# 第 5 章　损失调整与再保险

本章学习目标：

（1）了解再保险的功能和类型。

（2）描述简单形式的比例再保险和超额赔款再保险。

（3）计算保险人和再保险人在比例再保险和超额赔款再保险情况下，单个索赔和累积索赔金额的分布。

（4）理解在数据不完整情况下，估计原始索赔金额分布参数的方法。

## 5.1　再保险简介

在本节开始前，不妨设想这样一个场景：假如你是一家保险公司的精算师，公司承保了一艘船只从中国出海前往欧洲的航程。根据风险评估结果，你发现航程中的某一段航线可能面临较高的自然灾害风险。在这种情况下，你是否也会希望有另一份保险，能够为公司分散风险和提供保障？当保险人将原始保单中的部分保险责任转让给其他保险人时，便形成了最初的再保险。随着历史的发展，再保险的内涵与形式不断丰富完善，国际再保险市场日益成熟，已成为全球风险管理体系中的重要环节。我国自加入世界贸易组织以来，大量国际再保险公司陆续进入中国市场，它们带来了先进的风险管理理念和再保险技术。这不仅推动了我国再保险业务规模的快速扩张，也使中国从一个新兴市场逐步成长为国际再保险领域的重要参与者。

根据《再保险业务管理规定》的定义，再保险是指保险人将其承担的保险业务，部分转移给其他保险人的经营行为。为便于区分，将直接与投保人订立保险合同的保险人称为直接保险公司（简称直保公司）或原保险公司。直保公司为了维持经营的稳定性，同时保护自身不受大额索赔的影响，可以投保再保险，相应的保单称为再保险保单或再保险合同（见图 5.1）。因此，直保公司是风险的分出者，再保险公司是风险的接受者（分入者）。同直接保险类似，直保公司相当于购买了再保险公司提供的保险，故应向再保险公司支付再保险费；为了弥补直保公司的保单取得成本及再保险业务管理费用，再保险公司也会向直保公司返还再保险费的一部分，作为再保险佣金或再保险手续费。再保险仍然具有分散风险和补偿损失的基本特征，且在经营过程中也须满足最大诚信、可保利益等原则。

根据赔付基础的不同，再保险可以分为比例再保险和非比例再保险。其中，比例再保险又称保额再保险，是指以保险金额为基础，确定再保险分出人自留额和再保险接受人分保额的再保险方式；非比例再保险是指以赔款金额为基础，确定再保险分出人自负责任和再保险接受人分保责任的再保险方式。

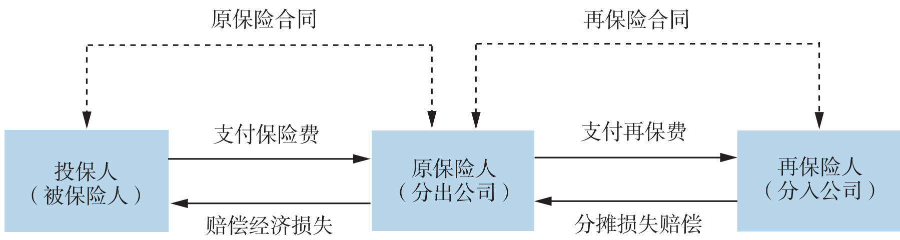


图 5.1 再保险涉及的主体与关系

1. 比例再保险

比例再保险的主要特征是再保分出人与接受人按照比例分配保险金额（保险责任）和保费，并按照同一比例分担赔款。此类再保险还可进一步细分为成数再保险（quota share reinsurance）、溢额再保险（surplus reinsurance）以及成数溢额混合再保险（combined QS/surplus treaty）三种形式。

（1）成数再保险。成数再保险又称比例分担再保险，是指原保险人将每一风险单位的保险金额，按照事先约定的固定比例分给再保险人的方式。在成数再保险中，不论每张保单的保险金额大小，只要在合同规定的限额内，都需要按比例进行分摊。例如，某风险单位的保险金额为 100 万元，费率为 0.1%，原保险人自留 40%，分出 60%；保险期间内风险单位的实际损失为 5 万元。根据约定的分保比例，可以对保费和赔款进行分配。计算可知原保险人对该风险单位收取的总保费为 1 000 元，保费自留 40%即 400 元，分出保费（即再保费）为 600 元；赔款金额按照相同比例分担，故原保险人承担赔款 2 万元，再保险人承担 3 万元。

成数再保险操作简单，在再保险实务和会计处理上较为方便。同时，由于按照固定比例分摊风险和保费，再保险双方的利益较为一致，盈利与亏损共同承担，在一定程度上有助于提高保险业务的质量。然而成数再保险也存在一些不足：一方面，固定比例缺乏灵活性；另一方面，如果成数再保险分出的保费相对较多，可能影响原保险人的收益。

（2）溢额再保险。溢额再保险是指原保险人将风险保额超过自留额的部分进行分保。通过溢额再保险安排，保险人将实际承担的风险控制在不超过自留额的水平，防止保险事故的不确定性对公司财务状况带来冲击。

在溢额再保险安排下，保险人确定一个最大的保险金额作为自留额（通常称为“一线”），分出额一般为自留额的整数倍（称为“几线”），保险人和再保险人按照自留额与分出额占总保额的百分比来分配保费、分摊赔款。例如，保险公司确定某风险单位的自留额为 50 万元，溢额分保的限额为 5 线，即 250 万元。若风险单位 A 的保险金额为 40 万元，原保险人自留全部责任；若风险单位 B 的保险金额为 100 万元，自留与分出责任的比例为 1:1，保费和赔付责任平均分摊；若风险单位 C 的保额为 350 万元，则自留 50 万元、溢额分保 250 万元，剩余 50 万元保额列入其他合同。

由本例可以看出，在溢额再保险中，原保险人确定的是自留额，而非自留比例。

这个特点使得分出公司能够根据业务质量灵活调整各个风险单位的自留水平，从而实现经济的再保险安排。此外，溢额再保险在处理大额保险业务时具有更大的弹性，能够更有效地分散风险。但在提升灵活性的同时，溢额再保险也存在一定的局限性。例如，由于需要对不同风险单位分别计算和管理分保事宜，其操作相对烦琐；此外，由于合同双方的利益不完全一致，分出公司可能存在逆选择，即选择将高风险业务更多地分给再保险公司，影响整体风险管理的均衡性。

（3）成数溢额混合再保险。成数溢额混合再保险是指在一个再保险合同中既有成数再保险，又有溢额再保险，并根据需要将二者有机组合在一起的再保险方式。成数溢额混合再保险包括先溢额后成数再保险，或先成数后溢额再保险，例如，以成数再保险的限额作为溢额再保险的自留额，再以自留额的一定线数作为溢额再保险的限额。

2. 非比例再保险

非比例再保险的特点是当原保险人的实际赔款超过约定标准时，由再保险人对超出部分进行补偿，故又称第二危险再保险。非比例再保险的形式主要包括超额赔款再保险和赔付率超赔再保险：前者以保险公司的赔付金额作为标准，再保险公司负责超过标准部分的一定金额；后者以保险公司的赔付率作为标准，当业务的实际赔付率超出约定比率时，超出部分由再保险公司负责，直至某一约定赔付率，故又称停止损失再保险（stop–loss reinsurance）。两种非比例再保险的标准不同，但原理和计算方法非常相似。本章将主要讨论比例再保险和超额赔款再保险（见图 5.2）。

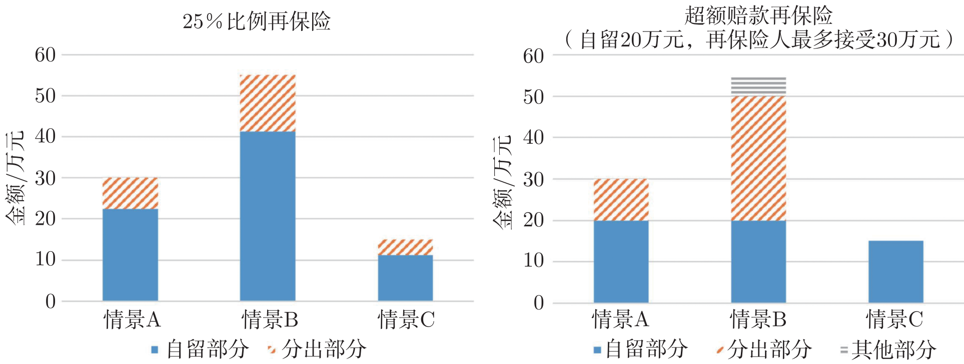


图 5.2　比例再保险和超额赔款再保险

# 5.2　再保险下的单次赔付金额

## 5.2.1　比例再保险

在比例再保险中，原保险人仅支付索赔金额的一定比例。记原始索赔金额为 $X$，原保险人承担的部分为 $Y$，则：

$$Y = \alpha X,\ 0 < \alpha < 1 \tag{5.1}$$

其中，参数 $\alpha$ 为自留比例。

已知原保险人对索赔 $X$ 实际支付的金额为 $Y=\alpha X$，其余全部分出，则再保险人赔付的金额为 $Z=(1-\alpha)X$。通过随机变量的简单变换，容易找到两个金额的分布。

### 5.2.2 超额赔款再保险

假定在超额赔款再保险中，原保险人全额支付最高不超过自留额 $M$ 的索赔，超过 $M$ 的部分由再保险人承担。则给定原始索赔 $X$，原保险人的赔付金额 $Y$ 满足如下关系。

$$Y=X\wedge M=\begin{cases} X, & X\leqslant M \\ M, & X>M \end{cases} \tag{5.2}$$

由此可得再保险人的赔付金额为 $Z=X-Y=\max(X-M,0)$。不难看出，原保险人支付金额的期望和方差均会降低，这是由于超额赔款再保险对索赔设定了上限。

首先计算原保险人和再保险人在超额赔款再保险下的期望赔付金额。假设 $X$ 为连续型随机变量，具有概率密度函数 $f(x)$。对于每次索赔，当自留额为 $M$ 时，原保险人的赔付金额 $Y$ 具有期望和矩母函数为

$$E(Y)=\int_0^M xf(x)\mathrm{d}x+MP(X>M)=E(X\wedge M) \tag{5.3}$$

$$M_Y(t)=E(\mathrm{e}^{tY})=\int_0^M \mathrm{e}^{tx}f(x)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{tM}P(X>M) \tag{5.4}$$

对于每次索赔，再保险人赔付金额的期望为

$$E(Z)=\int_M^\infty (x-M)f(x)\mathrm{d}x=E(X)-E(X\wedge M) \tag{5.5}$$

现在从再保险人的角度进行考虑。对于超额赔款再保险，当原始索赔 $X\leqslant M$ 时，赔款全部由原保险人支付，此时再保险人可能甚至不知道索赔已经发生。因此，再保险人仅能应用索赔超过 $M$ 的数据拟合损失分布，构成截断数据（truncated data）的统计推断问题。

截断数据是指研究者仅能观察到某个区间范围内的数据，超出该范围的数据会被丢弃，无法被观测。例如，原始索赔 $X$ 的理论取值范围为 $(0,+\infty)$，但由于能力限制，再保险公司仅能了解区间 $(M,+\infty)$ 内的观测值，区间 $(0,M]$ 部分的数据对再保险公司完全不可见，这是一个典型的左截断数据。

下面从数学上进行说明。根据定义，截断随机变量的分布可以表示为原始随机变量的条件分布。记 $W$ 为已知再保险触发条件下再保险人负责赔付的金额，则其可写为

$$W=(X-M)\mid(X>M) \tag{5.6}$$

此时研究的问题是：假设原始索赔金额有概率密度函数 $f(x)$ 和累积分布函数 $F(x)$，若再保险人仅能获知索赔金额超过自留额 $M$ 的记录（截断并平移），如何推导再保险人赔付金额 $W$ 的分布？

对此，再保险人可以应用条件概率公式，首先推导 $W$ 的分布函数：

$$\begin{aligned}P(W \leqslant w) &= P(X \leqslant w+M \mid X>M)\\ &= \frac{P(M<X\leqslant w+M)}{P(X>M)}\\ &= \frac{F(w+M)-F(M)}{1-F(M)},\ w>0\end{aligned} \tag{5.7}$$

将分布函数关于 $w$ 求导，即可得到再保险人赔付金额 $W$ 的概率密度函数：

$$g(w) = \frac{f(w+M)}{1-F(M)},\ w>0 \tag{5.8}$$

需要说明的是，超额赔款再保险的赔付机制与汽车保险或其他财产责任保险中的免赔额非常相似，两者都以损失金额是否超过特定限额为条件进行赔付。当存在免赔额为 $L$ 时，被保险人须自行承担不超过 $L$ 的损失，保险人仅赔付超过 $L$ 的部分；而在超额赔款再保险中，原保险人承担自留限额以内的损失，再保险人仅对超出部分进行赔付。此类保单又称超额保单，被保险人和保险人在超额保单中的损失情况与超额赔款再保险中的原保险人和再保险人完全相同。

### 5.2.3　特定分布下的再保险定价

1. 正态分布

假设原始索赔金额服从正态分布，即 $X\sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$。记 $\varPhi(x)$ 和 $\phi(x)$ 分别表示标准正态分布的分布函数和概率密度函数，则可以推导出正态随机变量的不完全一阶矩和不完全二阶矩分别为

$$\begin{aligned}\int_L^U xf_X(x)\mathrm{d}x &= \mu[\varPhi(U')-\varPhi(L')]-\sigma[\phi(U')-\phi(L')]\\ \int_L^U x^2f_X(x)\mathrm{d}x &= (\mu^2+\sigma^2)[\varPhi(U')-\varPhi(L')]-\sigma[(2\mu+\sigma U')\phi(U')-\\ &\quad (2\mu+\sigma L')\phi(L')]\end{aligned} \tag{5.9}$$

其中，$L'=(L-\mu)/\sigma$；$U'=(U-\mu)/\sigma$。

应用上述结果，可以进一步讨论再保险人实际赔付金额 $W$ 的期望和方差。根据式 (5.8)，可以推导出 $W$ 的一阶矩（期望）为

$$\begin{aligned}E(W) &= \int_0^{\infty} w g_W(w)\mathrm{d}w \\ &= \int_0^{\infty} w\frac{f_X(w+M)}{1-F_X(M)}\mathrm{d}w \\ &\xlongequal{x=w+M} \frac{1}{1-F_X(M)}\int_M^{\infty}(x-M)f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1-F_X(M)}\left[\int_M^{\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x - M\int_M^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x\right]\end{aligned} \tag{5.10}$$

中括号内的第一项为 $X$ 在区间 $(M,+\infty)$ 上的不完全一阶矩，第二项为生存函数。

类似地，$W$ 的二阶矩可表示为

$$\begin{aligned}E(W^2) &= \int_0^{\infty} w^2 g_W(w)\mathrm{d}w \\ &= \int_0^{\infty} w^2\frac{f_X(w+M)}{1-F_X(M)}\mathrm{d}w \\ &\xlongequal{x=w+M} \frac{1}{1-F_X(M)}\int_M^{\infty}(x-M)^2 f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1-F_X(M)}\left[\int_M^{\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x - 2M\int_M^{\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x + \right. \\ &\quad \left. M^2\int_M^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x\right]\end{aligned} \tag{5.11}$$

中括号内的第一项为 $X$ 在区间 $(M,+\infty)$ 上的不完全二阶矩。将正态分布的不完全一阶矩和不完全二阶矩公式代入，即可得到具体结果。

注意，此处讨论的是再保险人无限制接受超额赔款的情况。若再保险人对超额赔款设定了限额（即再保险人承担的责任上限），例如，当再保险人最多同意承担 $M$ 以上、限额为 $L$ 的损失时，则将不完全矩的积分上限 $+\infty$ 对应替换为 $M+L$ 即可。

例如，用 R 语言实现正态分布下的再保险定价的代码如下。

R 语言代码 5-1　正态分布下的再保险定价

```
## 正态分布的不完全1阶矩和不完全2阶矩
norm1 <- function(mu,sigma,L,U){
  L1 <- (L-mu)/sigma
  U1 <- (U-mu)/sigma
  mu*(pnorm(U1)-pnorm(L1)) - sigma*(dnorm(U1)-dnorm(L1))
}
norm2 <- function(mu,sigma,L,U){
  L1 <- (L-mu)/sigma
  U1 <- (U-mu)/sigma
```

```
  (mu^2+sigma^2)*(pnorm(U1)-pnorm(L1)) - sigma*((2*mu+sigma*U1)*dnorm(U1
      )-(2*mu+sigma*L1)*dnorm(L1))
}

## W的期望和方差
EW1 <- function(mu,sigma,M){
  (norm1(mu,sigma,L=M,U=Inf) - M*(1-pnorm(M,mu,sigma))) / (1-pnorm(M,mu,
      sigma))
}
EW2 <- function(mu,sigma,M){
  (norm2(mu,sigma,L=M,U=Inf) - 2*M*norm1(mu,sigma,L=M,U=Inf) + (M^2)*(1-
      pnorm(M,mu,sigma))) / (1-pnorm(M,mu,sigma))
}
DW <- function(mu,sigma,M){
  EW2(mu,sigma,M) - EW1(mu,sigma,M)^2
}
```

2. 对数正态分布

由于正态分布是一种对称、取值非负的分布，与保险损失的特征存在差异，因此一般可使用对数正态分布。假设 $X \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$，对数正态分布的一般性质已在第 1 章给出，可进一步推导，其不完全 $k$ 阶矩为

$$\int_L^U x^k f_X(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{k\mu+k^2\sigma^2/2}\left[\varPhi\left(U_k\right) - \varPhi\left(L_k\right)\right] \tag{5.12}$$

其中，$L_k = (\ln L - \mu)/\sigma - k\sigma$；$U_k = (\ln U - \mu)/\sigma - k\sigma$。容易计算 $W$ 的期望和方差。

例如，用 R 语言实现对数正态分布下的再保险定价的代码如下。

R 语言代码 5-2　对数正态分布下的再保险定价

```
## 对数正态分布的不完全k阶矩
lnorm.k <- function(mu,sigma,L,U,k){
  Lk <- (log(L)-mu)/sigma - k*sigma
  Uk <- (log(U)-mu)/sigma - k*sigma
  exp(k*mu+0.5*(k^2)*(sigma^2)) * (pnorm(Uk)-pnorm(Lk))
}

## W的期望和方差
EW1 <- function(mu,sigma,M){
  (lnorm.k(mu,sigma,L=M,U=Inf,k=1) - M*(1-plnorm(M,mu,sigma))) / (1-
      plnorm(M,mu,sigma))
}
EW2 <- function(mu,sigma,M){
```

```
  (lnorm.k(mu,sigma,L=M,U=Inf,k=2) - 2*M*lnorm.k(mu,sigma,L=M,U=Inf,k=1)
      + (M^2)*(1-plnorm(M,mu,sigma))) / (1-plnorm(M,mu,sigma))
}
DW <- function(mu,sigma,M){
  EW2(mu,sigma,M) - EW1(mu,sigma,M)^2
}
```

**例 5.1** 保险人正在考虑以下两个再保险协议。

协议 1：25%成数再保险。

协议 2：无限额超额赔款保险，超额点为 25 000 元。

假设原始索赔的分布是参数为 $\mu=8.5$ 和 $\sigma^2=0.64$ 的对数正态分布，请分别计算下面三种再保险方案下，保险人支付的净赔付金额的期望：

（1）不使用任何协议；

（2）仅使用协议 1；

（3）仅使用协议 2。

【解答】（1）如果没有再保险协议，保险人将全额赔偿每项索赔，期望计算如下。

$$E(X)=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}=\mathrm{e}^{8.5+\frac{1}{2}\times 0.64}=6\ 768$$

（2）在协议 1 下，保险人支付每项索赔的 75%，即净赔付金额 $Y_1=0.75X$，期望计算如下。

$$E(Y_1)=0.75E(X)=0.75\times 6\ 768=5\ 076$$

（3）在协议 2 下，保险人为每项索赔最多支付 25 000 元，即净赔付金额 $Y_2=X\wedge M$。根据对数正态分布的有限期望公式，计算如下。

$$\begin{aligned}
E(X\wedge M)&=\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\varPhi\left(\frac{\ln M-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)+M[1-F(M)]\\
&=\mathrm{e}^{8.5+\frac{1}{2}\times 0.64}\varPhi\left(\frac{\ln 25\ 000-8.5-0.64}{0.8}\right)+\\
&\quad 25\ 000\left[1-\varPhi\left(\frac{\ln 25\ 000-8.5}{0.8}\right)\right]\\
&=6\ 558
\end{aligned}$$

也可直接应用定义，将保险人净赔付金额的期望表示为

$$E(Y_2)=\int_0^M xf_X(x)\mathrm{d}x+M\int_M^{\infty}f_X(x)\mathrm{d}x$$

其中，第 1 项为对数正态分布在区间 $(0,M]$ 上的不完全一阶矩。代入计算公式，有：

$$E(Y_2)=\mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}\left[\varPhi\left(\frac{\ln M-\mu}{\sigma}-\sigma\right)-\varPhi(-\infty)\right]+M[1-F_X(M)]$$

结果与之前一致。

**例 5.2**　对于例 5.1，计算保险人支付的净赔付金额的方差。

【解答】（1）保险人净赔付金额的方差为

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1)=\mathrm{e}^{2\times 8.5+0.64}(\mathrm{e}^{0.64}-1)=6\ 408^2$$

（2）在协议 1 下，保险人净赔付金额的方差为 $\mathrm{Var}(Y_1)=0.75^2\mathrm{Var}(X)=4\ 806^2$。

（3）在协议 2 下，根据对数正态分布的二阶有限期望函数公式，可计算 $Y_2$ 的二阶矩和方差分别为

$$\begin{aligned}
E[(X\wedge M)^2]&=\exp(2\mu+2\sigma^2)\varPhi\left(\frac{\ln M-\mu-2\sigma^2}{\sigma}\right)+M^2[1-F(M)]\\
&=\mathrm{e}^{18.28}\varPhi\left(\frac{\ln 25\ 000-8.5-1.28}{0.8}\right)+\\
&\quad 25\ 000^2\left[1-\varPhi\left(\frac{\ln 25\ 000-8.5}{0.8}\right)\right]\\
&=71\ 130\ 942
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(Y_2)=E(Y_2^2)-E^2(Y_2)=71\ 130\ 942-6\ 558^2=5\ 303^2$$

将 $E(Y_2^2)$ 按定义表示，再应用对数正态分布的不完全二阶矩，也可得到同样结果。

**例 5.3**　对于例 5.1，考虑修改其中的超额赔款再保险协议，再保险公司仅接受 25 000~50 000 元部分的损失，超过 50 000 元部分的索赔责任仍归保险人。在新的协议下，保险人支付的净赔付金额的期望将如何变化？

【解答】在新的协议下，保险人的净赔付金额为

$$Y_2=\begin{cases}X, & X\leqslant M\\ M, & M<X\leqslant R\\ X-(R-M), & X>R\end{cases}$$

其中，超额点 $M=25\ 000$；上限 $R=50\ 000$。

按照定义，$Y_2$ 的期望可拆分如下。

$$\begin{aligned}
E(Y_2)&=\int_0^M xf_X(x)\mathrm{d}x+M\int_M^R f_X(x)\mathrm{d}x+\int_R^\infty (x-R+M)f_X(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^M xf(x)\mathrm{d}x+M\int_M^R f(x)\mathrm{d}x+\int_R^\infty xf(x)\mathrm{d}x-(R-M)\int_R^\infty f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

其中，第一项和第三项可应用对数正态分布的不完全一阶矩，第二项和第四项可应用分布函数和生存函数。

将数据代入对应公式，可解得结果为

$$E(X_2) = \mathrm{e}^{8.82}\varPhi(1.233) + 25\ 000[\varPhi(2.900) - \varPhi(2.033)] + \mathrm{e}^{8.82}[1 - \varPhi(2.100)] - 25\ 000[1 - \varPhi(2.900)] = 6\ 585$$

### 5.2.4 通货膨胀的影响

下面考虑通货膨胀对再保险的影响。对于超额赔款再保险，假设通货膨胀造成原始索赔金额 $X$ 变为 $k$ 倍，自留额 $M$ 保持不变，则原保险人的赔付金额 $Y$ 为

$$Y = (kX) \wedge M = \begin{cases} kX, & kX \leqslant M \\ M, & kX > M \end{cases} \tag{5.13}$$

此时，保险人赔付金额的期望为

$$E(Y) = \int_0^{M/k} kxf(x)\mathrm{d}x + MP(X > M/k) \tag{5.14}$$

由式 (5.14) 可知，原保险人的平均赔付金额并不是没有通货膨胀情况下支付的平均赔付金额的 $k$ 倍。若考虑通货膨胀的影响，逐年对自留额 $M$ 进行调整，也可以采用类似方法分析原保险人赔款情况的变化。

**例 5.4** 假设某保单组合的索赔金额服从帕累托分布 $\mathrm{Pa}(\alpha, \lambda)$。在第 0 年，已知分布参数 $\alpha = 6, \lambda = 1\ 000$。保险人签订了一个超额赔款再保险协议，自留额为 500。假设每年的通胀率为常数 10%。

（1）计算第 1 年和第 2 年的原始索赔金额的分布。

（2）计算保险人每年平均净赔付金额增长的百分比。

【解答】（1）记 $X_0$ 表示第 0 年的原始索赔金额，根据题意有 $X_0 \sim \mathrm{Pa}(6, 1\ 000)$。

在考虑通货膨胀的情况下，第 1 年的原始索赔金额 $X_1 = kX_0$，其中 $k = 1.1$。根据随机变量的变换规律，可计算 $X_1$ 的密度函数为

$$\begin{aligned} f_{X_1}(y) &= f_{X_0}\left(\frac{y}{k}\right)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right| \\ &= \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + y/k)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{k} \\ &= \frac{\alpha(k\lambda)^\alpha}{(k\lambda + y)^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

即 $X_1$ 服从帕累托分布 $\mathrm{Pa}(\alpha, k\lambda)$。类似可推出 $X_2 = k^2X_0 \sim \mathrm{Pa}(\alpha, k^2\lambda)$。

代入数据得，第 1 年的原始索赔金额分布为 $\mathrm{Pa}(6, 1\ 100)$，第 2 年的原始索赔金额分布为 $\mathrm{Pa}(6, 1\ 210)$。