第3章

应变理论

3.1 位移与相对位移

3.1.1 位移

可变形固体在外力作用下，其内部各点的空间位置会发生改变。通常将物体内某点空间位置的改变称为该点的**位移**。当物体内各点的位移均为已知时，物体在变形后的空间位置和形状即被确定。因此分析物体的变形时应从点的位移开始。根据物体发生位移后的几何形状是否发生变化，位移可以分为**刚体位移**和**变形位移**。

若物体内的各点虽然发生位移，但发生位移前后物体内任意两点间的距离都保持不变，这种情况下的位移称为**刚体位移**。若物体内的各点发生位移后，不能保证物体内任意两点间的距离保持不变，这种情况下的位移称为**变形位移**。

根据位移的定义可知，位移既有大小又有方向，因此位移是矢量。在直角坐标系下，物体内任一点的**位移矢量**可表示为

$$\boldsymbol{u}=u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}+u_z\boldsymbol{k} \tag{3-1}$$

其中，u_x、u_y、u_z 为位移分量。

3.1.2 相对位移

通常将物体内任意两点间位移的差值称为**相对位移**。为描述变形和位移的关系，考察如图 3-1 所示物体内任一微小线段 PQ 两端点之间的相对位移。设 P 点的坐标为(x,y,z)，Q 点的坐标为$(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z)$，则 P 点的位移分量可以表示为

$$\begin{cases} u_x^P=u_x(x,y,z) \\ u_y^P=u_y(x,y,z) \\ u_z^P=u_z(x,y,z) \end{cases} \tag{a}$$

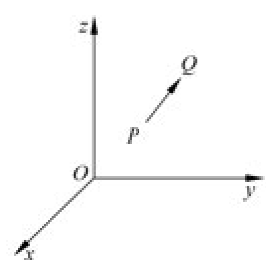

图 3-1

Q 点的位移分量可以表示为

$$\begin{cases} u_x^Q=u_x(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z) \\ u_y^Q=u_y(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z) \\ u_z^Q=u_z(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z) \end{cases} \tag{b}$$

P 点和 Q 点间的**相对位移矢量**为

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{u} &= (u_x^Q - u_x^P)\boldsymbol{i} + (u_y^Q - u_y^P)\boldsymbol{j} + (u_z^Q - u_z^P)\boldsymbol{k} \\ &= \delta u_x \boldsymbol{i} + \delta u_y \boldsymbol{j} + \delta u_z \boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{3-2}$$

其中，δu_x、δu_y、δu_z 为相对位移分量。

由于上述相对位移存在，引起了物体的变形。

3.1.3 相对位移张量

根据相对位移矢量式(3-2)，并利用连续函数的微分法则，可以将图 3-1 中微线段的 P 点和 Q 点间的相对位移分量表示为

$$\begin{cases}\delta u_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}\mathrm{d}z \\ \delta u_y = \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\mathrm{d}z \\ \delta u_z = \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\mathrm{d}z\end{cases} \tag{a}$$

上式可用矩阵形式改写为

$$\begin{bmatrix}\delta u_x \\ \delta u_y \\ \delta u_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{\partial u_x}{\partial y} & \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial x} & \dfrac{\partial u_z}{\partial y} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z\end{bmatrix} \tag{3-3a}$$

若采用指标记法，可将式(3-3a)简记为

$$\delta u_i = u_{i,j}\,\mathrm{d}x_j \tag{3-3b}$$

由于相对位移 δu_i 和相对位置 $\mathrm{d}x_j$ 都是矢量(一阶张量)，由式(3-3b)和张量识别法则可知 $u_{i,j}$ 是二阶张量，称为**相对位移张量**。

由式(3-3b)可见，相对位移张量中的每一项都是位移分量对坐标分量的偏导数，因此相对位移张量是位移矢量对坐标分量的一阶偏导数。

MATLAB 实践 3-1：位移及相对位移张量

【例 3-1】 如图 3-2 所示边长为 1m 的正方形 $OABC$，已知：O 点的位移分量 $u_x^O = u_y^O = 0$；C 点的位移分量 $u_x^C = -2\mathrm{mm}$，$u_y^C = 1\mathrm{mm}$；B 点的位移分量 $u_x^B = -5\mathrm{mm}$，$u_y^B = 4\mathrm{mm}$。求该正方形的位移场函数及相对位移张量。

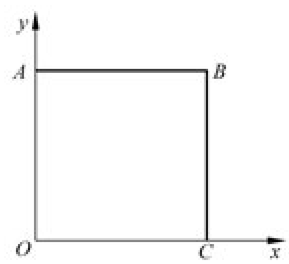

图 3-2

【解】 编写 MATLAB 程序 ex03_01.mlx，内容如下：

```
clear
% ---求位移场函数---------------------------
syms ux(x,y) uy(x,y)
```

```
syms a1 b1 c1 a2 b2 c2 % 待定系数
ux(x,y) = a1 * x + b1 * y + c1;
uy(x,y) = a2 * x + b2 * y + c2;
% O点位移
eq1 = ux(0,0) == 0;
eq2 = uy(0,0) == 0;
% C点位移
eq3 = ux(1,0) == -2e-3;
eq4 = uy(1,0) == 1e-3;
% B点位移
eq5 = ux(1,1) == -5e-3;
eq6 = uy(1,1) == 4e-3;
eq = [eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6];
X = [a1,b1,c1,a2,b2,c2];
r = solve(eq,X); % 求待定系数
a1 = r.a1;
b1 = r.b1;
c1 = r.c1;
a2 = r.a2;
b2 = r.b2;
c2 = r.c2;
ux = eval(ux);
uy = eval(uy);
% ---求相对位移张量------------------------
uij = [diff(ux,x,1),diff(ux,y,1);...
       diff(uy,x,1),diff(uy,y,1)];
% ---输出结果-----------------------------
syms u_x u_y
disp('位移场函数')
disp([u_x,u_y] ==[ux,uy])
syms u_x_x u_x_y u_y_x u_y_y
uxy = [u_x_x, u_x_y; u_y_x, u_y_y];
disp('相对位移张量')
disp(uxy == uij)
```

运行 ex03_01.mlx,得到

位移场函数

$$\left(u_x = -\frac{x}{500} - \frac{3y}{1000} \quad u_y = \frac{x}{1000} + \frac{3y}{1000}\right)$$

相对位移张量

$$\begin{pmatrix} u_{x,x} = -\frac{1}{500} & u_{x,y} = -\frac{3}{1000} \\ u_{y,x} = \frac{1}{1000} & u_{y,y} = \frac{3}{1000} \end{pmatrix}$$

3.2 几何方程与应变张量

3.2.1 几何方程

为了进一步研究物体的变形程度,需要引入应变的概念。为定义物体内某点的应变,从

物体内任一点 M 取出一个平行正六面体，其变形前、后的位置如图 3-3 所示。设 M 点的坐标为(x,y,z)，A 点的坐标为$(x+\mathrm{d}x,y,z)$，B 点的坐标为$(x,y+\mathrm{d}y,z)$，C 点的坐标为$(x,y,z+\mathrm{d}z)$。

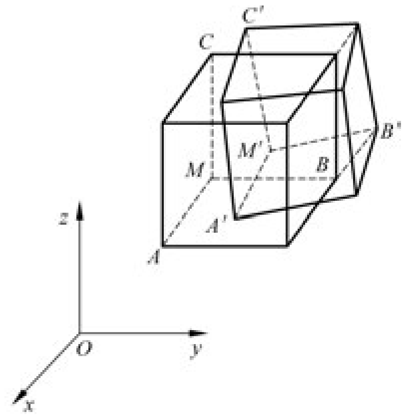

图 3-3

如图所示，M 点沿坐标轴 x 方向的**正应变**或**线应变**是沿 x 轴方向的微线段 MA 变形前后长度的变化率，并规定**伸长为正**、**缩短为负**，在小变形情况下可描述为

$$\varepsilon_x=\frac{u_x^A-u_x^M}{\mathrm{d}x} \tag{a}$$

根据连续函数的微分法则，可得

$$u_x^A-u_x^M=u_x(x+\mathrm{d}x,y,z)-u_x(x,y,z)=\frac{\partial u_x}{\partial x}\mathrm{d}x \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)得

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

经过类似的分析，可以得到 M 点沿坐标轴 y 方向和 z 方向的正应变或线应变的表达式，将它们合记为

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u_x}{\partial x}\\[2mm]\varepsilon_y=\dfrac{\partial u_y}{\partial y}\\[2mm]\varepsilon_z=\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\end{cases} \tag{3-4a}$$

如图 3-3 所示，M 点在平行于坐标面 yOz 的平面 MBC 内的**切应变**或**角应变**是直角 BMC 的改变量，并规定**减小为正**、**增大为负**，在小变形情况下可以描述为

$$\gamma_{yz}=\frac{u_z^B-u_z^M}{\mathrm{d}y}+\frac{u_y^C-u_y^M}{\mathrm{d}z} \tag{c}$$

根据连续函数的微分法则，可得

$$\begin{cases}u_z^B-u_z^M=u_z(x,y+\mathrm{d}y,z)-u_z(x,y,z)=\dfrac{\partial u_z}{\partial y}\mathrm{d}y\\[2mm]u_y^C-u_y^M=u_y(x,y,z+\mathrm{d}z)-u_y(x,y,z)=\dfrac{\partial u_y}{\partial z}\mathrm{d}z\end{cases} \tag{d}$$

将式(d)代入式(c)得

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}$$

经过类似的分析，可以得到 M 点在平行于坐标面 xOy 和 xOz 的平面 MAB 内的切应变或角应变的表达式，将它们合并为

$$
\begin{cases}
\gamma_{xy}=\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+\dfrac{\partial u_x}{\partial y} \\
\gamma_{yz}=\dfrac{\partial u_z}{\partial y}+\dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\
\gamma_{zx}=\dfrac{\partial u_x}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial x}
\end{cases} \tag{3-4b}
$$

由此定义的切应变还可称为**工程切应变**或**工程角应变**。

通常将 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx} 统称为工程应变分量。将描述工程应变与位移分量之间微分关系的式(3-4a)和式(3-4b)合记为

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x=\dfrac{\partial u_x}{\partial x} \\
\varepsilon_y=\dfrac{\partial u_y}{\partial y} \\
\varepsilon_z=\dfrac{\partial u_z}{\partial z} \\
\gamma_{xy}=\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+\dfrac{\partial u_x}{\partial y} \\
\gamma_{yz}=\dfrac{\partial u_z}{\partial y}+\dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\
\gamma_{zx}=\dfrac{\partial u_x}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial x}
\end{cases} \tag{3-5a}
$$

称其为**几何方程**，它描述应变分量和位移分量之间的微分关系。也可以用矩阵形式将式(3-5a)表示为

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\
0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\
\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\
0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\
\dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \tag{3-5b}
$$

3.2.2 应变张量

在实际应用中，经常用到**张量切应变**或**张量角应变**，其定义为

$$\begin{cases} \varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) \\ \varepsilon_{yz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) \\ \varepsilon_{zx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \end{cases}$$

根据式(3-4b)可知，张量切应变和工程切应变之间的关系为

$$\begin{cases} \varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \varepsilon_{yz} = \dfrac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \varepsilon_{zx} = \dfrac{1}{2}\gamma_{zx} \end{cases}$$

根据以上两式，采用指标记法，可以将几何方程(3-5)简记为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3-6}$$

通常将 ε_{ij} 称为**应变张量**。根据式(3-6)可知，应变张量也是对称张量。

MATLAB 实践 3-2：应变张量

【例 3-2】 如图 3-4 所示，边长为 1m 的正方形 $OBCD$ 变形后成为四边形 $OB'C'D'$。已知：B 点的位移分量 $u_x^B = -1.5\text{mm}$，$u_y^B = 3.5\text{mm}$；C 点的位移分量 $u_x^C = -4.5\text{mm}$，$u_y^C = 4\text{mm}$。求该正方形的相对位移张量和应变张量。

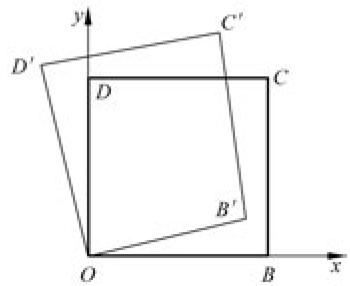

图　3-4

【解】 编写 MATLAB 程序 ex03_02.mlx，内容如下：

```
clear
syms x y a1 b1 a2 b2
assume(a1,'real')
assume(b1,'real')
assume(a2,'real')
assume(b2,'real')
ux = a1 * x + b1 * y;
uy = a2 * x + b2 * y;
xB = 1;
yB = 0;
xC = 1;
yC = 1;
uxB = -1.5e-3;
uyB = 3.5e-3;
uxC = -4.5e-3;
uyC = 4e-3;
```

```
eq1 = uxC == a1 * xC + b1 * yC;
eq2 = uyC == a2 * xC + b2 * yC;
eq3 = uxB == a1 * xB + b1 * yB;
eq4 = uyB == a2 * xB + b2 * yB;
Eqs = [eq1,eq2,eq3,eq4];
X = [a1,a2,b1,b2];
[a1,a2,b1,b2] = solve(Eqs,X);
ux = eval(ux);
uy = eval(uy);
% --- 相对位移张量 duidxj -----------------
duidxj = [diff(ux,x,1),diff(ux,y,1);...
          diff(uy,x,1),diff(uy,y,1)];
% --- 应变张量 stij -----------------------
stij = 0.5 * duidxj + 0.5 * duidxj';
% --- 输出结果 ----------
disp('相对位移张量')
disp(duidxj)
disp('应变张量')
disp(stij)
```

运行 ex03_02.mlx,得到

相对位移张量

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2000} & -\frac{3}{1000} \\ \frac{7}{2000} & \frac{1}{2000} \end{pmatrix}$$

应变张量

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2000} & -\frac{1}{4000} \\ \frac{1}{4000} & \frac{1}{2000} \end{pmatrix}$$

3.2.3 位移边界条件

位移分量除满足几何方程(3-6)外,还应在已知位移的边界上满足

$$\begin{cases} u_x = u_x^{(0)} \\ u_y = u_y^{(0)} \\ u_z = u_z^{(0)} \end{cases} \tag{3-7a}$$

其中,$u_x^{(0)}$、$u_y^{(0)}$、$u_z^{(0)}$ 为边界上已知位移分量。

上式称为**位移边界条件**。还可利用指标记法将位移边界条件简记为

$$u_i = u_i^{(0)} \tag{3-7b}$$

其中,$u_i^{(0)}$ 为已知位移分量。

3.3 转动张量及其意义

3.3.1 相对位移张量的对称分解

任何一个2阶张量都可以分解成一个对称2阶张量和一个反对称2阶张量。相对位移张量 $u_{i,j}$ 是一个2阶张量，其对称分解为

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \tag{3-8}$$

其中，对称2阶张量为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

它为式(3-6)描述的应变张量；反对称2阶张量为

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \tag{3-9}$$

称其为**转动张量**。

3.3.2 转动张量的意义

式(3-9)描述的转动张量 ω_{ij} 反映物体的刚体转动情况。下面以 ω_{xy} 为例说明转动张量的物理意义。

考虑不变形，即只发生刚体位移的情况，此时应变分量应为零，即

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) = 0 \end{cases} \tag{a}$$

可以得到

$$\begin{cases} u_x = -\alpha y + u_0 \\ u_y = \alpha x + v_0 \end{cases} \tag{b}$$

和

$$\begin{cases} \omega_{xy} = -\alpha \\ \omega_{yx} = \alpha \end{cases} \tag{c}$$

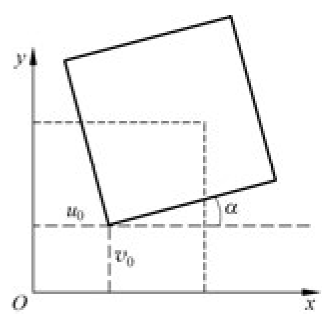

图 3-5

根据式(a)和式(b)可知，只发生刚体位移的情况，如图3-5所示矩形单元的两个棱边转过相同的角度 α，因此 ω_{yx} 描述该矩形单元绕 z 轴的刚性转角；而式(b)中的 u_0、v_0 则为 x、y 方向的刚体位移分量。

MATLAB 实践 3-3：刚体转动的位移场

【例 3-3】 推导零应变情况下，满足如下位移场函数：

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u_x}{\partial x}=0\\ \varepsilon_y=\dfrac{\partial u_y}{\partial x}=0\\ \varepsilon_{xy}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y}+\dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right)=0\end{cases}\tag{a}$$

【解】 编写 MATLAB 程序 ex03_03.mlx,内容如下：

```
clear
syms ux(y) uy(x)                          % 根据(a)中前 2 式
syms alpha
deq1 = diff(uy,x) == alpha;               % 根据(a)中第 3 式
deq2 = diff(ux,y) == -alpha;              % 根据(a)中第 3 式
syms u0 v0
uy(x) = dsolve(deq1,uy(0) == v0);
ux(y) = dsolve(deq2,ux(0) == u0);
% ---输出结果------------------
syms u_x u_y
disp('位移分量函数')
disp(u_x == ux)
disp(u_y == uy)
```

运行 ex03_03.mlx,得到

位移分量函数

$u_x=u_0-\alpha y$

$u_y=v_0+\alpha x$

3.4 应变的坐标变换及其不变量

3.4.1 应变的坐标变换

应变是 2 阶对称张量,因此其满足张量的坐标变换法则。设在直角坐标系 $Oxyz$ 内某点的应变张量或应变矩阵为

$$[\varepsilon_{ij}]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}&\varepsilon_{12}&\varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21}&\varepsilon_{22}&\varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}&\varepsilon_{32}&\varepsilon_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x&\varepsilon_{xy}&\varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx}&\varepsilon_y&\varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}&\varepsilon_{zy}&\varepsilon_z\end{bmatrix}$$

在另一直角坐标系 $Ox'y'z'$ 内该点的应变张量或应变矩阵为

$$[\varepsilon_{i'j'}]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{1'1'}&\varepsilon_{1'2'}&\varepsilon_{1'3'}\\ \varepsilon_{2'1'}&\varepsilon_{2'2'}&\varepsilon_{2'3'}\\ \varepsilon_{3'1'}&\varepsilon_{3'2'}&\varepsilon_{3'3'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{x'}&\varepsilon_{x'y'}&\varepsilon_{x'z'}\\ \varepsilon_{y'x'}&\varepsilon_{y'}&\varepsilon_{y'z'}\\ \varepsilon_{z'x'}&\varepsilon_{z'y'}&\varepsilon_{z'}\end{bmatrix}$$

与第 2 章介绍的应力分量坐标变换关系类似,应变分量的坐标变换关系可用指标记法表示为

$$\varepsilon_{i'j'}=\varepsilon_{ij}c_{i'i}c_{j'j} \tag{3-10a}$$

其中，$\varepsilon_{i'j'}$ 为新坐标系中的应变张量；ε_{ij} 为原坐标系中的应变张量；$c_{i'i}$ 为新、原坐标系坐标轴间的方向余弦。

应变的坐标变换关系式(3-10a)还可用矩阵表示为

$$[\varepsilon_{i'j'}]=[c_{i'i}][\varepsilon_{ij}][c_{j'j}]^{\mathrm{T}} \tag{3-10b}$$

其中，$[\varepsilon_{i'j'}]$ 为新坐标系下的应变矩阵；$[\varepsilon_{ij}]$ 为原坐标系下的应变矩阵；$[c_{i'i}]=\begin{bmatrix} c_{x'x} & c_{x'y} & c_{x'z} \\ c_{y'x} & c_{y'y} & c_{y'z} \\ c_{z'x} & c_{z'y} & c_{z'z} \end{bmatrix}$ 为坐标变换矩阵。

MATLAB 实践 3-4：应变的坐标变换

【例 3-4】 构件内某点在图 3-6 所示坐标系 Oxy 中的非零应变分量 $\varepsilon_x=a$，$\varepsilon_y=\dfrac{a}{2}$；$\alpha=30°$。求该点在坐标系 $Ox'y'$ 中的各应变分量。

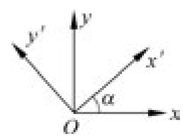

图 3-6

【解】 编写 MATLAB 程序 ex03_04.mlx，内容如下：

```
clear
syms a
S = [a, 0; 0, a/2];
xt = 30; %deg
C = [cosd(xt),cosd(90 - xt);...
    cosd(90 + xt),cosd(xt)];
S1 = C*S*C';
% --- 输出结果 ---
syms epsilon_x epsilon_y gamma_xy gamma_yx
S2 =[epsilon_x, gamma_xy; ...
     gamma_yx, epsilon_y];
disp('新坐标系内应变矩阵')
disp(S2 == S1)
```

运行 ex03_04.mlx，得到

新坐标系内应变矩阵

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x=\dfrac{7a}{8} & \gamma_{xy}=-\dfrac{\sqrt{3}\,a}{8} \\ \gamma_{yx}=-\dfrac{\sqrt{3}\,a}{8} & \varepsilon_y=\dfrac{5a}{8} \end{pmatrix}$$

3.4.2 应变张量的不变量

既然应变是 2 阶对称张量，那么一定存在这样的坐标系，在这个坐标系中所有切应变分量都等于零，即只存在正应变分量。这个坐标系的三个坐标轴方向称为**应变主方向**，沿应变主方向的正应变称为**主应变**。与应力状态的特征方程式相似，可以写出应变状态的特征方程：