第8章

空间解析几何与向量代数

8.1 内容提要

8.1.1 向量的概念及线性运算

1. 向量及其表示

(1) 向量：既有大小又有方向的量称为**向量**，记为 $\boldsymbol{a}$. 向量的大小称为**向量的模**，记作 $\|\boldsymbol{a}\|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$.

(2) 向量的表示：向量在几何上可用有向线段来表示，以点 M 为起点，点 N 为终点的有向线段是一个向量，记为 $\overrightarrow{MN}$. 数学上只研究与起点无关的自由向量.

(3) 向量的坐标与模：在空间直角坐标系下，设点 M 的坐标为(a_1, b_1, c_1)，点 N 的坐标为(a_2, b_2, c_2)，则向量 $\overrightarrow{MN}$ 的坐标为$(a_2-a_1, b_2-b_1, c_2-c_1)$，该向量的模为

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}.$$

(4) 方向余弦：向量 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}.$$

方向余弦满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

2. 向量的运算

(1) 加法与减法. 向量的加减法满足平行四边形法则，如图 8.1 所示：

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}.$$

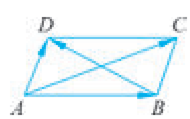

图 8.1

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$.

(2) 向量的数乘. 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\lambda$ 为实数，则 $\lambda\boldsymbol{a}=$

$(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

(3) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$，式中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

(4) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}_c$，其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，$\boldsymbol{e}_c$ 为同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{e}_c$ 成右手系；$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right).$$

*(5) 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的混合积为 $[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$. 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x, c_y, c_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为边的平行六面体的体积.

3. 向量间的关系

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x, c_y, c_z)$ 均为非零向量.

(1) 向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件为 $a_x=b_x$，$a_y=b_y$，$a_z=b_z$.

(2) $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，式中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，其中 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

(3) 投影表示式为：当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$；当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

(4) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

(5) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

(6) 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件为

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0.$$

8.1.2 曲面及其方程

曲面的一般方程为

$$F(x, y, z)=0 \text{ 或 } z=f(x, y) \text{ 等.}$$

(1) 球面：一般方程为 $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$，标准方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,$$

其中 (x_0, y_0, z_0) 为球心；R 为半径.

(2) 旋转曲面：$\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面为 $F(y,\pm\sqrt{z^2+x^2})=0$，绕 z 轴旋转一周所得曲面为 $F(\pm\sqrt{y^2+x^2},z)=0$；类似可得其他坐标平面上的曲线绕同一坐标平面内的坐标轴旋转一周所得曲面的方程.

(3) 柱面：方程 $F(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 的柱面；方程 $F(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴，准线为 $\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$ 的柱面；方程 $F(z,x)=0$ 表示母线平行于 y 轴，准线为 $\begin{cases} F(z,x)=0, \\ y=0 \end{cases}$ 的柱面.

(4) 常见二次曲面的标准方程

椭圆锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$；

椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$；

双叶抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$.

这里 a,b,c 均为大于零的常数.

8.1.3　空间曲线及其方程

(1) 两张曲面的交线为曲线. 其一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

(2) 参数式方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$$

这里 t 为参数.

(3) 空间曲线在坐标平面上的投影

设 $L:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，消去 z，得 $H(x,y)=0$，则曲线 $\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 为曲线 L 在 xOy 面上的投影. 在其余坐标面上的投影方法类似.

8.1.4　平面及其方程

平面与三元一次方程一一对应.

1. 平面的点法式方程

过点(x_0,y_0,z_0)，以非零向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为法向量的平面方程为 $A(x-x_0)+$

$B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

2. 平面的一般式方程

在点法式方程中,令 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$,得到形如 $Ax+By+Cz+D=0$ 的方程.

3. 平面的截距式方程

平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距分别为 a,b,c,当 $abc\neq0$ 时,平面的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

4. 平面的三点式方程

设 $P_i(x_i, y_i, z_i)(i=1, 2, 3)$为平面上不共线的三点,则有平面方程

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

5. 两个平面之间的关系

设平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$为平面的法向量;平面 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,其中 $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$为平面的法向量.

(1) 平行:$\pi_1/\!/\pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2(\lambda\neq0) \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$;

(2) 垂直:$\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;

(3) 相交:$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$不成立;

(4) 重合:$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

6. 两平面的夹角

设平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$为平面的法向量;平面 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,其中 $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$为平面的法向量. θ 为两平面的夹角,则

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

7. 点到平面的距离公式

点 $P(x_0, y_0, z_0)$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

8. 两个平行平面之间的距离公式

设平面 $\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$，平面 $\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$，其中 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$为这两个平面的法向量. 则两个平面之间的距离为

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

8.1.5　直线及其表示

(1) 直线的一般式方程：两张平面交于一条直线，得直线方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}.$$

(2) 直线的点向式方程(对称式方程)：过点 $P(x_0, y_0, z_0)$，方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m, n, p)$的直线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

(3) 直线的参数式方程：点向式方程中，令$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$，得

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt,\\z=z_0+pt,\end{cases}$$

其中 t 为参数.

(4) 两条直线之间的关系

设直线 $L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，其中 $\boldsymbol{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$为直线的方向向量；直线 $L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，其中 $\boldsymbol{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$为直线的方向向量.

① 平行：$L_1/\!/L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1/\!/\boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1=\lambda\boldsymbol{s}_2(\lambda\neq 0) \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

② 垂直：$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

③ 两直线的夹角：记 θ 为两直线的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

(5) 点到直线的距离：直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，P 为 L 上一点，则点 Q 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

*(6) 两条异面直线间的距离：P_1 为直线 L_1 上一点，P_2 为直线 L_2 上一点，L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$，则直线 L_1 和 L_2 的公垂线长

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}.$$

(7) 直线与平面的关系

设平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$，其中 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面的法向量，直线 L：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，其中 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为直线的方向向量.

① 平行：$\pi /\!/ L \Leftrightarrow \boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s} \Leftrightarrow \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0 \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$；

② 垂直：$\pi\perp L \Leftrightarrow \boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{s} \Leftrightarrow \boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{s}(\lambda\neq0) \Leftrightarrow \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$；

③ 直线在平面上：$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$，且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

(8) 过直线 L：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的平面束方程是

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中 λ 为参数.

注 第二个式子中不包含平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

8.2 典型例题分析

8.2.1 题型一 向量代数的相关问题

例 8.1 若 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$，式中 $|\boldsymbol{m}|=2$，$|\boldsymbol{n}|=1$，$(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=\frac{\pi}{2}$，化简表达式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+1$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+1$

$=(4\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\cdot(2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n})+3(4\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})-2(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})\cdot(2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n})+1$

$=16|\boldsymbol{m}|^2+9|\boldsymbol{n}|^2+1=16\times4+9\times1+1=74.$

例 8.2 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，λ 为非零常数，若向量 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{b}$，则 λ 等于(　　).

(A) $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}$；　(B) $-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}$；　(C) 1；　(D) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解 如果 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{b}$，因此应有$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，整理得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda|\boldsymbol{b}|^2=0,$$

由于 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，因而应有 $\lambda=-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}$，故应选(B).

例 8.3　设 $\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，问 k 为何值时，以 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 为邻边的平行四边形面积为 6.

例 8.3 视频讲解

解　由于

$$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(2-k)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

平行四边形面积为 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ 的模. 所以

$$6=|\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}|=|2-k|\cdot|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|2-k|\cdot 2,$$

即有 $k-2=\pm 3$，所以

$$k_1=5,\quad k_2=-1.$$

8.2.2　题型二　空间曲线与曲面的相关问题

例 8.4　求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $y+z=1$ 的交线在 xOy 平面上的投影方程.

解　从曲线方程 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ y+z=1\end{cases}$ 中消去 z，得曲线向 xOy 平面的投影柱面方程 $x^2+y^2+y=1$. 于是曲线在 xOy 平面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases}x^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4},\\ z=0.\end{cases}$$

例 8.5　求由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成的立体在 xOy 面上的投影.

解　由方程 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 消去 z 得到 $x^2+y^2=1$. 这是一个母线平行于 z 轴的圆柱面，这恰好是半球面与锥面的交线 C 关于 xOy 面的投影柱面,因此交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=0.\end{cases}$$

这是 xOy 面上的一个圆,于是所求立体在 xOy 面上的投影,就是该圆在 xOy 面上所围的部分 $x^2+y^2\leqslant 1$.

例 8.6　求直线 $L:\begin{cases}x=1-2t,\\ y=3+t,\\ z=2-3t\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影.

解　在三个坐标面上的投影分别为

（1）在 xOy 平面上：$\begin{cases}x=1-2t,\\ y=3+t,\\ z=0;\end{cases}$

（2）在 xOz 平面上：$\begin{cases}x=1-2t,\\ y=0,\\ z=2-3t;\end{cases}$

(3) 在 yOz 平面上：$\begin{cases} x=0, \\ y=3+t, \\ z=2-3t. \end{cases}$

8.2.3 题型三 平面方程的求解

例 8.7 求通过三平面 $2x+y-z-2=0$，$x-3y+z+1=0$ 和 $x+y+z-3=0$ 的交点，且平行于平面 $x+y+2z=0$ 的平面方程.

解 所求平面平行于 $x+y+2z=0$，所以该平面的法向量为(1，1，2). 三平面的交点为

$$\begin{cases} 2x+y-z-2=0, \\ x-3y+z+1=0, \\ x+y+z-3=0, \end{cases}$$

解得 $x=1$，$y=1$，$z=1$. 所以所求平面为

$$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0,$$

即 $x+y+2z-4=0$.

例 8.8 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$，$M_2(0,1,-1)$且垂直于平面 $x+y+z-4=0$，求它的方程.

解 由已知条件知，向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,-2)$与平面 $x+y+z-4=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$的向量积 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{n}$ 即为所求平面的法向量

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(2,-1,-1),$$

由点法式方程可知 $2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$ 为所求平面.

例 8.9 求平面 $x-y+2z-6=0$ 与平面 $2x+y+z-5=0$ 的夹角，并判别坐标原点到哪个平面距离更近.

解 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{n}_2=(2,1,1)$为两平面 π_1 与 π_2 的法向量，则 π_1 与 π_2 夹角余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|1\times2+(-1)\times1+2\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

故两平面夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$，原点到 π_1 与 π_2 距离分别为

$$d_1=\frac{|0-0+2\times0-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\sqrt{6},\quad d_2=\frac{|2\times0+0+0-5|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{6}},\quad d_1>d_2,$$

故平面 $2x+y+z-5=0$ 与原点距离更近.

8.2.4 题型四 直线方程的求解

例 8.10 求过点 $P(2,1,3)$且与直线 L：$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

解法 1 作平面 π 经过 P 点，且与直线 L 垂直，平面 π 的方程为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0,$$

即 $3x+2y-z-5=0$. 再求平面 π 与 L 的交点，将直线化成参数式

$$\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=1+2t, \\ z=-t, \end{cases}$$

代入平面 π 的方程中得到

$$3(-1+3t-2)+2(1+2t-1)-(-t-3)=0,$$

解得 $t=\dfrac{3}{7}$，从而得到交点 $Q\left(\dfrac{2}{7},\ \dfrac{13}{7},\ -\dfrac{3}{7}\right)$，所以过点 P 和 Q 的直线的对称式方程为：$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$.

解法 2 先将直线化成一般式：$\begin{cases} 2x-3y+5=0, \\ x+3z+1=0, \end{cases}$ 所以过该直线的平面束方程为

$$(2x-3y+5)+\lambda(x+3z+1)=0,$$

即

$$(2+\lambda)x-3y+3\lambda z+5+\lambda=0,$$

再将点 $P(2,1,3)$代入上述方程，解得 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$，则经过 P 点与 L 的平面方程为

$$x-2y-z+3=0,$$

而过 P 垂直于直线 L 的平面方程为

$$3x+2y-z-5=0,$$

那么所求直线就是所得两平面的交线

$$\begin{cases} x-2y-z+3=0, \\ 3x+2y-z-5=0. \end{cases}$$

例 8.11 求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程.

解法 1 先求出直线与平面的交点. 将直线 L 化为参数式：

$$\begin{cases} x=1+t, \\ y=t, \\ z=1-t, \end{cases}$$

代入平面方程 $x-y+2z-1=0$ 中，得

$$(1+t)-t+2(1-t)-1=0,$$

解得 $t=1$. 从而交点为 $Q(2,1,0)$；再过直线 L 上点 $P(1,0,1)$作平面的垂线

$$L':\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2},$$

即$\begin{cases} x=1+t, \\ y=-t, \\ z=1+2t, \end{cases}$ 代入平面方程中，有

$$(1+t)-(-t)+2(1+2t)-1=0,$$

解得 $t=-\frac{1}{3}$，从而 L' 与平面的交点为 $M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. M 和 Q 的连线就是所求的直线 L_0：

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}.$$

解法 2 直线 L 过点(1，0，1)，过 L 作垂直于 π 的平面 π^*，π^* 的法向量

$$\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

故 π^* 的方程为

$$-(x-1)+3(y-0)+2(z-1)=0,$$

即 $x-3y-2z+1=0$. 所以所求投影直线 L_0 的方程为

$$\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0. \end{cases}$$

例 8.12 设 L_1，L_2 为两条共面直线，L_1 的方程为 $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2}$，$L_2$ 通过点 $(2, -3, -1)$，且与 x 轴正向夹角为 $\frac{\pi}{3}$，与 z 轴正向夹锐角，求 L_2 的方程.

解 因为 L_2 与 x 轴正向夹角为 $\frac{\pi}{3}$，与 z 轴正向夹锐角，所以可以假定 L_2 的方向向量为$(m, n, 1)$，其中 $m>0$. x 轴的单位方向向量为(1，0，0). 由夹角公式可得

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{m}{1\cdot\sqrt{m^2+n^2+1}}, \quad (*)$$

直线 L_1 上的点(7，3，5)、L_2 上的点$(2, -3, -1)$构成的向量(5，6，6)与 L_1 的方向向量(1，2，2)及 L_2 的方向向量$(m, n, 1)$共面. 所以混合积为 0，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 6 \\ m & n & 1 \end{vmatrix}=0,$$

得到 $4n-4=0$，从而 $n=1$. 代入$(*)$式，得到 $m=\frac{2}{\sqrt{6}}$. 于是 L_2 的方程为

$$\frac{x-2}{\frac{2}{\sqrt{6}}}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+1}{1},$$

即

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{\sqrt{6}}=\frac{z+1}{\sqrt{6}}.$$

例 8.13　已知空间中两条直线 L_1 和 L_2，其参数方程分别为：

$$L_1:\begin{cases}x=1+t,\\y=2-t,\\z=3+2t,\end{cases}\quad t\in\mathbf{R};\qquad L_2:\begin{cases}x=2-u,\\y=1+2u,\\z=-1+u,\end{cases}\quad u\in\mathbf{R}.$$

求直线 L_1 和 L_2 之间的最短距离.

解　直线 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,-1,2)$，直线 L_2 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(-1,2,1)$.

$$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&2\\-1&2&1\end{vmatrix}=(-5,-3,1).$$

与两条直线均垂直的直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(-5,-3,1)$，模 $|\boldsymbol{s}|=\sqrt{35}$.

在直线 L_1 上取点 $P_1(1,2,3)(t=0)$，在直线 L_2 上取点 $P_2(2,1,-1)(u=0)$，连接 P_1，P_2 得向量 $\overrightarrow{P_1P_2}=(1,-1,-4)$. 从而两条直线的最短距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{|1\times(-5)+(-1)(-3)+(-4)\times1|}{\sqrt{35}}=\frac{6}{\sqrt{35}}=\frac{6\sqrt{35}}{35}.$$

8.2.5　题型五　直线与平面的关系问题

例 8.14　已知直线 $L:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$，若平面 π 过点 $M(2,1,-5)$ 且与 L 垂直，求平面 π 的方程.

解　由题意可知，直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(3,2,-1)$ 必定平行于所求平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$，因此可取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=(3,2,-1).$$

利用平面的点法式方程可知

$$3(x-2)+2(y-1)-[z-(-5)]=0,$$

即

$$3x+2y-z-13=0.$$

例 8.15　求通过 $M_0(1,-1,2)$ 和直线 $L:\begin{cases}x-y-z+1=0\\2x+y+z-5=0\end{cases}$ 的平面方程.

例 8.15 视频讲解

解　通过 L 的平面束方程为

$$(x-y-z+1)+\lambda(2x+y+z-5)=0,$$

其中 λ 为不为 0 的任意实数. 将 $M_0(1,-1,2)$ 代入上面方程得

$$\lambda=\frac{1}{2}.$$

代入方程化简得

$$4x-y-z-3=0.$$

又因为 M_0 不在平面 $2x+y+z-5=0$ 上，所以所求平面方程为 $4x-y-z-3=0$.

例 8.16 在平面 $x+y+z+1=0$ 内求一直线，使它通过直线 $\begin{cases} y+z+1=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$ 与该平面的交点，且与已知直线垂直.

解 直线与平面的交点满足 $\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ y+z+1=0, \\ x+2z=0. \end{cases}$ 解得交点为 $\begin{cases} x=0, \\ y=-1, \\ z=0. \end{cases}$ 将已知直线转化为 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=z$. 所以该直线的方向向量为 $(-2,-1,1)$. 所求直线的方向向量垂直于平面的法向量 $(1,1,1)$，垂直于已知直线的方向向量 $(-2,-1,1)$. 故所求直线的方向向量为

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

于是所求直线为

$$\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}.$$

例 8.17 求直线 $\begin{cases} x+y-z=1, \\ -x+y-z=1 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影方程.

解 过直线的平面束方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(y-x-z-1)=0,$$

即

$$(1-\lambda)x+(1+\lambda)y-(1+\lambda)z-(1+\lambda)=0.$$

上述平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直，所以

$$(1-\lambda)\cdot 1+(1+\lambda)\cdot 1-(1+\lambda)\cdot 1=0,$$

得到 $\lambda=1$. 于是投影平面为 $2y-2z-2=0$，即 $y-z-1=0$. 所求投影直线为

$$\begin{cases} y-z-1=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

例 8.18 求过直线 $\begin{cases} x+y-2z+3=0, \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ 且切于球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的平面.

解 过所给直线除平面 $2x-y+z=0$ 外的平面束方程为

$$(x+y-2z+3)+\lambda(2x-y+z)=0,$$

即

$$(1+2\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-2)z+3=0 \qquad (*)$$

因为球面与平面相切，因此球心到平面距离应等于半径，于是

$$\frac{|0+0+0+3|}{\sqrt{(1+2\lambda)^2+(1-\lambda)^2+(\lambda-2)^2}}=1,$$

得 $6\lambda^2-2\lambda-3=0$，所以 $\lambda=\dfrac{1\pm\sqrt{19}}{6}$. 代入式(*)得所求的平面为

$$(x+y-2z+3)+\frac{1\pm\sqrt{19}}{6}(2x-y+z)=0.$$

8.3　习题精选

1. 填空题

(1) 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$________.

(2) 设 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为________.

(3) 设 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=$________.

(4) 与两直线 $\begin{cases}x=1,\\y=-1+t,\\z=2+t,\end{cases}$ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程是________.

(5) 已知两条直线的方程是 L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$，$L_2$：$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是________.

(6) 设一平面经过原点与点(6，−3，2)，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程是________.

(7) 过点(1，2，−1)且与直线 $\begin{cases}x=-t+2,\\y=3t-4,\\z=1+t\end{cases}$ 垂直的平面方程是________.

(8) 两平面 $x-2y+2z-5=0$，$x-2y+2z+4=0$ 之间的距离是________.

(9) 直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-3}{6}$ 在平面 $2x+y-2z+5=0$ 上的投影直线方程是________.

(10) 点(2，1，0)到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离是________.

(11) 点(1，−4，5)到直线 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 上的投影点的坐标是________.

(12) 过两点(3，−2，1)与(−1，0，2)的直线的对称式方程是________，参数方程是________.

(13) 过点(3，0，1)与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程是________.

2. 单项选择题

(1) 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,m,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,4,n)$，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则(　　).

(A) $m=2$，$n=1$；(B) $m=2$，$n=4$；(C) $m=1$，$n=1$；(D) $m=1$，$n=2$.

(2) 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(4,-2,2)$，则下列结论正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；　(B) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；　(C) $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$；　(D) $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$.

(3) 设 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，若以 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 为邻边的

平行四边形面积为 6，则 λ 的值为(　　).

(A) -1 或 5；　(B) -1 或 -1；　(C) 1 或 -5；　(D) 1 或 5.

(4) 母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程为(　　).

(A) $3x^2+2y^2=16$；　(B) $3y^2-z^2=16$；

(C) $x^2+2y^2=16$；　(D) $3y^2-z=16$.

(5) 下列方程的图形为旋转抛物面的是(　　).

(A) $z=\sqrt{x^2+y^2}$；　(B) $z=x^2+y^2$；

(C) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$；　(D) $x^2+y^2=1$.

(6) 过点$(1,-2,4)$且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线方程是(　　).

(A) $2x-3y+z-12=0$；　(B) $x-2y+4z-4=0$；

(C) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$；　(D) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{4}$.

(7) 直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{1}$与平面 $2x+y-z=-2=0$ 的位置关系是(　　).

(A) 平行；　(B) 垂直；

(C) 夹角为$\frac{\pi}{4}$；　(D) 夹角为$-\frac{\pi}{4}$.

(8) 已知直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\ 2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $4x-2y+z-2=0$，则直线 L(　　).

(A) 平行于平面但是不在平面上；　(B) 在平面上；

(C) 垂直于平面；　(D) 与平面斜交.

(9) 设有直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$，$L_2:\begin{cases}x-y=6,\\ 2y+z=3,\end{cases}$ 则 L_1，L_2 的夹角为(　　).

(A) $\frac{\pi}{6}$；　(B) $\frac{\pi}{4}$；　(C) $\frac{\pi}{3}$；　(D) $\frac{\pi}{2}$.

3. 设 $\boldsymbol{a}=(1,2,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,-1,5)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，求 λ 的值.

4. 求同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 的单位向量.

5. 设 $\boldsymbol{a}=(0,1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$，求与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均垂直且模等于 3 的向量 $\boldsymbol{c}$.

6. 求与向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$共线且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=18$ 的向量 $\boldsymbol{b}$.

7. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{2}{3}\pi$，问：系数 λ 为何值时，向量 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直.

8. 求平行四边形的面积，若已知其对角线为向量 $\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ 和 $3\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$，其中$|\boldsymbol{m}|=1$，$|\boldsymbol{n}|=2$，$(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=\frac{\pi}{6}$.

9. 一平面过原点且垂直于平面 $x+2y+3z=1$ 与 $6x-y+5z=1$，求该平面方程.

10. 求在 x 轴上截距为 2，且过点(0，−1，0)和点(2，1，3)的平面方程.

11. 求过 z 轴且与平面 $2x+y-4z=2$ 垂直的平面方程.

12. 求过点(0，2，4)且与两平面 $x+2z=1$ 和 $x-3y=2$ 平行的直线方程.

13. 求过点(2，6，8)且与直线 $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-6}{2}$ 垂直相交的直线方程.

14. 过平面 $x+28y-2z+17=0$ 和平面 $5x+8y-z+1=0$ 的交线，作球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的切平面，求切平面方程.

15. 已知直线 $\begin{cases}3x-y+2z-6=0,\\ x+4y-z+d=0\end{cases}$ 与 z 轴相交，求 d 值.

16. 求 λ 使直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ 与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ 相交.

17. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ y=z\end{cases}$ 在各坐标面上的投影方程.

18. 求准线为 $\begin{cases}x^2+y^2+4z^2=1,\\ x^2=y^2+z^2\end{cases}$ 母线平行于 z 轴的柱面方程.

8.4 习题详解

1. 填空题

(1) $5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$； (2) $\frac{\pi}{6}$； (3) 70； (4) $x-y+z=0$；

(5) $x-3y+z+2=0$； (6) $2x+2y-3z=0$； (7) $x-3y-z+4=0$；

(8) 3； (9) $\begin{cases}3x-4y+z=0,\\ 2x+y-2z+5=0\end{cases}$； (10) $\sqrt{2}$；

(11) (0，−1，0)； (12) $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{-1}$，$\begin{cases}x=-1+4t,\\ y=-2t,\\ z=2-t\end{cases}$；

(13) $3x-7y+5z-14=0$.

2. 单项选择题

(1) (B)； (2) (D)； (3) (A)

因为 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=(2-\lambda)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，

所以 $|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}|=|2-\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=|2-\lambda|\times1\times2=6$，

从而 $|2-\lambda|=3$，解得 $\lambda=-1$ 或者 $\lambda=5$，故选项(A)正确；

(4) (B)； (5) (B)； (6) (C)；

(7) (A)； (8) (C)； (9) (C).

3. 因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0,$$

从而

$$\lambda=-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=-\frac{6}{(\sqrt{6})^2}=-1.$$

4. 假设所求向量为 $\boldsymbol{c}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 3\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

故 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$，所以 $\boldsymbol{c}=\pm\frac{1}{3}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$.

5. 由题意

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(-1,-1,-1)=\boldsymbol{r},$$

设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{r}$，因为 $|\boldsymbol{c}|=3$，即 $|\boldsymbol{c}|=|\lambda||\boldsymbol{r}|=\sqrt{3}|\lambda|=3$，所以 $\lambda=\pm\sqrt{3}(1,1,1)$.

6. 由于向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 共线，故设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=(2\lambda,-\lambda,2\lambda)$，因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=18=4\lambda+\lambda+4\lambda=9\lambda,$$

所以 $\lambda=2$，从而 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}=(4,-2,4)$.

7. 由于

$$\begin{aligned}0&=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=(\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=3\lambda|\boldsymbol{a}|^2-\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{2}{3}\pi+51|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{2}{3}\pi-17|\boldsymbol{b}|^2=17\lambda-680,\end{aligned}$$

所以 $\lambda=40$.

8. 设平行四边形相邻的两边对应的向量为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，不妨假设

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}\end{cases},$$

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}\end{cases}$，从而

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\times(-\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n})=5\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n},$$

平行四边形面积为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=5|\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}|=5|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|\sin(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=5\cdot1\cdot2\cdot\sin\frac{\pi}{6}=5.$$

9. 平面 $x+2y+3z=1$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,2,3)$，平面 $6x-y+5z=1$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(6,-1,5)$，所求平面法向量

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 6 & -1 & 5\end{vmatrix}=(13,13,-13),$$

所求平面方程为 $13(x-0)+13(y-0)-13(z-0)=0$，即 $x+y-z=0$.

10. 设平面的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，因为在 x 轴上截距为 2，且过点 $(0,-1,0)$，所以 $a=2$，$b=-1$，平面的截距式方程为

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{c}=1,$$

将点 $(2,1,3)$ 代入得 $c=3$，所求平面方程为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$，即 $3x-6y+2z=6$.

11. 因为所求平面过 z 轴，所以设平面方程为 $Ax+By=0$，法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,0)$，平面 $2x+y-4z=2$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(2,1,-4)$，因为 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$，所以 $2A+B=0$，$B=-2A$，所以所求平面方程为 $x-2y=0$.

12. 平面 $x+2z=1$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,2)$，平面 $x-3y=2$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(1,-3,0)$，所求直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}=(6,2,-3),$$

所求直线方程为 $\frac{x}{6}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{-3}$.

13. 先过点 $M_0(2,6,8)$ 作一平面 π 垂直于已知直线，平面 π 的方程为

$$1(x-2)+2(y-6)+2(z-8)=0,$$

即 $x+2y+2z=30$. 再求平面 π 与直线 L 的交点，将直线的参数方程 $L:\begin{cases}x=3+t,\\ y=4+2t,\\ z=6+2t,\end{cases}$ 代入平面方程得

$$(3+t)+2(4+2t)+2(6+2t)=30,$$

解得 $t=\frac{7}{9}$，所以交点 M 坐标为 $\left(\frac{34}{9},\frac{50}{9},\frac{68}{9}\right)$，向量 $\overrightarrow{M_0M}=\left(\frac{16}{9},\frac{-4}{9},\frac{-4}{9}\right)$ 为所求直线的方向向量，所求直线为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-8}{-1}.$$

14. 解法 1：过平面 $x+28y-2z+17=0$ 和平面 $5x+8y-z+1=0$ 的交线的平面束方程为

$$x+28y-2z+17+\lambda(5x+8y-z+1)=0,$$

即

$$(1+5\lambda)x+(28+8\lambda)y-(2+\lambda)z+17+\lambda=0.$$

假设平面和球面的切点为 (x_0,y_0,z_0)，于是在该点的法向量为 (x_0,y_0,z_0). 所以得到

$$\begin{cases}(1+5\lambda)x_0+(28+8\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0+17+\lambda=0, & (1)\\ \dfrac{1+5\lambda}{x_0}=\dfrac{28+8\lambda}{y_0}=\dfrac{-(2+\lambda)}{z_0}=t, & (2)\\ x_0^2+y_0^2+z_0^2=1, & (3)\end{cases}$$

由式(2)解出 x_0，y_0，z_0 和 t，λ 的关系，代入式(1)，并注意到式(3)，于是得到

$$t+17+\lambda=0,$$

再次代入式(1)，得到

$$(1+5\lambda)^2+(28+8\lambda)^2+(2+\lambda)^2=(17+\lambda)^2,\quad 89\lambda^2+428\lambda+500=0,$$

解得 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-\dfrac{250}{89}$. 当 $\lambda_1=-2$ 时，得到所求平面为 $3x-4y-5=0$；当 $\lambda_2=-\dfrac{250}{89}$时，得到所求平面为

$$387x-164y-24z-421=0.$$

解法 2：过平面 $x+28y-2z+17=0$ 和平面 $5x+8y-z+1=0$ 的交线的平面束的方程为

$$x+28y-2z+17+\lambda(5x+8y-z+1)=0,$$

其中 $\lambda\neq0$，即

$$(1+5\lambda)x+(28+8\lambda)y-(2+\lambda)z+17+\lambda=0,$$

由题意可知，球心(0，0，0)到该平面的距离 $d=1$，即

$$d=\frac{|17+\lambda|}{\sqrt{(1+5\lambda)^2+(28+8\lambda)^2+(2+\lambda)^2}}=1,$$

整理得

$$89\lambda^2+428\lambda+500=0,$$

解得 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-\dfrac{500}{89}$. 当 $\lambda_1=-2$ 时，所得的平面方程为 $3x-4y-5=0$. 当 $\lambda_2=-\dfrac{500}{89}$时，所得平面的方程为 $387x-164y-24z-421=0$.

15. 假设直线与 z 轴交点为$(0,0,z_0)$，则该点满足 $3x-y+2z-6=0$. 于是 $2z_0-6=0$，$z_0=3$. 将(0，0，3)代入 $x+4y-z+d=0$，得到 $d=3$. 于是所求直线为 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-1}$.

16. 由 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}=t$ 得到 $\begin{cases}x=1+t\\y=-1+2t\\z=1+\lambda t\end{cases}$. 代入另一直线方程，得到

$$2+t=-2+2t=1+\lambda t,$$

解得 $t=4$，$\lambda=\dfrac{5}{4}$.

17. 在 xOy 平面上的投影：$\begin{cases}x^2+2y^2=4\\z=0\end{cases}$；在 xOz 平面上的投影：$\begin{cases}x^2+2z^2=4\\y=0\end{cases}$；在 yOz 平面上的投影：$\begin{cases}y=z\\x=0\end{cases}$，当 $x=0$，$y=z$ 时，$2y^2\leqslant4$，$|y|\leqslant\sqrt{2}$.

18. 因为母线平行于 z 轴，只要在方程中消去 z，就得到 $5x^2-3y^2=1$.

8.5　拓展训练

1. 求点 $P(1, 1, 1)$关于平面 $x+y-2z-6=0$ 的对称点 Q 的坐标.

2. 设一平面过直线$\begin{cases}x+5y+z=0,\\x-z+4=0\end{cases}$且与平面 $x-4y-8z=3$ 成$\dfrac{\pi}{4}$的夹角，求该平面的方程.

3. 设直线 L 过 $A(1, 0, 0)$，$B(0, 1, 1)$两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，求曲面 Σ 的方程.

8.5 1 详解　　8.5 2 详解　　8.5 3 详解