第 1 章

向量及其相关运算

在空间几何图形中，基本的几何要素是点、线、面、体.而线可视为点的运动轨迹，面可视为线的运动轨迹，体可视为面的运动轨迹，故点是空间几何图形的最基本元素.研究几何问题的方法多种多样，用不同方法就会相应产生不同名称的几何学，用代数的方法来研究几何问题产生的几何统称解析几何.解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何，为了把代数的方法引入几何中，就必须把代数的运算引入几何中来，那如何引入呢？最根本的做法就是设法把空间的几何结构进行系统的代数化、数量化.为此，首先在空间中引入向量以及向量的运算，并通过向量来建立坐标系，这是解析几何的基础.利用向量，有些几何问题的解决就变得简捷了.当然，向量也是力学、物理学和工程技术等学科中解决问题的有力工具.

1.1　向量的概念

在力学、物理学以及日常生活中，经常遇到许多量，例如温度、质量、密度、时间、长度、面积和体积等，这些量在规定的单位下，都可以用一个数来完全确定，这种只有大小的量叫作数量.但像力、位移、速度与加速度等量，它们除有大小外，还有方向，这种量是向量，相对数量较为复杂.

1. 向量的相关概念

定义 1.1.1　既有大小又有方向的量叫作**向量**，也叫作**矢量**.

注：向量的表示

(1) 有向线段表示向量：有向线段 AB 的始点 A 和终点 B 叫作向量的**始点**和**终点**，记作 $\overrightarrow{AB}$，如图 1-1 所示，有向线段 AB 的方向表示向量的方向；有向线段 AB 的长度叫作向量的**大小**，也叫向量的**模**，记作 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$，如图 1-1 所示.

(2) 手写体表示向量：在小写字母上面加箭头表示，如 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{x}$ 等，向量 $\vec{a}$ 的模记作 $|\vec{a}|$.用小写字母表示向量时，字母一般写在有向线段的中部，如图 1-1 所示.

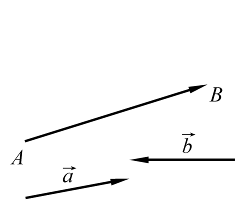

图 1-1　向量图示

(3) 印刷体表示向量：黑体字母表示，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}$ 等，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作 $|\boldsymbol{a}|$.

2. 两个特殊向量

零向量：模等于 0 的向量叫作**零向量**，记为 $\vec{0}$.零向量的起点与终点重合，零向量的方

向不定. 不是零向量的向量叫作**非零向量**.

单位向量：模等于1的向量叫作**单位向量**，常记为 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$，$\vec{e}$ 等；与向量 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量叫作与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量，常用 $\vec{a}^{\circ}$来表示.

3. 向量之间的关系

要在向量中赋予运算，必须给出向量相等的概念. 何为两个向量相等，请看下面的定义.

定义 1.1.2 若两个向量的大小相等且方向相同，则把它们叫作**相等向量**，若两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相等，则记作 $\vec{a}=\vec{b}$. 所有零向量都相等.

由定义 1.1.2 我们可以看到，两个向量是否相等与它们的始点无关，只由它们的大小和方向来决定，对这样的向量我们给出如下定义.

定义 1.1.3 只由大小和方向决定的向量叫作**自由向量**.

注：(1) 自由向量可以在空间中任意平移，且平移后的向量仍然代表原来的向量；

(2) 在自由向量的意义下，相等的向量都可看作是同一个自由向量；

(3) 由于自由向量的始点的任意性，按照需要我们可以选取某一点作为研究的一些向量的公共始点. 这种情况，我们通常说成，把那些向量归结到共同的始点；

(4) 借助自由向量，向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相等等价于说向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 经平移后能够重合.

所以从"形"的定义出发，判断两个向量是否相等，可以经过平移看它们是否重合，而且方向要相同. 当后面给出了向量"数" 的定义后，要判断两个向量是否相等就简单多了.

由于向量不仅有大小，而且还有方向，因此，模相等的两个向量不一定相等，因为它们的方向可能不同，如果刚好方向相反，有如下的概念.

定义 1.1.4 若两个向量大小相等且方向相反，则把它们叫作**互为反向量**，如向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 互为反向量，我们就可说向量 $\vec{a}$ 的反向量是 $\vec{b}$，向量 $\vec{b}$ 的反向量是 $\vec{a}$，向量 $\vec{a}$ 的反向量记作 $-\vec{a}$.

显然，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的反向量是向量 $\overrightarrow{BA}$，即 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

由于在几何中，可以把向量看成一个有向线段，将有向线段 AB 向两端延长得到一条直线 a，我们说直线 a 是向量 $\overrightarrow{AB}$ 所在的直线.

若两向量所在的直线平行，则把它们叫作**平行向量**，如向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 平行，记作 $\vec{a}/\!/\vec{b}$. 类似地，若向量 $\vec{a}$ 所在的直线平行于直线 b，则称向量 $\vec{a}$ 平行直线 b，记作 $\vec{a}/\!/b$；若向量 $\vec{a}$ 所在的直线与平面 π 平行，则称向量 $\vec{a}$ 平行平面 π，记作 $\vec{a}/\!/\pi$.

定义 1.1.5 平行于同一条直线的向量叫作**共线向量**.

共线向量具有如下性质：

(1) **反身性**：$\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 共线；

(2) **对称性**：如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，那么 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 共线；

(3) **传递性**：如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，$\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线，那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 共线.

由向量相等的定义可得，把不在一条直线上两个相等向量的始点与始点连接、终点与终点连接可获得一个平行四边形，如向量 $\overrightarrow{AB}$ 等于向量 $\overrightarrow{CD}$，连接始点 A 与 C、连接终点 B 与

D 得到的四边形 $ABDC$ 是平行四边形，如图 1-2(a)所示. 这是因为向量 $\overrightarrow{AB}$ 等于向量 $\overrightarrow{CD}$，所以向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 平行，而且向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 的模相等，故由平行四边形的定义知四边形 $ABDC$ 是平行四边形. 不在一条直线上两个互为反向量的始点与终点连接、终点与始点连接也可获得一个平行四边形，如图 1-2(b)所示.

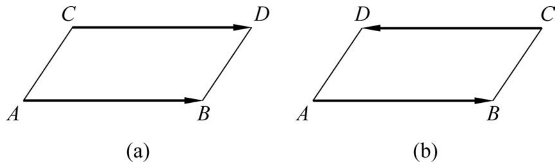

图 1-2 向量与平行四边形

定义 1.1.6 平行于同一个平面的向量叫作**共面向量**.

注：(1) 零向量与任何共线的向量共线；零向量与任何共面的向量共面.

(2) 共线向量必共面；任意两个向量必共面.

(3) 如果三向量中有两向量共线，那么三向量必共面.

例 1.1.1 设在平面上给定一个四边形 $ABCD$，点 E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点，求证：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$. 当 $ABCD$ 是空间四边形时，该结论是否成立？

解 如图 1-3 所示，连接 A，C，由于 E，F 分别是边 AB，BC 的中点，所以 EF 是三角形 ABC 的中位线，从而 EF 平行且等于 $\frac{1}{2}AC$；由于 G，H 分别是边 CD，DA 的中点，同理可得 HG 平行且等于 $\frac{1}{2}AC$，由图 1-3 可知，向量 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{HG}$ 的方向都与向量 $\overrightarrow{AC}$ 方向相同，所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HG}$，即 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.

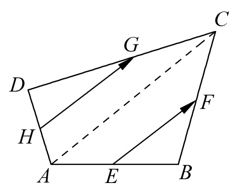

图 1-3 平面四边形

当 $ABCD$ 是空间四边形时，同样连接 AC，可以证明 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$. 故结论也仍然成立.

注：(1) 通过例 1.1.1 你有什么想法？

(2) 通过此例题你得到什么启示？

(3) 若点 E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，DA 的三等分点，结论是否也成立？

三角形是由三条线段首尾顺次连接构成，请读者

议一议 六根相同的火柴，最多可以摆出多少个三角形？

习题 1.1

1. 下列情形中，所有向量的终点各构成什么图形？

(1) 把空间中一切单位向量的始点归结为一点；

(2) 把平行于某一平面的一切单位向量的始点归结为一点；

(3) 把平行于某一直线的一切向量的始点归结为一点；

(4) 把平行于某一直线的一切单位向量的始点归结为一点.

2. 如图 1-4 所示，设 $ABCD$-$EFGH$ 是一个平行六面体，在下列各对向量中，找出相等的向量和互为反向量的向量：

（1）$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$；（2）$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{CG}$；（3）$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{EG}$；（4）$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{GF}$.

3. 如图 1-5 所示，设三角形 ABC 与三角形 $A'B'C'$ 分别是三棱台 ABC-$A'B'C'$ 的上、下底面，在向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{B'C'}$，$\overrightarrow{C'A'}$，$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{CC'}$ 中找出共线向量与共面向量.

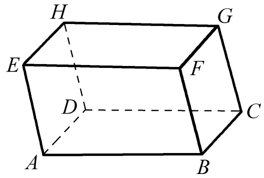

图 1-4 平行六面体

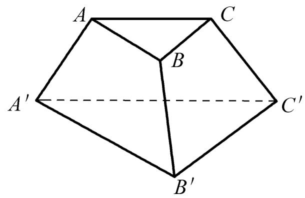

图 1-5 三棱台

1.2 向量的加减法

在物理中，两个力的合力，可以用“平行四边形法则”求出. 例如两个力 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 的合力，就是以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的**对角线向量**[①] $\overrightarrow{AC}$，如图 1-6 所示.

1. 向量的加法

在自由向量的意义下，两向量合成的平行四边形法则可归结为三角形法则，如图 1-6 所示，只要将向量 $\overrightarrow{AD}$ 平移到向量 $\overrightarrow{BC}$ 的位置即可.

定义 1.2.1 设有向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，任取空间中一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，再以点 B 为始点，作 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，连接 AC，如图 1-7 所示，则向量 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ 叫作向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**和向量**，简称**和**，记作：$\vec{a}+\vec{b}$，即 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

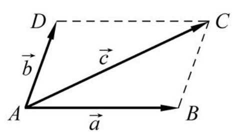

图 1-6 平行四边形法则图示

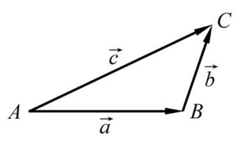

图 1-7 三角形法则图示

求两向量和向量的运算叫作**向量的加法**.

上述的这种求两向量和的方法叫作**三角形法则**. 根据定义 1.2.1 与图 1-7 可得，两向量共线时它们的和也必与这两个向量共线.

定理 1.2.1 如果以两个向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为邻边组成一个平行四边形 $OACB$，那么对角

① 对角线向量：将对角线加上方向所得的向量. 书中类似向量不再说明.

线向量 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

这种求两向量和的方法叫作**平行四边形法则**.

求两个力的合力时,所用的平行四边形法则与三角形法则是等价的.这两种法则是向量加法的常用**几何作图法**.

定理 1.2.2　向量的加法满足下面的运算规律:

(1) 交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

(2) 结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

(3) 零向量的作用　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

(4) 反向量的作用　$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

证明　(1) 当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线时,由图 1-8(a)可知

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\quad \vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC},$$

所以 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线时,读者自行证明.

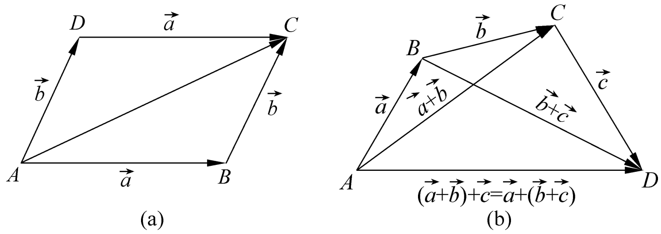

图 1-8　交换律、结合律图示

(2) 自空间任意点开始依次引 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$,$\overrightarrow{CD}=\vec{c}$,如图 1-8(b)所示,根据向量加法的定义有

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD};$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD},$$

所以$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

根据定义 1.2.1 可知(3)与(4)显然成立.

由于向量的加法运算满足交换律与结合律,可得三个向量相加,无论它们的先后顺序与结合顺序如何,它们的和向量总是相同的,因此可将

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

简单地写成

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

此种处理方法可以推广到任意有限个向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 的和,即可将它们的和记为

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n.$$

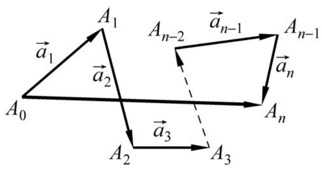

图 1-9　多边形法则图示

有限个向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 相加所得和向量的作图法，可由向量的三角形法则推广如下：自空间中任意点 A_0 开始，依次作出 $\overrightarrow{A_0A_1}=\vec{a}_1,\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}_2,\cdots,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a}_n$，则 $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n=\overrightarrow{A_0A_n}$，如图 1-9 所示. 这种求向量和的方法叫作**多边形法则**.

特别地，当第一个向量的起点 A_0 与最后一个向量的终点 A_n 重合时，则它们的和为零向量.

2. 向量的减法

定义 1.2.2　若向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{c}$ 的和等于向量 $\vec{a}$，即 $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$，则把向量 $\vec{c}$ 叫作向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**差向量**，简称**差**，并记作：$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. 求两向量差向量的运算叫作**向量的减法**.

由向量加法的三角形法则，可知

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

根据定义 1.2.2 得

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$$

由此可得向量减法的几何作图法：自空间任意点 A 作向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{CB}=\vec{a}-\vec{b}$，如图 1-10(a)所示. 如果以 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ 为邻边构成平行四边形 $ABCD$，那么显然它的一条对角线向量 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，而另一条对角线向量 $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$，如图 1-10(b)所示.

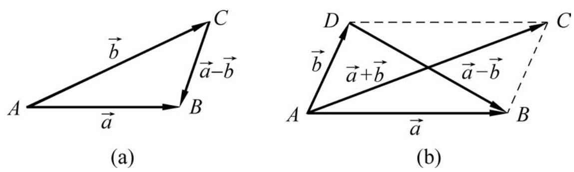

图 1-10　向量的减法图示

利用反向量，我们可以把向量的减法转换成为向量的加法.

因为如果 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$，即 $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$，在该向量等式两边同时加上向量 $\vec{b}$ 的反向量 $-\vec{b}$，利用 $\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{0}$，可得 $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$，因此

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

定义 1.2.3　两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的减法运算定义为

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).\tag{1.2-1}$$

由(1.2-1)式可以看出，求向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差向量可以转变成求向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的反向量 $-\vec{b}$ 的和向量.

由 $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$，可得 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$，从第一个向量等式得到第二个向量等式的过程，可以描述为：在向量等式中，将某一向量从等号的一边移到另一边，只需要改变它的符号. 这是向量等式的移项法则. 例如将向量等式 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$ 中的向量 $\vec{c}$ 移到右边，就得到 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}-\vec{c}$.

又因为向量 $-\vec{b}$ 的反向量是 $\vec{b}$，从而可得

$$\vec{a}-(-\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}.$$

对于任意两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，有如下**向量三角不等式**

$$|\vec{a}\pm\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|. \tag{1.2-2}$$

这个不等式可以推广到任意有限多个向量的情形：

$$|\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n|\leqslant|\vec{a}_1|+|\vec{a}_2|+\cdots+|\vec{a}_n|.$$

我们知道，三条线段构成一个三角形的条件是两边之和大于第三边，两边之差小于第三边.

下面给出构成三角形的另一判别法则：

例 1.2.1 设三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 两两互不共线，试证明顺次将它们的终点与始点相连而成一个三角形的充要条件是它们的和是零向量.

证明 （必要性）设三向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 可以构成三角形 ABC，即有 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{c}$，如图 1-11 所示，那么

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0},$$

即

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}.$$

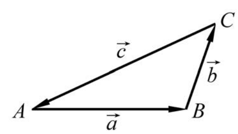

图 1-11 三个向量构成的三角形

（充分性）设 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，作 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，那么 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，所以 $\overrightarrow{AC}+\vec{c}=\vec{0}$，从而 $\vec{c}$ 是 $\overrightarrow{AC}$ 的反向量，因此 $\vec{c}=\overrightarrow{CA}$，所以三向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 可以构成一个三角形.

例 1.2.2 用**向量法**[①]证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证 如图 1-12 所示，设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O，且互相平分，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC}.$$

所以 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，

故四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

例 1.2.3 如图 1-13 所示，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，三个棱向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. 试用向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 分别表示对角线向量 $\overrightarrow{AC_1}$，$\overrightarrow{A_1C}$.

解 （1）$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$；

（2）$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

---

① 向量法：利用向量来分析和解决数学、物理、工程等领域问题的方法.

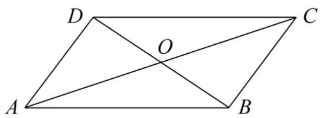

图 1-12　平行四边形的对角线互相平分

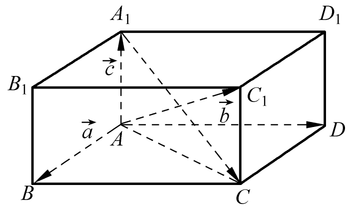

图 1-13　平行六面体

像例 1.2.3 中的向量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AA_1}$,$\overrightarrow{AC_1}$ 这样的 4 个向量,它们是位于同一个平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中的,像共线向量与共面向量一样,我们把能位于同一个平行六面体中的向量叫作**共体向量**.显然,两个向量与三个向量分别都是共体向量,由图 1-13 中可知,向量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AA_1}$,$\overrightarrow{AC_1}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BB_1}$,$\overrightarrow{BD_1}$ 都是共体向量,其实在图 1-13 中任意选取 4 个向量,它们都是共体向量.

由本节知道,两向量的和向量仍然是一个向量,请读者

议一议　一条长度为 1 的线段加另一条长度为 1 的线段得到什么图形?

习题 1.2

1. 要使下列各向量等式成立,向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 应满足什么条件?

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$;　　(2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$;　　(4) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

(5) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$.

2. 如图 1-13 所示,在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中证明:

$$2\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}.$$

1.3　数量与向量的乘法

在物理的学习中,知道数与向量之间会进行某些结合关系,比如我们熟悉的牛顿第二定律公式

$$\vec{f}=m\vec{a},$$

就是数量(质量)m 与向量(加速度)$\vec{a}$ 的一种结合,最后的结果力 $\vec{f}$ 是一个向量;再比如位移公式

$$\vec{s}=\vec{v}t$$

也是向量(速度)$\vec{v}$ 与数量(时间)t 的一种结合,最后结果位移 $\vec{s}$ 也是向量.

由向量的加法定义知,n 个向量相加的结果仍然是向量,特别是 n 个相同的非零向量 $\vec{a}$ 相加的情形,显然这时和向量的模是向量 $\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|$ 的 n 倍,且和向量的方向与向量 $\vec{a}$ 的方向相同,可记为 $n\vec{a}$,这也是数量与向量的一种结合.在数学上,抽象地给出如下定义.

定义 1.3.1 实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\vec{a}$. 它的模 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$，它的方向规定：(1)当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向；(2)当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向；(3)当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$. 我们把这种运算叫作**数量与向量的乘法**，简称**数乘**.

注：(1) 数乘的几何解释：①当 $|\lambda|>1$ 时，$\lambda\vec{a}$ 表示沿着向量 $\vec{a}$ 的方向($\lambda>1$)或反方向($\lambda<-1$)伸长到 $|\vec{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍；

② 当 $|\lambda|<1$ 时，$\lambda\vec{a}$ 表示沿着向量 $\vec{a}$ 的方向($0<\lambda<1$)或反方向($-1<\lambda<0$)缩短到 $|\vec{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍.

(2) 若 $\vec{a}$ 为非零向量，则 $\vec{a}^{\circ}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. (1.3-1)

这是因为 $\vec{a}^{\circ}$ 与 $\vec{a}$ 同向，且 $\left|\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right|=\dfrac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=1$，所以(1.3-1)式成立. 非零向量 $\vec{a}$ 模的倒数 $\dfrac{1}{|\vec{a}|}$ 与向量 $\vec{a}$ 的数乘叫作**非零向量的单位化**.

定理 1.3.1 数量与向量的乘法满足下面的运算规律：

(1) $1\vec{a}=\vec{a}$； (1.3-2)

(2) 数因子结合律 $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$； (1.3-3)

(3) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$； (1.3-4)

(4) 第二分配律 $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$. (1.3-5)

证 (1) 根据定义 1.3.1 可知(1.3-2)式显然成立.

(2) ①当 $\vec{a}=\vec{0}$ 或 λ,μ 中至少有一个为 0 时，(1.3-3)式显然成立.

② 当 $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\lambda\mu\neq0$ 时，由定义 1.3.1 可知

$|\lambda(\mu\vec{a})|=|\lambda||\mu\vec{a}|=|\lambda||\mu||\vec{a}|$，　$|(\lambda\mu)\vec{a}|=|\lambda\mu||\vec{a}|=|\lambda||\mu||\vec{a}|$，

从而 $|\lambda(\mu\vec{a})|=|(\lambda\mu)\vec{a}|$，即向量 $\lambda(\mu\vec{a})$ 与 $(\lambda\mu)\vec{a}$ 的模相等；下面判断它们的方向，当 $\lambda\mu>0$ 时，向量 $\lambda(\mu\vec{a})$ 与 $(\lambda\mu)\vec{a}$ 的方向都与向量 $\vec{a}$ 的方向同向，从而 $\lambda(\mu\vec{a})$ 与 $(\lambda\mu)\vec{a}$ 的方向相同；当 $\lambda\mu<0$ 时，向量 $\lambda(\mu\vec{a})$ 与 $(\lambda\mu)\vec{a}$ 的方向都与向量 $\vec{a}$ 的方向反向，从而 $\lambda(\mu\vec{a})$ 与 $(\lambda\mu)\vec{a}$ 的方向相同，因而向量 $\lambda(\mu\vec{a})$ 与 $(\lambda\mu)\vec{a}$ 的方向相同，故都有

$$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}.$$

(3) 如果 $\vec{a}=\vec{0}$ 或 λ,μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为 0 时，(1.3-4)式显然成立. 因而只需证明当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 或 $\lambda\mu\neq0$，$\lambda+\mu\neq0$ 的情形.

① 如果 $\lambda\mu>0$ 时，显然向量 $(\lambda+\mu)\vec{a}$ 与 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ 同向，且

$$\begin{aligned}|(\lambda+\mu)\vec{a}|&=|\lambda+\mu||\vec{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|+|\mu||\vec{a}|\\&=|\lambda\vec{a}|+|\mu\vec{a}|=|\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}|,\end{aligned}$$

所以 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

② 如果 $\lambda\mu<0$ 时，不失一般性，可设 $\lambda>0,\mu<0$，再区分 $\lambda+\mu>0$ 与 $\lambda+\mu<0$ 两种情形. 下面只证前一种情形，后一种情形可相仿证明. 即假定 $\lambda>0,\mu<0$，且 $\lambda+\mu>0$ 时，则有 $-\mu(\lambda+\mu)>0$，根据①的证明，有

$$(\lambda+\mu)\vec{a}+(-\mu\vec{a})=[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\vec{a}=\lambda\vec{a},$$

所以 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}-(-\mu\vec{a})=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

(4) 如果 $\lambda=0$ 或 $\vec{a},\vec{b}$ 中有一个是零向量，或 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互为反向量，(1.3-5)式显然成立. 因而只需证明当 $\lambda\neq 0,\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\vec{a}\neq-\vec{b}$ 的情形.

① 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向时，取 $m=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$；当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向时，取 $m=-\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$，显然都有 $\vec{a}=m\vec{b}$，因此由(1.3-3)式与(1.3-4)式有

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{a}+\vec{b})&=\lambda(m\vec{b}+\vec{b})=\lambda[(m+1)\vec{b}]=[\lambda(m+1)\vec{b}]\\&=(\lambda m+\lambda)\vec{b}=(\lambda m)\vec{b}+\lambda\vec{b}=\lambda(m\vec{b})+\lambda\vec{b}\\&=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.\end{aligned}$$

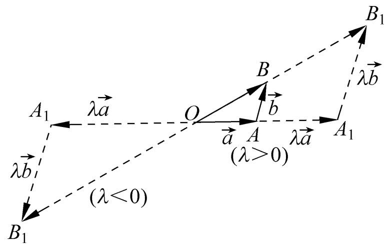

图 1-14　不共线向量与相似三角形

② 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，那么如图 1-14 所示，显然由 $\vec{a},\vec{b}$ 为两边构成的三角形 OAB 与由 $\lambda\vec{a},\lambda\vec{b}$ 为两边构成的三角形 OA_1B_1 是相似的，因此对应的第三边所成的向量满足

$$\lambda\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_1},$$

又由于 $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{OB_1}=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$，所以

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

例 1.3.1　设 AM 是三角形 ABC 的中线，求证：$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证明　如图 1-15 所示，则有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM},\quad \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM},$$

所以

$$2\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}).$$

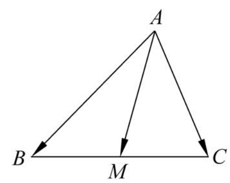

图 1-15　三角形的中线向量

因为 AM 是三角形 ABC 的中线，所以 $\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{CM}$，从而 $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$，所以 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

故 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

类似地，请读者

议一议　三角形角平分线向量和高线向量与两边向量的关系.

例 1.3.2　用向量法证明三角形中位线定理.

证明　三角形中位线定理，即三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半. 设三角形 ABC 两边 AB,AC 的中点分别为 M,N，如图 1-16 所示，则有

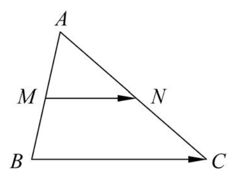

图 1-16　三角形的中位线

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$