第1章　牛顿力学基础

物理学是探究物质结构和运动基本规律的学科。物质的运动形式是多种多样的，其中最简单、最基本的运动是描述物体位置变化的机械运动，而机械运动往往被包含在其他更高级的运动形式之中，如热运动、电磁运动等。研究机械运动的是力学，它涉及地面上交通工具的行驶，宇宙的探测，大气、江河的流动，以及基本粒子相互作用的径迹分析等。17 世纪，牛顿在伽利略、开普勒等工作的基础上，综合了世世代代前人的研究成果，总结出三条运动定律（牛顿三定律）从而建立了完整的经典力学理论，成为近代物理学的开端与科学发展的基础。

1.1　牛顿力学的建立与发展

1.1.1　牛顿力学的建立与发展概述

牛顿（Isaac Newton，1643—1727）在给物理学家胡克（Robert Hook，1635—1703）的一封信中有一句名言："如果我看得更远，那是站在巨人的肩上。"牛顿力学的建立是一大批科学家辛勤劳动的产物，是社会发展的需求。如果说意大利科学家伽利略关于地面物体运动的理论和德国天文学家开普勒关于天体运动的理论为经典力学理论体系的建立铺平了道路，那完成这一重任的便是英国科学家牛顿，他把似乎截然不同的地面运动和天体运动的规律概括在了一个严密统一的理论中。牛顿出生在英国一个不富裕的农民家庭，是遗腹子，靠祖母抚养成人。17 岁进剑桥大学学数学，广泛阅读了各类书籍，涉及天文学、数学、力学、光学、化学、神学及炼金术等领域。牛顿的成就是多方面的，特别是 1687 年《自然哲学的数学原理》一书的出版，标志着力学作为一门严谨科学的诞生。

牛顿

（1643—1727）

亚里士多德（Aristotle，公元前 384—公元前 322）是古希腊古典文化的集大成者，是他首先进行科学分类的。他所命名的"物理学"泛指无生命物体的运动与时间、空间及与周围物体之间关系的一门独立自然学科，并首先使用数学方法考察具体物理规律。不过，亚里士多德的物理学理论基本上是错误的，因为它是根据人的感觉经验和逻辑理性建立起来的经验性的体系，后经神学改装，使人们一直束缚在以生活经验为基础的亚里士多德的传统观念中近 2000 年。所以，走出这加上神学色彩的传统观念，批驳亚里士多德的错误，是一个自然哲学的基础问题，是一场重要的思想革命，意大利科学家伽利略（Galileo Galilei，1564—1642）对此作出了非常重要的贡献。他的传世之作是 1632 年出版的《关于两大世界体系的对话》和 1638 年出版的《关于两门新科学的谈话和数学证明》，在科学实验的基础上融会贯

通了数学、物理学和天文学三门知识,以非凡的文学才能、生动的语言以及严密的科学推理方法证实和传播了日心说,陈述了他在力学方面研究的成果。伽利略认为世界是一个有秩序的服从简单规律的整体,要了解大自然就必须进行系统的实验上的定量观测,并且找出其中精确的数量关系。这种新的科学思想和科学研究方法的提出,开创了以实验事实为基础并具有严密逻辑体系的近代科学。爱因斯坦曾评论说:"伽利略的发现以及他所应用的科学推理方法,是人类思想史上最伟大的成就之一,而且标志着物理学的真正开端。"伽利略首先提出了惯性和加速度的概念,第一次把力和运动改变联系起来;在"作匀速直线运动的船舱中物体运动规律不变"的著名论述中第一次提出了惯性参考系的概念,提出了相对性原理的思想;对弹道的研究发现了运动独立性原理和运动的合成与分解。这些以及其他物理学概念和原理的创新为牛顿力学理论体系的建立奠定了基础。

伽利略
(1564—1642)

与此同时,德国天文学家开普勒(J. Kepler,1571—1630)的行星运动三定律揭开了行星运动之谜。大约公元150年,亚历山大城的托勒密(C. Ptolemaeus,约90—168)提出了完善的地心说,认为宇宙有"九重天",而地球位于宇宙中心岿然不动。他的理论能够相当准确地测算出太阳、月亮和行星的位置,在后来的1400年间一直是天文和航海家的有用工具。但是,利用这种宇宙模型计算和描述天体运动非常烦琐和复杂,并且和不断获得的观测数据有时相差较大而不得不对模型中的数学公式进行极麻烦的修正。尽管如此,由于以地球为参考系观测星球的运动与人们的直观经验相一致,且后来教会利用它来论证"人类中心",地心说在天文学上一直占统治地位,直到1543年波兰天文学家哥白尼(Copernicus,1473—1573)提出完善的太阳中心说。哥白尼高度赞扬发光的太阳,并且发现如以太阳为宇宙中心(除月球绕地球运转外,地球和行星都一边自转一边围绕太阳作匀速圆周运动的公转)的宇宙结构模型来描述和计算天体运动时,一切将变得清晰和简单。

开普勒
(1571—1630)

哥白尼的日心体系与地心体系之间的根本区别在于描述所观测运动时所选取的参考系不同。日心说的科学意义也就在于参考系的改变,它为理解行星的运动开辟了一条新的途径。这种变化富有启发意义,正是这种启发使开普勒等按全新的方式来考虑行星的真实轨道。开普勒富有想象力,善于抽象思维和理论分析,他发现哥白尼行星的匀速圆周运动与实际的天文观测资料还是有出入。于是他就从这些"出入"开始,经过多年的努力,分别于1609年和1619年发表了行星运动三定律。第一定律是"轨道定律":所有行星分别在大小不同的椭圆轨道上围绕太阳运动,太阳位于这些椭圆的一个焦点上。第二定律是"面积定律":行星和太阳之间所连直线在相等的时间内扫过的面积相等。第三定律是"周期定律":行星绕太阳一周所需的时间(公转周期)的平方,和它的轨道长半轴的立方成正比。行星运动三定律澄清了太阳系的空间位形,它们的发现向人们提出了新课题:是什么样的力维系这些天体遵从这样的轨道运动?经过许多科学家对此问题的探索,促成了经典力学大厦一根重要支柱——万有引力定律的建立。

一大批科学家的辛勤劳动给牛顿力学的建立“预备好了最适宜的环境”。正是在这种环境下，牛顿完成了人类对自然界认识的第一次大综合，在《自然哲学的数学原理》一书中总结和提炼了当时已发现的地面上所有的力学规律。他把由伽利略提出、笛卡儿(Reneé Descartes，1596—1650)完善的惯性定律作为第一定律；在定义了质量、力和动量后，提出了动量改变与外力的关系，把它作为第二定律；在多人关于碰撞现象研究结果的基础上，提出了作用力与反作用力的关系，作为第三定律。该书中还提到力的独立性原理、伽利略相对性原理、动量守恒定律以及对空间和时间的理解等。在该书中，牛顿在开普勒等的研究基础上，把地球上的三定律应用到了行星的运动，用微积分解释了开普勒的椭圆轨道，正确提出了地球表面物体所受的重力与地球月球之间的引力、太阳行星之间的引力具有相同的本质，得出了万有引力定律，从而宣告了天地间物体的机械运动都遵从同样的力学规律——牛顿运动三定律。

1750年，瑞士数学家、物理学家欧拉(Leonhard Euler，1707—1783)给出了《自然哲学的数学原理》中并未给出的第二定律的精确形式，也就是今天我们所使用的公式

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} \tag{1-1}$$

并且，由于欧洲数学家的努力，牛顿力学从直角坐标系扩展到极坐标、自然坐标等坐标系，由常微分方程发展为偏微分方程，由微分形式演变为变分形式，形成了现代的分析力学。

功、能概念的出现是牛顿力学的重要发展，而以势能的变化代替保守力做功是其中一个关键性的进展。“功”的概念是早期工业革命中工程师为比较蒸汽机效率而提出的，“能”是英国医生托马斯·杨(Thomas Young，1773—1829)于1807年提出的。直到19世纪中期，才逐步把$\frac{1}{2}mv^2$确认为动能，与物体相对位置有关的势函数称为势能，统称为机械能。

18世纪在力学发展中出现了和物体转动有关的“角动量”概念，19世纪人们把它看作是基本概念之一，从此对以前不认识的客观存在的角动量守恒规律有了认识。19世纪末对三体问题的研究以及20世纪70年代混沌现象的发现是牛顿力学的另一个发展，使得我们对牛顿力学有了更深刻的认识。

1.1.2　牛顿三定律的表述

1.1.2.1　牛顿第一定律

任何物体，只要没有外力改变它的状态，便会永远保持静止或匀速直线运动的状态。其数学形式可表示为：$\boldsymbol{F}=\mathbf{0}$时，$\boldsymbol{v}=$恒矢量。

1. 质点

定律中的“物体”指的是“质点”。质点是一个理想化模型，是只有质量而没有大小和形状的点。实际物体的形状、大小千差万别，在空间位置随时间变化(机械运动)过程中，其形状和大小也可能发生各种变化(形变)，质点就是忽略这些因素，考虑的只是物体的整体移动。比如跳水运动员，我们说他在空中的运动轨迹是一个抛物线，如图1-1所示，实际上已把他看作了一个质点。这个抛物线实际上是运动员身体质量中心(叫质心)的轨

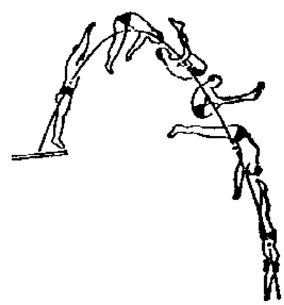

图1-1　跳水运动员的运动

迹。又如,在考虑地球绕太阳公转时,把地球看作一质点在椭圆轨道(地球质心的轨迹)上运行,而太阳(太阳的质心)作为另一质点位于此椭圆轨迹的一个焦点上。

我们说一个物体从空间一个位置移动到另一位置,指的是物体的整体移动。从数学上度量物体移动时,当然需要物体准确的空间位置(数学点),数学点上积聚了物体的全部质量,这个数学点应该就是物体的质心。也就是说,无论物体上任意点运动情况如何,无论物体的大小和运动范围,当只考虑物体整体运动时都可以把它看作质点,质心的位置就是质点的位置。一个质量均匀分布的球体,其质心应是它的球心;一个质量均匀分布的立方体,其质心应是它的体心;地面上不太大的运动物体的质心位置与其重心相同。

如果考虑的是物体转动(比如地球自转),那就不能把物体(地球)看作质点;如果考虑组成物体各部分的运动时,当然也不能把物体当作一个质点。如研究跳水运动员在跳水过程中其头部的运动时,跳水运动员整体不能当作质点,但其头部却可以看成质点。图 1-2 中,如果 A,B 之间有相对运动,而需要研究它们各自的运动状态时,就不能把 A 与 B 的组合体看作一个质点。如果 A,B 之间没有相对运动,它们的运动情况一样,那 A 与 B 的组合体就可以当作一个质点处理。

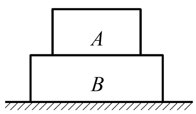

图 1-2 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 组合体

2. 惯性和惯性系

牛顿第一定律表明,任何物体都有保持静止或匀速直线运动状态的特性,这种特性叫惯性,故第一定律又称惯性定律。惯性反映了物体改变运动状态的难易程度。同时,第一定律也确定了力的含义,物体质点所受的力是外界对物体的一种作用,是试图改变物体静止或匀速直线运动状态的作用。

由于任何一个物体不可能不受到外力作用,所以第一定律不能直接用实验严格验证,但可间接验证。一个具有一定初速度的物体在粗糙水平面上只能滑动一定的路程,因为有摩擦阻力存在。如果在较光滑的水平面上,摩擦阻力较小,可滑动较长的距离。可以外推,如果物体在一理想的绝对光滑的水平面上,不受外来阻力的影响,它就会保持其初速度不变而匀速直线运动下去。这只不过是理想化外推而已。然而,如果物体受到两个或两个以上外力,当外来作用相互抵消时,实验上可观测到受力平衡物体和不受到外力作用一样,保持静止或匀速直线运动的状态,不过这是间接验证。

静止、匀速直线运动等运动状态的观测是离不开参考系的。如果在参考系 S 中,观测到一受力平衡物体保持着静止或匀速直线运动的状态,而在相对 S 作加速运动的参考系 S' 中,观测到受力平衡物体不再保持静止或匀速直线运动的状态,即第一定律在 S' 中不成立。我们把惯性定律在其中成立的参考系称为惯性参考系,简称惯性系,而把 S' 称为非惯性系。一个参考系是否是惯性系,只能根据观测和实验来判断。实验证明,以太阳为参考系观测到行星和宇宙飞行器的运动非常好地符合牛顿定律,所以太阳参考系是惯性系。可以证明,相对惯性系作匀速直线运动的参考系也是惯性系。地球相对太阳既有公转又有自转,所以地球不是惯性系。不过,地面上观测到的空间范围不大、时间间隔不长的力学现象,它们也相当好地符合牛顿定律,所以地面(或地球)参考系可看作近似程度相当好的惯性系,而相对地面静止或匀速直线运动的物体都可近似地当作惯性系。

1.1.2.2 牛顿第二定律

在第一定律的基础上,牛顿第二定律进一步阐明了质点在外力作用下其运动状态变化

的具体规律，即确定了力、质量、加速度的定量关系。

物体(质点)运动时总具有速度，速度是矢量，是表述物体运动状态的物理量。把质点的质量 m 与其速度 $\boldsymbol{v}$ 的乘积称为质点的动量，用 $\boldsymbol{p}$ 表示，有

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v} \tag{1-2}$$

它也是矢量，既具有大小，也具有方向(方向与速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向相同)，其合成服从平行四边形法则。牛顿第二定律阐明了作用于质点的合外力与其动量变化的关系，即

动量为 $\boldsymbol{p}$ 的质点，某时刻受到合外力 $\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{F}=\sum_i \boldsymbol{F}_i\right)$ 的作用，其动量随时间的变化率等于该时刻作用于质点的合外力。 数学表达式为

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}+m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1-3}$$

它是牛顿力学的基本方程。在经典力学中，质点的质量是不变的，即$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$，则

$$\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=m\boldsymbol{a} \tag{1-4}$$

依据矢量性质，上面矢量方程在直角坐标系中可写成分量式，为

$$\left.\begin{aligned}F_x&=\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}\\F_y&=\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}\\F_z&=\frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

或

$$\left.\begin{aligned}F_x&=ma_x\\F_y&=ma_y\\F_z&=ma_z\end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

1. 力和加速度

第二定律概括了力的独立性(叠加性)。如果几个力同时作用在一个物体上，$\sum \boldsymbol{F}_i=m\boldsymbol{a}$，实验表明，物体的加速度 $\boldsymbol{a}$ 等于每个力单独作用时所产生的加速度的矢量叠加，即 $\boldsymbol{a}=\sum \boldsymbol{a}_i$。这称为力的独立性原理或叠加原理，这也是运动叠加原理的实质。

对于质点，力 $\boldsymbol{F}$ 来自其他物体的作用。只要这种作用不为零，$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，物体就获得加速度，所以 $m\boldsymbol{a}$ 不是力而是物体本身的属性。

2. 惯性质量

设有同样的力 $\boldsymbol{F}$ 作用在两个质量分别是 m_1 和 m_2 的物体上，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 分别表示它们获得的加速度，根据(1-4)式有，$\boldsymbol{F}=m_1\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{F}=m_2\boldsymbol{a}_2$，可得

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{a_2}{a_1}$$

即在相同外力作用下，物体的加速度和质量成反比。质量大的物体产生的加速度小，表明质量大的物体抵抗运动变化的能力强，也就是它的惯性大。物体的质量反映了物体本身改变运动状态的难易程度，即(1-3)式和(1-4)式中的质量也是物体惯性的量度，因此把它们称

为惯性质量,或简称质量。

1.1.2.3 牛顿第三定律

牛顿第一、第二定律是牛顿在总结了伽利略等前人研究成果基础上而建立的。而史学家们普遍认为,第三定律是牛顿独立发现的。它深刻揭示了物体机械运动的普遍客观事实——作用与反作用。牛顿写道:"任何物体拉引或推压另一物体时,同样也要被另一物体所拉引或推压。"这里明确指出:物体间的作用是相互的,且相互作用是同性质的。牛顿第三定律表述如下:

当物体 $\boldsymbol{A}$ 以力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用于物体 $\boldsymbol{B}$ 时,物体 $\boldsymbol{B}$ 也同时以力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用于物体 $\boldsymbol{A}$ 上,作用力 $\boldsymbol{F}_1$ 和反作用力 $\boldsymbol{F}_2$ 总是大小相等,方向相反,且在同一直线上。

第三定律指出,力总是成对出现的,作用与反作用同时出现,同时消失,它们分别作用在相互作用的两个物体上,所以不存在相互抵消问题。并且指出,弹性力的反作用力必定是弹性力,万有引力的反作用力必定是万有引力,摩擦力的反作用力也必定是摩擦力。

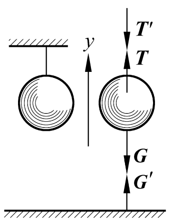

图 1-3 相互作用

如图 1-3 所示,一质量为 m 的金属球用细绳吊在天花板上。由于球静止,受力平衡,根据牛顿第二定律有

$$T-G=ma=0$$

细绳给球向上的拉力 $\boldsymbol{T}$ 和地球对球的作用力 $\boldsymbol{G}$ 都作用在球上,合作用抵消,金属球不获得加速度,保持静止。根据牛顿第三定律,细绳给球向上的拉力 $\boldsymbol{T}$(弹性力)的反作用力为 $\boldsymbol{T}'$,它和 $\boldsymbol{T}$ 大小相等,方向相反,在一条直线上,是作用于细绳上的金属球向下拉绳的弹性力。而地球对球的作用力 $\boldsymbol{G}$ 是向下的重力(万有引力),其反作用力 $\boldsymbol{G}'$ 是金属球作用在地球上的向上的力,也是万有引力。

1.2 加速度矢量的表示

1.2.1 直角坐标系中加速度的表示

1. 位置矢量

选定直角坐标系,就可以定量描述质点在空间的位置。设 t 时刻,质点处于空间 M 点,从坐标原点向质点的位置引一有向线段 $\overrightarrow{OM}$,记作 $\boldsymbol{r}$(图 1-4),$\boldsymbol{r}$ 的方向说明了 M 点相对于坐标轴的方位,$\boldsymbol{r}$ 的大小(它的模)表明了 M 点到原点的距离,即 $\boldsymbol{r}$ 完全确定了 t 时刻质点在空间的位置。用来确定质点位置的矢量 $\boldsymbol{r}$,叫作质点的位置矢量,简称位矢,也叫径矢,单位是 m。质点在运动时,位矢随时间变化,也就是说 $\boldsymbol{r}$ 是时间的函数,有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-7}$$

(1-7)式就是质点的运动函数。如取 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为 x,y,z 轴正方向的单位矢量,由矢量几何性质,t 时刻的位矢 $\boldsymbol{r}$ 可由它在直角坐标系中沿坐标轴的三个分量确定,写成

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

这表明,质点的实际运动是 x,y,z 轴方向各分运动的合成。

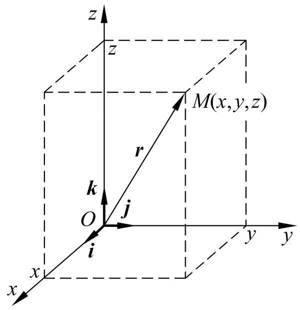

图 1-4　M 点的位置矢量

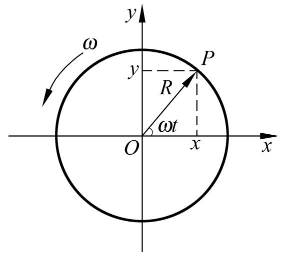

图 1-5　匀速圆周运动

例 1.1　一质点在 xOy 平面内作匀速率、半径为 R 的圆周运动，如图 1-5 所示。设 $t=0$ 时刻，质点处于 x 轴上，且其位置矢量单位时间转过的角度为 ω(角速度)。求质点的运动函数和轨道方程(轨迹)。

解　设 t 时刻质点运动到 P 点，此时位置矢量与 x 轴正向夹角为 ωt。所以，位置矢量 x，y 轴分量大小分别为

$$x=R\cos\omega t$$

$$y=R\sin\omega t$$

所以，t 时刻质点位置矢量即运动函数为

$$\boldsymbol{r}=R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

把分量式中 $x=R\cos\omega t$，$y=R\sin\omega t$ 两边分别平方后相加，消去时间参数 t，可得质点的轨道方程，有

$$x^2+y^2=R^2$$

2. 位移矢量

质点在某时间内的位置改变叫作它在此时间内的位移，其单位是 m。如果 t 时刻质点的位矢为 $\boldsymbol{r}(t)$，$t+\Delta t$ 时刻质点的位矢为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，$\Delta t$ 内质点的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t) \tag{1-9}$$

也就是 Δt 内质点位移的增量。

例 1.2　设一质点，t_1 时刻位于平面直角坐标系中 $A(1,3)$点，t_2 时刻位于 $B(3,1)$点，单位是 m。求 $\Delta t=t_2-t_1$ 时间内的位移。

解　图 1-6 表明了 $\Delta t=t_2-t_1$ 时间内的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$。

t_1 时刻位矢为

$$\boldsymbol{r}_1=(1\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

t_2 时刻位矢为

$$\boldsymbol{r}_2=(3\boldsymbol{i}+1\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

$\Delta t=t_2-t_1$ 时间内的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=[(3-1)\boldsymbol{i}+(1-3)\boldsymbol{j}]\ \mathrm{m}=(2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

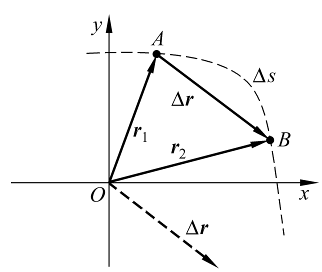

图 1-6　位移矢量 Δ**r**

位移的大小为

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=|2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}|=\sqrt{2^2+(-2)^2}\ \mathrm{m}=2\sqrt{2}\ \mathrm{m}$$

如果图中虚线表示质点的运动轨迹，那当质点由 A 运动到 B 时所经过的路程 Δs 明显

不等于位移的大小,即 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$。但是,当 Δt 趋于零时,也就是图中 $\boldsymbol{r}_2$ 无限靠近 $\boldsymbol{r}_1$ 时,$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 和 Δs 趋于相同,变成同阶无穷小,可以相互代替。此时,位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 写为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$(也称为质点的元位移),Δs 写成 $\mathrm{d}s$,即 $\Delta t\to 0$ 时有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$。

3. 速度矢量

Δt 时间内质点的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$,微分量 $\mathrm{d}t$ 时间内质点的位移微分量是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。定义位矢对时间的变化率为质点 t 时刻的速度,用 $\boldsymbol{v}$ 表示,有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-10}$$

它和位矢 $\boldsymbol{r}(t)$ 都是描述质点运动状态的物理量,其单位是 m/s。例如,一个质点的位矢 $\boldsymbol{r}=(2t\boldsymbol{i}+3t^2\boldsymbol{j})$ m,其速度为 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(2\boldsymbol{i}+6t\boldsymbol{j})$ m/s。

速度的大小叫速率,因为 $\Delta t\to 0$ 时,$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$,所以有

$$v=|\boldsymbol{v}|=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-11}$$

这就是说,速率又等于质点的路程函数对时间的变化率。

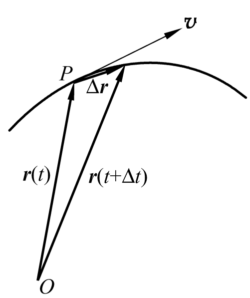

图 1-7　速度的方向

由(1-10)式可知,速度的方向就是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的方向,即 Δt 趋近于零时的 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向,如图 1-7 所示。当 Δt 趋于零时,图中 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 越来越靠近 $\boldsymbol{r}(t)$,$\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向也就越来越靠近轨道 P 点的切线。所以,质点速度在 P 点的方向就是质点轨道在该点指向前方的切线方向。由(1-8)式,(1-10)速度定义式可写为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{v}_x+\boldsymbol{v}_y+\boldsymbol{v}_z \tag{1-12}$$

这表明:质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 是 3 个坐标轴方向分速度的矢量和。其中

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ v_z=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{1-13}$$

所以,速度的大小又可写成

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1-14}$$

例 1.3　设位矢 $\boldsymbol{r}=(2t\boldsymbol{i}+3t^2\boldsymbol{j})$ m。求质点在 $t=0$ 时刻(初始时刻)和 $t=1$ s 时刻的速度和在这 1 s 时间内的平均速度。

解　由于 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{i}+6t\boldsymbol{j}$,所以质点在 $t=0$ 时刻和 $t=1$ s 时刻的速度分别为

$$\boldsymbol{v}(0)=2\boldsymbol{i}\ \text{m/s}$$

$$\boldsymbol{v}(1)=(2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j})\ \text{m/s}$$

按照速度的含义,时间 Δt 之内的平均速度应是 Δt 之内的位移与时间 Δt 之比,即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-15}$$

$t=0$ 时刻的位矢 $\boldsymbol{r}(0)=0$，即质点位于原点，$t=1$ s 时刻的位矢 $\boldsymbol{r}(1)=(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})$ m。所以，从 $t=0$ 到 $t=1$ s 时间内的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}}{1-0}=(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$$

4. 加速度矢量

牛顿第二定律已给出加速度的定义，为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-16}$$

表示质点速度的变化率。如果速度的数值随时间发生变化，或者方向发生变化，或者二者同时都发生变化，都表明速度在变化，质点运动状态在改变，物体一定获得了加速度。加速度为零，说明质点速度是常矢量(大小、方向恒定)；而速度为零的时刻，质点可能具有加速度。加速度的单位为 $\mathrm{m/s^2}$，由 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，可以看出力的单位为 $\mathrm{kg\cdot m/s^2}$，即为 N，$1\ \mathrm{N}=1\ \mathrm{kg\cdot m/s^2}$。

由(1-12)速度分量式，加速度可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_y}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_z}{\mathrm{d}t}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right)=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

这表明：质点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 是 3 个坐标轴方向分量的矢量和，其中

$$\begin{cases}a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\[2ex]a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\\[2ex]a_z=\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\end{cases} \tag{1-17}$$

加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1-18}$$

例 1.4　求例 1.1 中质点任意时刻的速度和加速度。

解　例 1.1 中已求出质点的位矢，设其单位为 m，有

$$\boldsymbol{r}=(R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

匀速率圆周运动中角速度 ω 是常量(角速度的概念请参考 1.2.2 节)，由(1-10)式和(1-16)式，质点任意时刻的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-R\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+R\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}=R\omega(-\sin\omega t\boldsymbol{i}+\cos\omega t\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=R\omega^2(-\cos\omega t\boldsymbol{i}-\sin\omega t\boldsymbol{j})=-\omega^2(R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j})=-\omega^2\boldsymbol{r}\ \mathrm{m/s^2}$$

注意 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a}=-\omega^2\boldsymbol{r}$，负号表明质点加速度的方向总和位矢的方向相反，即匀速率圆周运动的加速度方向始终沿半径指向圆心，所以常把它称为向心加速度。匀速率圆周运动中位矢、速度、加速度的方向总是变化，但它们的大小不变，有

$$r=|\boldsymbol{r}|=R\sqrt{\cos^2\omega t+\sin^2\omega t}=R$$

$$v=|\boldsymbol{v}|=R\omega\sqrt{\cos^2\omega t+\sin^2\omega t}=R\omega \tag{1-19}$$

$$a=|\boldsymbol{a}|=|-\omega^2\boldsymbol{r}|=R\omega^2 \tag{1-20}$$

(1-19)式和(1-20)式是匀速率圆周运动中以角速度 ω 对速度、向心加速度的表示式。角速度 ω 的单位是 $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ 或 $\mathrm{s^{-1}}$。

例 1.5 静止在坐标原点的质点,如果获得一加速度 $\boldsymbol{a}=(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s^2}$,求此质点获得加速度后的运动状态。

解 求运动状态,就是表示出质点的位矢和速度。由于加速度无 z 轴分量,静止在坐标原点的质点运动一定是 xOy 平面的平面运动。由题意,获得加速度的时刻作为初始时刻,有 $\boldsymbol{r}(0)=0$,即 $x(0)=0$,$y(0)=0$;静止意味着 $\boldsymbol{v}(0)=0$,即 $v_x(0)=0$,$v_y(0)=0$。这些都是初始条件。按 $\boldsymbol{a}=(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s^2}$,有

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=2\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=3\ \mathrm{m/s^2}$$

有 $\mathrm{d}v_x=a_x\mathrm{d}t$,$\mathrm{d}v_y=a_y\mathrm{d}t$,对它们两边积分,有

$$v_x=\int_0^t a_x\mathrm{d}t=\int_0^t 2\mathrm{d}t=2t\ \mathrm{m/s}$$

$$v_y=\int_0^t a_y\mathrm{d}t=\int_0^t 3\mathrm{d}t=3t\ \mathrm{m/s}$$

因为 $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,$v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,所以

$$\mathrm{d}x=v_x\mathrm{d}t=2t\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}y=v_y\mathrm{d}t=3t\mathrm{d}t$$

对它们两边积分,得

$$x=\int_0^t v_x\mathrm{d}t=\int_0^t 2t\mathrm{d}t=t^2\ \mathrm{m}$$

$$y=\int_0^t v_y\mathrm{d}t=\int_0^t 3t\mathrm{d}t=3t^2/2\ \mathrm{m}$$

分别得到位矢和速度的分量式。两个位矢分量式中消去 t,质点的轨迹

$$y=\frac{3}{2}x$$

是一直线。静止质点获得加速度后的运动是匀加速直线运动。位矢和速度的矢量表达式分别为

$$\boldsymbol{v}=(2t\boldsymbol{i}+3t\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$$

$$\boldsymbol{r}=\left(t^2\boldsymbol{i}+\frac{3t^2}{2}\boldsymbol{j}\right)\ \mathrm{m}$$

由此看出,如果已知质点的加速度 $\boldsymbol{a}$、初始速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和初始位矢 $\boldsymbol{r}_0$,因 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$,积分可得质点的速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\int_{t_0}^t\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$,再积分得到质点的位矢 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int_{t_0}^t\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$。

1.2.2 圆周运动中的切向加速度和法向加速度

加速度是速度的变化率,速度是矢量,既有大小又有方向,加速度就是表示速度大小和