

基础必备知识

任务1 常用基本公式

1. 不等式

1) 绝对值不等式

$$(1) |x| \leq a (a > 0) \Rightarrow -a \leq x \leq a \quad (2) |x| \geq a (a > 0) \Rightarrow x \geq a, x \leq -a$$

2) 一元一次不等式

形如 $ax + b \geq 0 (a \neq 0)$ 的不等式称为一元一次不等式, 其求解思路为移项 $\rightarrow$ 除系数。

$$(1) ax + b \geq 0 (a > 0) \Rightarrow x \geq -\frac{b}{a} \quad (2) ax + b \geq 0 (a < 0) \Rightarrow x \leq -\frac{b}{a}$$

【例 0-1】 解不等式 $|x - 1| \geq 2$ 。

解: 由题意可得 $x - 1 \geq 2$ 或 $x - 1 \leq -2$, 即 $x \geq 3$ 或 $x \leq -1$ 。

3) 一元二次不等式

形如 $ax^2 + bx + c \geq 0 (a \neq 0)$ 的不等式称为一元二次不等式。若对应的一元二次方程的两根分别为 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$, 如图 0-1 所示, 则

$$(1) ax^2 + bx + c \geq 0 (a > 0) \Rightarrow x \geq x_2, x \leq x_1$$

$$(2) ax^2 + bx + c \leq 0 (a > 0) \Rightarrow x_1 \leq x \leq x_2$$

【例 0-2】 解不等式 $2x^2 + 3x + 1 \leq 0$ 。

解: 不等式对应的一元二次方程为 $2x^2 + 3x + 1 = 0$, 方程的两实数根为 $-\frac{1}{2}, -1$, 所以原不等式的解为 $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ 。

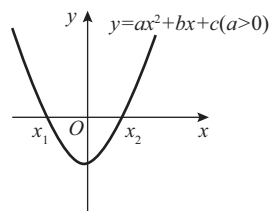


图 0-1

4) 指数与对数不等式

求解思路: 化为同底的指数(同底的对数) $\rightarrow$ 利用函数单调性转化为常规不等式。

(1) 形如 $a^{kx} \geq a^{bx+m} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的不等式称为指数不等式, 即

$$a^{kx} \geq a^{bx+m} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1) \Rightarrow \begin{cases} kx > bx + m & (a > 1) \\ kx < bx + m & (0 < a < 1) \end{cases}$$

(2) 形如 $\log_a kx \geq \log_a (bx + m) (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的不等式称为对数不等式, 即

$$\log_a kx \geq \log_a (bx + m) (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1) \Rightarrow \begin{cases} kx \geq bx + m & (a > 1) \\ kx \leq bx + m & (0 < a < 1) \end{cases}$$

【例 0-3】 解不等式 $2^{3x} > 4$ 。

解: 不等式可以转换为 $2^{3x} > 2^2$, 由于函数 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $3x > 2$, 即 $x > \frac{2}{3}$ 。

5) 分式不等式

形如 $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ 的不等式称为分式不等式。

$$(1) \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \quad (2) \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) < 0$$

$$(3) \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \quad (4) \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) > 0$$

2. 代数公式

- (1) 平方差公式: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ 。
 (2) 完全平方和、差公式: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 。
 (3) 立方和、差公式: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ 。

3. 指数与对数公式

1) 指数公式

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (3) \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(4) a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (5) (a^m)^n = a^{mn} = a^{nm} \quad (6) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$(7) \sqrt{a^2} = |a|$$

2) 对数公式

$$(1) \log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad (2) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$(3) \log_a x^n = n \log_a x \quad (4) x = a^{\log_a x}, x^y = a^{y \log_a x} \text{ (经常逆用)}$$

4. 三角公式

$$(1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (2) 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$(3) 1 + \cot^2 x = \csc^2 x \quad (4) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(5) \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

5. 几何公式

- (1) 扇形弧长: $l = |\alpha| r$ (α 为圆心角, r 为半径)。
 (2) 扇形面积: $s = \frac{1}{2} l r = \frac{1}{2} |\alpha| r^2$ (α 为圆心角, r 为半径, l 为弧长)。
 (3) 圆的面积: $s = \pi r^2$ 。
 (4) 圆的周长: $l_{\text{周长}} = 2\pi r$ 。
 (5) 圆锥体积: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ (r 为底圆的半径, h 为圆锥的高)。
 (6) 球的体积: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ 。
 (7) 球的表面积: $s = 4\pi r^2$ 。
 (8) 圆柱的体积: $V = \pi r^2 h$ 。

基础必备知识练习题

1. 解下列不等式。

(1) $-x+4>7$

(2) $3x-1\leqslant-2$

(3) $|x-2|<3$

(4) $|2x+1|\geqslant 5$

(5) $(x-1)(x+2)>0$

(6) $(-x+1)(2x+1)\leqslant 0$

(7) $x^2-4\leqslant 0$

(8) $-2x^2+1<-7$

(9) $x^2-3x+2\leqslant 0$

(10) $-x^2-5x+6\leqslant 0$

2. 解下列不等式。

(1) $2^{x-1}>1$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}>\frac{1}{8}$

(3) $\log_2(x-2)>2$

(4) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\leqslant 0$

(5) $\frac{2x+3}{x-1}\leqslant 0$

(6) $\frac{-x+1}{2x}>0$

第1部分

函数与极限

模块1 函数的概念

模块2 函数的常见性质

模块3 初等函数

模块4 函数极限的概念与性质

模块5 函数极限的基本运算

模块6 无穷小与无穷大

模块7 常见的经典极限

模块8 函数的连续性

模块1 函数的概念

学习要求

- (1) 理解函数的定义,掌握求函数的反函数的方法。
- (2) 掌握求抽象函数的方法。
- (3) 掌握函数定义域常见的类型,并熟练应用。

任务2 函数与反函数

1. 函数的定义

设有两个变量 x, y , 变量 x 在非空实数集 D 内任意取出一个数值, 通过对应法则 f , 都会有唯一的 y 与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 如图 1-1 所示, 记作 $y = f(x)$ 。

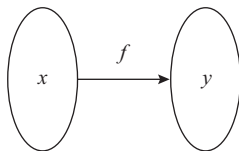


图 1-1

其中, x 称为自变量, y 称为因变量, 非空实数集 D 称为定义域。

理解提示

函数的定义需满足三个条件: 一是自变量 x 的取值范围, 只能取实数; 二是自变量 x 的取值方式, 任意随机取; 三是自变量取一个特定值所对应的因变量 y 取值的个数必须唯一。

【例 1-1】 下列问题中, 变量 y 是否为变量 x 的函数?

- (1) 一次数学考试后, 每位学生 x 都有唯一的分数 y 。
- (2) 变量 x 与变量 y 的数学关系式为 $y = \pm\sqrt{x}$ 。

解:

- (1) 变量 x 代表学生, 不是实数, 因此, y 不是 x 的函数。
- (2) 若 $x=4$, 可得到 $y=2$ 或 -2 , 不唯一, 因此, y 不是 x 的函数。

2. 反函数

1) 反函数的定义

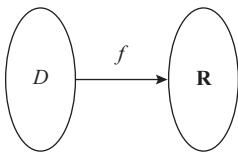


图 1-2

设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D , 值域为 $\mathbf{R}$, 对于 $\mathbf{R}$ 内的每一个 y , 都可以通过 $y = f(x)$ 确定唯一的 $x = \varphi(y)$, $x \in D$ 与之对应, 如图 1-2 所示, 这样的定义下, 以 y 为自变量的函数称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $f^{-1}(x)$ 。

理解提示

- (1) 求函数 $y=f(x)$ 的反函数, 可以理解为求解关于 x 的方程, 求解出的方程须唯一。
 (2) 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数的定义域和值域互换了。

2) 反函数的图象特点

同一坐标系中, 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数的图象是关于直线 $y=x$ 对称的。

【例 1-2】 求函数 $y=3x-1$ 的反函数。

解: 通过移项变换得关于 x 的方程为 $3x-y-1=0$, 解方程得

$$x = \frac{y+1}{3}$$

即该函数的反函数为

$$y = \frac{x+1}{3}$$

【例 1-3】 求函数 $y=\sqrt{x}+1$ 的反函数。

解: 通过解关于 x 的方程可得

$$x = (y-1)^2$$

而由题意明显可知 $y \geq 1$, 所以, 该函数的反函数为

$$y = (x-1)^2 \quad (x \geq 1)$$

规律方法

求一个函数的反函数表达式, 需考虑反函数的定义域, 应与原函数的值域一样。

3) 反三角函数

称三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$ 的反函数为反三角函数, 分别为 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x, y=\operatorname{arcsec} x, y=\operatorname{arccsc} x$ 。

其中, $y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 中, x 的取值范围是 $[-1, 1]$ 。

【例 1-4】 计算下列函数值。

- (1) $\arctan \sqrt{3}$ (2) $\arccos 0$

解:

- (1) 因为 $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, 所以 $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ 。

- (2) 因为 $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, 所以 $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ 。

任务 3 求函数的值

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值可以表示为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 。

【例 1-5】 设 $f(x)=x^2-1$, 求 $f(1), f(-x), f(3m-1)$ 。