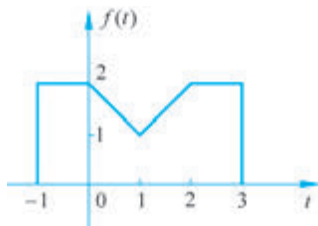


图 3-59 题 3-15 图

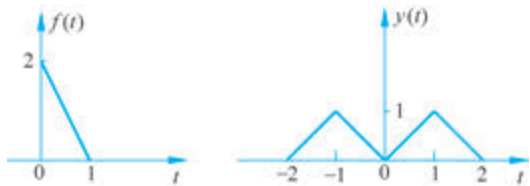


图 3-60 题 3-16 图

3-16 如图 3-60 所示, 信号  $f(t)$  的傅里叶变换为  $F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ , 求信号  $y(t)$  的傅里叶变换  $Y(j\omega)$ 。

3-17 已知信号  $f(t)$  的傅里叶变换为  $F(j\omega)$ , 求下列信号的傅里叶变换。

- (1)  $f(t)\cos[3(t-4)]$ ;
- (2)  $(t-3)f(-3t)$ ;
- (3)  $\int_{-\infty}^t f(2\tau-2) d\tau$ 。

3-18 求下列频谱函数  $F(j\omega)$  的傅里叶逆变换  $f(t)$ 。

- (1)  $F(j\omega) = 2\epsilon(1-\omega)$ ;
- (2)  $F(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega} \cos 5\omega$ ;
- (3)  $F(j\omega) = \frac{\sin(3\omega+6)}{\omega+2}$ 。

3-19 利用常用信号的傅里叶变换和傅里叶变换性质, 证明:

- (1)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ;
- (2)  $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi$ 。

3-20 某 LTI 系统的频率响应  $H(j\omega) = \frac{j\omega - 1}{j\omega + 1}$ , 若输入  $f(t) = \sin t$ , 求系统的输出  $y(t)$ 。

3-21 如图 3-61(a) 所示的系统, 其中带通滤波器的幅频响应如图 3-61(b) 所示, 其相频特性  $\varphi(\omega) = 0$ , 若输入为  $f(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}$ ,  $s(t) = \cos(1000t)$ , 求输出信号  $y(t)$ 。

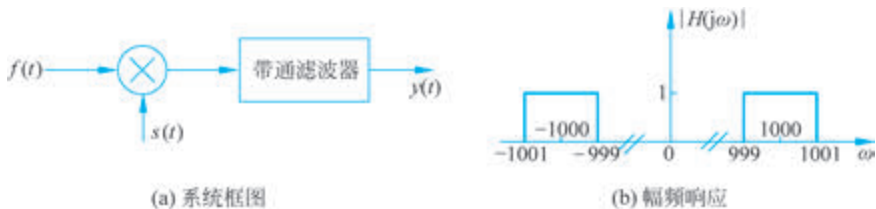


图 3-61 题 3-21 图

3-22 某 LTI 系统的幅频响应  $|H(j\omega)|$  和相频响应  $\varphi(\omega)$  如图 3-62 所示。若激励  $f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt$ , 求该系统的响应  $y(t)$ 。

3-23 如图 3-63 所示的系统, 已知  $f(t) = 1 + \cos t + \cos 2t$ ,  $s(t) = \cos 2t$ ,  $H(j\omega) = \begin{cases} 2e^{-j2\omega}, & |\omega| < 1.5 \text{ rad/s} \\ 0, & |\omega| > 1.5 \text{ rad/s} \end{cases}$ , 求系统的输出  $y(t)$ 。

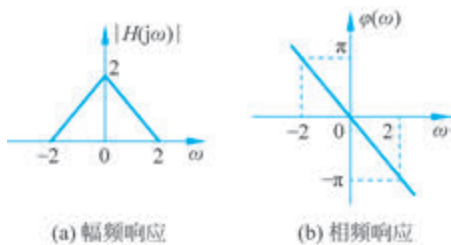


图 3-62 题 3-22 图

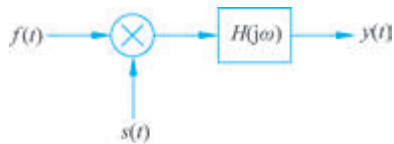


图 3-63 题 3-23 和题 3-24 图

3-24 如图 3-63 所示的系统, 已知  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt}$ ,  $-\infty < t < \infty$ ,  $s(t) = \cos t$ ,  $H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\frac{\omega\pi}{3}}, & |\omega| < 1.5 \text{ rad/s} \\ 0, & |\omega| > 1.5 \text{ rad/s} \end{cases}$ , 求输出  $y(t)$ 。

3-25 某 LTI 系统的频率响应函数为

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{j\frac{\pi}{2}}, & -6 < \omega < 0 \text{ rad/s} \\ e^{-j\frac{\pi}{2}}, & 0 < \omega < 6 \text{ rad/s} \\ 0, & \omega < -6 \text{ rad/s 或 } \omega > 6 \text{ rad/s} \end{cases}$$

当激励  $f(t) = \frac{\sin 3t}{t} \cos 5t$  时, 求系统的输出  $y(t)$ 。

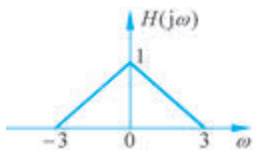


图 3-64 题 3-26 图

3-26 某 LTI 系统如图 3-64 所示, 已知其系统函数  $H(j\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{3}, & |\omega| < 3 \text{ rad/s} \\ 0, & |\omega| > 3 \text{ rad/s} \end{cases}$ , 输入信号  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3e^{jn(\Omega t + \frac{\pi}{2})}$ ,  $\Omega = 1 \text{ rad/s}$ , 求该系统的输出  $y(t)$ 。

3-27 有限频带信号  $f(t)$  的最高频率为  $100 \text{ Hz}$ , 若对下列信号进行时域取样, 求最小取样频率  $f_s$ 。

- (1)  $f(3t)$ ;
- (2)  $f^2(t)$ ;
- (3)  $f(t) * f(2t)$ ;
- (4)  $f(t) + f^2(t)$ 。

3-28 有限频带信号  $f(t) = 5 + 2\cos(2\pi f_1 t) + \cos(4\pi f_1 t)$ , 其中  $f_1 = 1 \text{ kHz}$ , 用  $f_s = 5 \text{ kHz}$  的冲激函数序列  $\delta_{T_s}(t)$  进行取样。

- (1) 画出  $f(t)$  及取样信号  $f_s(t)$  在  $(-10 \text{ kHz}, 10 \text{ kHz})$  频率区间的频谱图。
- (2) 若由  $f_s(t)$  恢复原信号, 理想低通滤波器的截止频率  $f_c$  应如何选择?

## 科学家故事

让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅里叶(Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768—1830) 出生在法国中部一个普通裁缝家庭。9 岁时, 傅里叶父母亡故, 他变成一个孤儿; 12 岁时, 他在镇上的军校开始接受教育; 13 岁那年, 傅里叶开始全身心投入数学研究中。傅里叶不仅数学能力超群, 还擅长授课。因此, 他被拿破仑安排到巴黎综合理工学院, 负责教授数学。1798 年, 傅里叶跟随拿破仑军队远征埃及, 期间对那片灼热的沙漠萌生了别样的情感, 回到巴黎后, 他如法炮制, 将自己的房间布置得像沙漠般灼热, 以至于朋友们都称之为地狱熔炉。他相信酷热能保持身体健康, 甚至能治愈一些疾病。傅里叶将其对高温的偏爱延伸到了学术上, 研究热的传导。1807 年, 傅里叶向科学院提交了一篇题为《热的传播》的论文, 但这篇论文没有得到拉格朗日的认可。1810 年, 傅里叶再一次提交论文《热在固体中的运动理论》, 这篇论文虽然赢得了奖金, 但科学院从文章的严格性和普遍性提出了批评, 还是未能发表。最后, 傅里叶决定将所研究的热扩散问题写成书, 1822 年, 傅里叶出版了个人专著《热的分析理论》, 提出并证明了将周期函数展开为正弦级数的原理, 奠定了傅里叶级数的理论基础。傅里叶的一生成于热学, 毁于热学。1830 年的一个夏天, 傅里叶生了一场小病, 对热力充满信仰的他, 觉得热应该可以治疗自己的病, 于是关上门窗, 穿上厚厚的衣服, 坐在火炉边, 结果被热死了。